DOI: 10.37863/umzh.v73i11.6521

УДК 517.956.4

Г. М. Унгурян (Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича)

НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ВЕКТОРНОГО ПОРЯДКУ

For $\{\overrightarrow{p}; \overrightarrow{h}\}$-parabolic equations with continuous coefficients, the problem of finding classical solutions that satisfy a modified initial condition with generalized data such as the Gelfand and Shilov distributions is considered. This condition linearly combines the values of the solution at the initial and an intermediate points in time. The conditions for the correct solvability of this problem are clarified and the formula for its solution is found. With the help of the obtained results, the corresponding problem with impulse action is solved.

Для $\{\overrightarrow{p}; \overrightarrow{h}\}$-параболічних рівнянь з неперервними коефіцієнтами розглядається задача про знаходження класичних розв'язків, які задовольняють модифіковану початкову умову з узагальненими даними типу розподілів Гельфанда і Шилова. Ця умова лінійно поєднує в собі значення розв'язку в початковий та деякий проміжний моменти часу. З'ясовано умови коректної розв'язності цієї задачі та знайдено формулу її розв'язку. З допомогою одержаних результатів розв'язано відповідну задачу з імпульсною дією.

Вступ. Нехай $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел, $\mathbb{N}_m := \{1, \ldots, m\}$; $\mathbb{R}^n$ — дійсний простір розмірності $n \geq 1$ зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$ та нормою $\|x\| := (x, x)^{1/2}$, $\mathbb{R} := \mathbb{R}^1$; $\mathbb{Z}_+^n$ — множина всіх n-вимірних мультиіндексів, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{Z}_+^1$; i — уявна одиниця; $|x+iy| := (x^2+y^2)^{1/2}$, якщо $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$; $z^l := z_1^{l_1} \ldots z_n^{l_n}$, $\|z\|^l := |z_1|^{l_1} + \ldots + |z_n|^{l_n}$, $|l| := l_1 + \ldots + l_n$, $1/l := := (1/l_1, \ldots, 1/l_n)$, якщо $z := (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$, $l := (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{Z}_+^n$; ∂_x^k — частинна похідна за змінною x порядку k.

Зафіксуємо довільно вектор $\overrightarrow{p} \in \mathbb{Z}_+^n$ із компонентами $p_j > 1$ і розглянемо диференціальне рівняння вигляду

$$\partial_t u(t; x) = P(t; i\partial_x) u(t; x), \quad (t; x) \in \Pi_{(0;T]} := (0; T] \times \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

в якому

$$P(t; i\partial_x) = \sum_{k_1/p_1 + \ldots + k_n/p_n \leq 1} a_k(t) i^{|k|} \partial_x^k$$

(тут коефіцієнти $a_k(\cdot)$ — неперервні на множині $[0; T]$ функції).

Вважатимемо, що рівняння (1) на множині $\Pi_{[0;T]}$ є рівномірно $\{\overrightarrow{p}; \overrightarrow{h}\}$-параболічним із показником параболічності $\overrightarrow{h} \in \mathbb{Z}_+^n$, $0 < h_j \leq p_j$, тобто таким, що [15]

$$\exists \delta > 0 \quad \exists \delta_0 \geq 0 \quad \forall t \in [0; T] \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n : \operatorname{Re} P(t; \xi) \leq -\delta \|\xi\|^{\overrightarrow{h}} + \delta_0.$$

У [15] з'ясовано, що кожне $\overrightarrow{2b}$-параболічне (за Ейдельманом) рівняння (1) є також $\{\overrightarrow{2b}; \overrightarrow{2b}\}$-параболічним, а кожне параболічне за Шиловим рівняння порядку p з показником параболічності h — $\{\overrightarrow{p}; \overrightarrow{h}\}$-параболічним з $p_j = p$ і $h_j = h$.

Для рівняння (1) задамо початкову умову

$$u(t; \cdot)_{|t=0} = f. \tag{2}$$

Дослідження задачі Коші (1), (2) у випадку, коли початкова функція f є узагальненою функцією типу розподілів Гельфанда і Шилова, проводилось у праці [15], де встановлено коректну розв'язність цієї задачі та описано всі класичні розв'язки рівняння (1) у просторах типу S основних функцій Гельфанда і Шилова. Подібні результати для параболічних за Шиловим рівнянь одержано в [14]. У працях [16, 17] також наведено альтернативні методи дослідження фундаментального розв'язку задачі Коші для параболічних за Шиловим систем, які дозволяють уникнути поняття роду рівняння та труднощів, пов'язаних із його знаходженням. Коректну розв'язність задачі Коші для параболічних за Шиловим та $\overrightarrow{2b}$-параболічних рівнянь у просторах розподілів Гельфанда і Шилова, а також принцип локалізації розв'язку на початковій гіперплощині встановлено в [5, 6]. Властивості стабілізації розв'язків параболічного рівняння (1) при спеціальних Λ-умовах вивчалися в [7, 10]. Класи єдиності та коректності задачі Коші для рівняння (1) зі скалярною параболічністю описано в [3, 35]. Праці [11, 18 – 22] присвячено побудові теорії задачі Коші для рівняння (1) з коефіцієнтами, залежними від просторової змінної. Результати цих досліджень природно доповнюють і узагальнюють класичну теорію задачі Коші для параболічних за Петровським рівнянь [9, 27, 33].

Деякі задачі теплофізики, астрономії, дифузії, демографії, математичної біології тощо (див. [1, 2, 26, 30]) своєю специфікою приводять до узагальнення початкової умови (2), зокрема до формулювання її у вигляді

$$u(t;\cdot)_{|t=0} + \nu u(t;\cdot)_{|t=t_1} = f. \tag{3}$$

Тут ν і f — відомі величини, а t_1 — фіксований проміжний момент часу, $t_1 \in (0;T]$.

Для параболічних за Петровським рівнянь, тобто рівнянь (1) зі скалярною параболічністю, в яких $p = h = 2b$, задачі з умовою (3) та умовами більш загальної форми розглядались у [8, 12, 13, 24, 31, 34]. Тут з'ясовуються різноманітні питання про коректність постановки таких задач та методи їх розв'язування за тих чи інших умов на вхідні дані.

Метою даної роботи є встановлення для параболічного диференціального рівняння (1) векторного порядку коректної розв'язності задачі з еволюційною умовою (3) у класі узагальнених початкових даних типу розподілів Гельфанда і Шилова, а також розв'язання цієї задачі з наявним часовим імпульсом, який може відбутися як до моменту часу t_1, так і після нього.

Зазначимо, що задачі з імпульсною дією для диференціальних рівнянь досліджувались у багатьох працях, зокрема в [29, 32], при цьому задача Коші з імпульсною дією для параболічних рівнянь розглядалась у [23, 25, 28].

Опишемо коротку структуру роботи. У першому пункті наведено необхідну інформацію про простори основних і узагальнених функцій, які слугуватимуть тут середовищем дослідження еволюційної задачі, а також відомості про коректну розв'язність задачі Коші для параболічних за Шиловим рівнянь (1). У другому пункті шляхом зведення до відповідної задачі Коші (1), (2) знайдено класичні розв'язки еволюційної задачі (1), (3) з узагальненими початковими даними f. Задачу (1), (3) з імпульсною післядією та переддією розв'язано відповідно в пунктах 3 і 4. Останній пункт містить висновки.

1. Попередні відомості. Нехай $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ — клас усіх нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}^n$ функцій, S — простір Л. Шварца елементів з $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, які швидко спадають на нескінченності, а S' — відповідний простір розподілів Шварца [4].

Для α і β з $\mathbb{R}^n$ із додатними компонентами $\alpha_j,\ \beta_j$ покладемо

$$S_\alpha = \{\varphi \in S|\ \exists A>0\ \forall k \in \mathbb{Z}_+^n\ \exists c_k>0\ \forall q \in \mathbb{Z}_+^n\ \forall x \in \mathbb{R}^n : |x^q \partial_x^k \varphi(x)| \le c_k A^{|q|} q^{\alpha q}\},$$

$$S^\beta = \{\varphi \in S|\ \exists B>0\ \forall q \in \mathbb{Z}_+^n\ \exists c_q>0\ \forall k \in \mathbb{Z}_+^n\ \forall x \in \mathbb{R}^n : |x^q \partial_x^k \varphi(x)| \le c_q B^{|k|} k^{\beta k}\},$$

$$S_\alpha^\beta = \{\varphi \in S|\ \exists A>0\ \exists B>0\ \exists c>0\ \forall \{k,q\} \subset \mathbb{Z}_+^n\ \forall x \in \mathbb{R}^n : |x^q \partial_x^k \varphi(x)| \le c A^{|q|} B^{|k|} q^{\alpha q} k^{\beta k}\}.$$

Множини $S_\alpha,\ S^\beta$ і S_α^β з відповідними топологіями [4] є зліченно-нормованими повними досконалими просторами, які називаються просторами типу S Гельфанда і Шилова.

Простір S_α^β нетривіальний при $\alpha_j + \beta_j \ge 1,\ j \in \mathbb{N}_n$, і складається лише з тих функцій $\varphi \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, що задовольняють нерівність

$$|\partial_x^k \varphi(x)| \le c B^{|k|} k^{\beta k} e^{-\delta \|x\|^{1/\alpha}}, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n, x \in \mathbb{R}^n,$$

з додатними сталими $c,\ B$ і δ, залежними тільки від функції φ [4].

У просторах типу S визначені та неперервні операції додавання, множення, згортки й оператор F перетворення Фур'є, причому виконуються топологічні рівності $F[S_\alpha] = S^\alpha$, $F[S^\beta] = S_\beta,\ F[S_\alpha^\beta] = S_\beta^\alpha$ [4].

Позначимо через Φ' простір, топологічно спряжений із простором $\Phi \in \left\{S^{1/\overrightarrow{h}}; S_{\overrightarrow{\beta}}^{1/\overrightarrow{h}},\ \beta_j \ge \right.$ $\left.\ge \max_{l \in \mathbb{N}_n} p_l/h_l - 1/h_j\right\}$. Перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in \Phi'$, а також згортку $f * g$ елементів $\{f, g\} \subset \Phi'$ визначимо співвідношеннями [4]

$$\langle F[f], F[\varphi]\rangle = (2\pi)^n \langle f, \varphi\rangle, \quad \langle f * g, \varphi\rangle = \langle f, g * \varphi\rangle, \quad \varphi \in \Phi$$

(тут кутовими дужками $\langle\ \rangle$ позначено дію узагальненої функції на основну). Очевидно, що операція згортки $f * g$ у просторі Φ' існуватиме, якщо узагальнена функція g є згортувачем у просторі Φ, тобто такою, що:

1) $(g * \varphi)(\cdot) := \langle g(x), \varphi(x + \cdot)\rangle \in \Phi \quad (\forall \varphi \in \Phi)$;

2) операція згортки g з елементами $\varphi \in \Phi$ є неперервною в просторі Φ.

Звідси приходимо до рівності $F[f * g] = F[f]F[g]$, з якої зрозуміло, що елемент $g \in$ $\in \Phi'$ є згортувачем у Φ лише тоді, коли його перетворення Фур'є $F[g]$ — мультиплікатор у відповідному просторі $F[\Phi]$.

Правильним є такий критерій мультиплікатора [15]: *Нехай* $\theta_\tau^t(\cdot) = \exp\left\{\int_\tau^t P(\tau;\cdot)d\tau\right\}$, $0 \le \tau < t \le T$. *Тоді для того, щоб функція* $\mu(\cdot) \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *була мультиплікатором у просторі* $F[\Phi]$, *необхідно й достатньо, щоб для кожного фіксованого* $t,\ 0 < t < 1$, *добуток* $(\mu\theta_0^t)(\cdot)$ *належав до простору* $F[\Phi]$.

У [15] досліджено властивості функції $\theta_\tau^t(\cdot)$. Зокрема, встановлено належність $\theta_\tau^t(\cdot)$ до простору $S_{1/\overrightarrow{h}}^{\overrightarrow{\lambda}},\ \lambda_j := \max_{l \in \mathbb{N}_n} p_l/h_l - 1/h_j$, при кожному фіксованому $t > \tau$ та одержано оцінки

$$\left|\partial_\xi^k \theta_\tau^t(\xi)\right| \le c e^{\delta(t-\tau)} A^{|k|} k^{\overrightarrow{\lambda} k} (t-\tau)^{n+\gamma(k)} e^{-\delta_0 (t-\tau)\|\xi\|^{\overrightarrow{h}}}, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \le \tau < t \le T, \tag{4}$$

з додатними сталими c, δ, δ_0 і A. Тут $\gamma(k) = 1 + \sum_{j=1}^{n} k_j(1-\lambda_j)$, якщо $0 < t-\tau < 1$, і $\gamma(k) = \sum_{j=1}^{n} k_j(1+1/h_j)$ при $1 \leq t-\tau$.

Розглянемо задачу Коші для рівняння (1) з початковою умовою (2), в якій f — функціонал із простору Φ'.

Означення. *Розв'язком задачі Коші* (1), (2) *на множині* $\Pi_{(0;T]}$ *називається функція* u, *яка на* $\Pi_{(0;T]}$ *задовольняє рівняння* (1) *у звичайному розумінні, а початкову умову* (2) *у сенсі збіжності в просторі* Φ'.

Фундаментальним розв'язком задачі Коші для рівняння (1) є функція

$$G(t,\tau;\cdot) = F^{-1}[\theta_\tau^t(\xi)](t,\tau;\cdot), \quad 0 \leq \tau < t \leq T.$$

Справджується таке твердження.

Теорема 1 [15]. *Нехай* f — *дійснозначний функціонал із простору* Φ'. *Тоді відповідна задача Коші* (1), (2) *на множині* $\Pi_{(0;T]}$ *коректно розв'язна, її розв'язок* $u(t;x)$ *є диференційовною за змінною* t *та нескінченно диференційовною за змінною* x *функцією, для якої виконуються такі умови*:

1) $F[\partial_t u(t;\cdot)] = \partial_t F[u(t;\cdot)],\ t \in (0;T]$;

2) $u(t;x) = f * G(t,0;x),\ (t;x) \in \Pi_{(0;T]}$.

Ці результати ми використаємо при встановленні розв'язності відповідної еволюційної задачі Коші (1), (3).

2. Еволюційна задача Коші. Зафіксуємо довільно дійснозначний функціонал f із простору Φ' та параметр $\nu \in \mathbb{R}$ і для рівняння (1) задамо еволюційну початкову умову (3), яку, з огляду на диференційовність функції u у точці t_1, розумітимемо як слабку збіжність у Φ':

$$\langle u(t;x), \varphi(x)\rangle \underset{t\to+0}{\longrightarrow} \langle f(x) - \nu u(t_1;x), \varphi(x)\rangle \quad (\forall \varphi \in \Phi).$$

Розв'яжемо одержану задачу (1), (3) методом перетворення Фур'є. Для цього запишемо відповідну двоїсту за Фур'є задачу

$$\partial_t v(t;\xi) = P(t;\xi)v(t;\xi), \quad (t;\xi) \in \Pi_{(0;T]}, \tag{5}$$

$$\langle v(t;\xi), F[\varphi](\xi)\rangle \underset{t\to+0}{\longrightarrow} \langle F[f](\xi) - \nu v(t_1;\xi), F[\varphi](\xi)\rangle \quad (\forall F[\varphi] \in F[\Phi]), \tag{6}$$

де $v = F[u]$.

Згідно з класичною теоремою Коші, всі розв'язки рівняння (5) описуються формулою $v(t;\cdot) = c(\cdot)\theta_0^t(\cdot)$ з довільною функцією $c(\cdot)$. Звідси при $1 + \nu\theta_0^{t_1}(\xi) \neq 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, приходимо до рівносильності умови (6) такій початковій умові:

$$\langle v(t;\xi), F[\varphi](\xi)\rangle \underset{t\to+0}{\longrightarrow} \left\langle \frac{F[f](\xi)}{1+\nu\theta_0^{t_1}(\xi)}, F[\varphi](\xi)\right\rangle \quad (\forall F[\varphi] \in F[\Phi]). \tag{7}$$

Отже, при $1+\nu\theta_0^{t_1}(\xi) \neq 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, двоїста за Фур'є задача (5), (6) еквівалентна задачі Коші (5), (7), при цьому єдиним розв'язком цих задач є функція

$$v(t;\xi) = \frac{F[f](\xi)}{1+\nu\theta_0^{t_1}(\xi)}\theta_0^t(\xi), \quad (t;\xi) \in \Pi_{(0;T]}.$$

Тоді з огляду на теорему 1 для доведення коректної розв'язності вихідної задачі (1), (3) достатньо обґрунтувати належність функціонала $g = F^{-1}\big[(1+\nu\theta_0^{t_1}(\xi))^{-1}\big] * f$ до простору Φ' та його дійснозначність. Для цього, очевидно, досить показати, що функція $\mu(\cdot) = (1+\nu\theta_0^{t_1}(\cdot))^{-1}$ — мультиплікатор у просторі $F[\Phi]$.

Лема 1. *Нехай параметр* ν *такий, що* $\inf_{\xi\in\mathbb{R}^n}|1+\nu\theta_0^{t_1}(\xi)| = b \neq 0$. *Тоді функція* $\mu(\cdot) = (1+\nu\theta_0^{t_1}(\cdot))^{-1}$ — *мультиплікатор у просторі* $S_{1/\overrightarrow{h}}^{\overrightarrow{\lambda}}$.

Доведення. Для спрощення викладок наведемо схему доведення при $n=1$, скориставшись ідеєю дослідження фундаментального розв'язку для $\{\overrightarrow{p};\overrightarrow{h}\}$-параболічних рівнянь, запропонованою в [15]. Зазначимо, що в цьому випадку $S_{1/\overrightarrow{h}}^{\overrightarrow{\lambda}} = S_{1/h_1}^{\frac{p_1-1}{h_1}}$.

Згідно з відомою формулою Фаа де Бруно диференціювання складеної функції

$$\partial_x^k f(\varphi(x)) = \sum_r^k \frac{k!}{q!j!\ldots m!}\frac{d^r f(\varphi)}{d\varphi^r}\Big(\frac{d\varphi(x)}{1!dx}\Big)^q\Big(\frac{d^2\varphi(x)}{2!dx}\Big)^j\ldots\Big(\frac{d^l\varphi(x)}{l!dx}\Big)^m, \quad k\in\mathbb{Z}_+, \quad x\in\mathbb{R}$$

(тут знак суми поширюється на всі цілочислові невід'ємні розв'язки рівняння $k = q+2j+\ldots$ $\ldots+lm$, а $r = q+j+\ldots+m$), одержуємо

$$|\partial_\xi^k\mu(\xi)| \leq \sum_r^k \frac{k!(r-1)!}{q!j!\ldots m!}\Big(\frac{|\nu|}{b}\Big)^r\Big|\frac{d\theta_0^{t_1}(\xi)}{1!dx}\Big|^q\Big|\frac{d^2\theta_0^{t_1}(\xi)}{2!dx}\Big|^j\ldots\Big|\frac{d^l\theta_0^{t_1}(\xi)}{l!dx}\Big|^m, \quad k\in\mathbb{Z}_+, \quad \xi\in\mathbb{R}.$$

Звідси, згідно з формулою Стірлінга

$$n! = \sqrt{2\pi n}(n/e)^n(1+O(1/n)),$$

оцінкою (4) і тим, що

$$\frac{r!}{q!j!\ldots m!} \leq 2^k,$$

приходимо до висновку про існування додатних сталих $c,\ A$ таких, що для всіх $k\in\mathbb{Z}_+$ і $\xi\in\mathbb{R}$ виконується нерівність

$$|\partial_\xi^k\mu(\xi)| \leq cA^k k^{\frac{p_1-1}{h_1}k},$$

яка у поєднанні з оцінкою (4) забезпечує належність добутку $(\mu\theta_0^t)(\cdot)$ до простору $S_{1/h_1}^{\frac{p_1-1}{h_1}}$ при кожному фіксованому $t\in(0;1)$.

Лему доведено.

Отже, справджується таке твердження.

Теорема 2. *Нехай параметр* ν *такий, що* $\inf_{\xi\in\mathbb{R}^n}|1+\nu\theta_0^{t_1}(\xi)| = b\neq 0$, *а* f — *дійснозначний функціонал із простору* Φ'. *Тоді відповідна еволюційна задача* (1), (3) *на множині* $\Pi_{(0;T]}$ *коректно розв'язна, її розв'язок* $u(t;x)$ *є диференційовною за змінною* t *та нескінченно диференційовною за змінною* x *функцією, для якої виконуються такі умови*:

1) $F[\partial_t u(t;\cdot)] = \partial_t F[u(t;\cdot)],\ t\in(0;T]$;
2) $u(t;x) = g*G(t,0;x),\ (t;x)\in\Pi_{(0;T]},$ *де* $g = f*F^{-1}\big[(1+\nu\theta_0^{t_1}(\xi))^{-1}\big]$.

Перейдемо до розгляду еволюційної задачі Коші (1), (3) з одинарною імпульсною дією, яка відбувається в момент часу $t_0 \in (0;T)$. У цьому випадку рівняння (1) розглядатиметься вже на множині $\Pi_{(0;T]\setminus\{t_0\}}$ з додатковою умовою імпульсу

$$u(t;\cdot)_{|t=t_0+0} - u(t;\cdot)_{|t=t_0-0} = \chi, \tag{8}$$

де $\chi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Вважатимемо, що розв'язок u в точці t_0 неперервний зліва. Тоді умову (8) розумітимемо в такому граничному сенсі:

$$\langle u(t;x), \varphi(x)\rangle \underset{t\to t_0+0}{\longrightarrow} \langle \chi + u(t_0-0;x), \varphi(x)\rangle \quad (\forall \varphi \in \Phi).$$

З огляду на специфіку умови (3) при $t_1 \neq T$ можливі два випадки: $t_1 < t_0$ — імпульсна післядія; $t_0 < t_1$ — імпульсна переддія.

Розглянемо окремо кожен із цих випадків.

3. Еволюційна задача з імпульсною післядією. Дослідимо випадок, коли імпульс відбувся після „контрольного заміру” еволюції $u(t;\cdot)$ розглядуваного процесу, тобто при $t_1 < t_0$. У цьому випадку на множині $\Pi_{(0;T]\setminus\{t_0\}}$ маємо задачу (1), (3) і (8) при $t_1 < t_0$.

Перейдемо до розв'язування цієї задачі. Якщо врахувати неперервність зліва функції $u(t;\cdot)$ у точці t_0, то на часовому проміжку $(0;t_0]$ вихідна задача (1), (3) і (8), очевидно, зведеться до задачі (1), (3) з $T = t_0$. Тоді, згідно з теоремою 2, за відповідних умов шуканий розв'язок можемо записати у вигляді

$$u(t;x) = f * F^{-1}\big[(1+\nu\theta_0^{t_1}(\xi))^{-1}\big] * G(t,0;x), \quad (t;x) \in \Pi_{(0;t_0]},$$

причому цей розв'язок єдиний на множині $\Pi_{(0;t_0]}$.

Далі, умова імпульсу (8) набирає вигляду

$$u(t;\cdot)_{|t=t_0+0} = \varrho, \tag{9}$$

де $\varrho = \chi + f * F^{-1}\big[(1+\nu\theta_0^{t_1}(\xi))^{-1}\big] * G(t_0,0;\cdot)$ — регулярний функціонал із простору Φ'. Тому знаходження розв'язку u задачі (1), (3) і (8) на проміжку $(t_0;T]$ зводиться до розв'язування задачі Коші (1), (9) на множині $\Pi_{(t_0;T]}$. Скориставшись теоремою 1, знайдемо

$$u(t;x) = \varrho * G(t,t_0;x), \quad (t;x) \in \Pi_{(t_0;T]},$$

і цей розв'язок також єдиний на $\Pi_{(t_0;T]}$.

Використання функції Хевісайда

$$H(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

дозволяє записати знайдений розв'язок на множині $\Pi_{(0;T]\setminus\{t_0\}}$ у вигляді

$$u(t;x) = H(t_0-t)\Big(f * F^{-1}\big[(1+\nu\theta_0^{t_1}(\xi))^{-1}\big] * G(t,0;x)\Big) +$$
$$+ H(t-t_0)\Big(\big(\chi + f * F^{-1}\big[(1+\nu\theta_0^{t_1}(\xi))^{-1}\big] * G(t_0,0;\cdot)\big) * G(t,t_0;x)\Big). \tag{10}$$

Підсумуємо попередні міркування у вигляді такого твердження.

Теорема 3. *Якщо параметр* ν *такий, що* $\inf_{\xi\in\mathbb{R}^n}|1+\nu\theta_0^{t_1}(\xi)| = b \neq 0$, *а* f — *дійснозначний функціонал із простору* Φ', *то при* $t_1 < t_0$ *відповідна задача* (1), (3), (8) *на множині* $\Pi_{(0;T]\setminus\{t_0\}}$ *коректно розв'язна. Її розв'язок* $u(t;x)$ *зображується формулою* (3); *він є диференційовним за змінною* t *один раз і нескінченно диференційовним за змінною* x, *для якого виконується умова* $F[\partial_t u(t;\cdot)] = \partial_t F[u(t;\cdot)],\ t\in(0;T]\setminus\{t_0\}$.

4. Еволюційна задача з імпульсною переддією. Розглянемо тепер випадок, коли імпульс відбувся до „контрольного заміру" еволюції $u(t;\cdot): t_0 < t_1$. Тоді на множині $\Pi_{(0;T]\setminus\{t_0\}}$ маємо задачу (1), (3), (8) при $t_0 < t_1$. Розв'язуючи її методом перетворення Фур'є, приходимо до відповідної двоїстої за Фур'є задачі:

$$\partial_t v(t;\xi) = P(t;\xi)v(t;\xi), \quad (t;\xi)\in\Pi_{(0;T]\setminus\{t_0\}}, \tag{11}$$

$$\langle v(t;\xi), F[\varphi](\xi)\rangle \underset{t\to+0}{\longrightarrow} \langle F[f](\xi) - \nu v(t_1;\xi), F[\varphi](\xi)\rangle, \tag{12}$$

$$\langle v(t;\xi), F[\varphi](\xi)\rangle \underset{t\to t_0+0}{\longrightarrow} \langle F[\chi](\xi) + v(t_0-0;\xi), F[\varphi](\xi)\rangle \quad (\forall F[\varphi]\in F[\Phi]). \tag{13}$$

Шукаючи розв'язок цієї задачі у вигляді

$$v(t;\cdot) = H(t_0-t)c_0(\cdot)\theta_0^t(\cdot) + H(t-t_0)c_1(\cdot)\theta_{t_0}^t(\cdot), \quad t\in(0;T]\setminus\{t_0\},$$

безпосередньо з умов (12), (13) знаходимо

$$v(t;\xi) = H(t_0-t)\frac{F[f](\xi) - \nu F[\chi](\xi)\theta_{t_0}^{t_1}(\xi)}{1+\nu\theta_0^{t_1}(\xi)}\theta_0^t(\xi) +$$

$$+H(t-t_0)\frac{F[f](\xi)\theta_0^{t_0}(\xi) + F[\chi](\xi)}{1+\nu\theta_0^{t_1}(\xi)}\theta_{t_0}^t(\xi), \quad (t;\xi)\in\Pi_{(0;T]\setminus\{t_0\}}.$$

Звідси приходимо до рівносильності на проміжку $(0;t_0)$ задачі (11)–(13) і задачі Коші для рівняння (11) з початковою умовою

$$v(t;\cdot)_{|t=0} = \frac{F[f](\cdot) - \nu F[\chi](\cdot)\theta_{t_0}^{t_1}(\cdot)}{1+\nu\theta_0^{t_1}(\cdot)}.$$

Зазначимо, що згідно з лемою 1 функціонал $F^{-1}\big[(1+\nu\theta_0^{t_1}(\xi))^{-1}\big](\cdot)$ — згортувач у просторі Φ, а $\nu\chi G(t_1,t_0;\cdot)\in\Phi$, тому на підставі теореми 1 вихідна задача (1), (3), (8) на множині $\Pi_{(0;t_0)}$ має єдиний розв'язок

$$u(t;x) = \big(f - \nu\chi G(t_1,t_0;x)\big) * F^{-1}\big[(1+\nu\theta_0^{t_1}(\xi))^{-1}\big] * G(t,0;x).$$

Далі, на проміжку $(t_0;T]$ задача (11)–(13) рівносильна задачі Коші для рівняння (11) з початковою умовою

$$v(t;\cdot)_{|t=t_0} = \rho,$$

в якій $\rho = \dfrac{F[f](\cdot)\theta_0^{t_0}(\cdot) + F[\chi](\cdot)}{1+\nu\theta_0^{t_1}(\cdot)}$. Оскільки $F^{-1}[\rho]$ — дійснозначний функціонал із простору Φ', то, згідно з теоремою 1, єдиним розв'язком задачі (1), (3), (8) на множині $\Pi_{(t_0;T]}$ є функція

$$u(t;x) = \big(f * G(t_0,0;x) + \chi\big) * F^{-1}\big[(1+\nu\theta_0^{t_1}(\xi))^{-1}\big] * G(t,t_0;x).$$

Отже, справджується таке твердження.

Теорема 4. *Нехай параметр* ν *такий, що* $\inf_{\xi\in\mathbb{R}^n}|1+\nu\theta_0^{t_1}(\xi)| = b \neq 0$, *а* f — *дійснозначний функціонал із простору* Φ'. *Тоді відповідна задача* (1), (3), (8) *при* $t_0 < t_1$ *на множині* $\Pi_{(0;T]\setminus\{t_0\}}$ *коректно розв'язна, її розв'язок* $u(t;x)$ *є диференційовною за змінною* t *та нескінченно диференційовною за змінною* x *функцією, для якої виконуються такі умови*:

1) $F[\partial_t u(t;\cdot)] = \partial_t F[u(t;\cdot)],\ t\in(0;T]\setminus\{t_0\}$;

2) $u(t;x) = H(t_0-t)\Big[\big(f-\nu\chi G(t_1,t_0;x)\big)*F^{-1}\big[(1+\nu\theta_0^{t_1}(\xi))^{-1}\big]*G(t,0;x)\Big]+H(t-t_0)\times$
$\times\Big[\big(f*G(t_0,0;x)+\chi\big)*F^{-1}\big[(1+\nu\theta_0^{t_1}(\xi))^{-1}\big]*G(t,t_0;x)\Big],\ (t;x)\in\Pi_{(0;T]\setminus\{t_0\}}$.

5. Висновки. Для $\{\overrightarrow{p};\overrightarrow{h}\}$-параболічних рівнянь з неперервно залежними від часу коефіцієнтами знайдено достатні умови, за яких нелокальна двоточкова за часом задача має єдиний класичний розв'язок у класі узагальнених початкових даних типу розподілів Гельфанда і Шилова. Крім того, встановлено коректну розв'язність цієї задачі із наявним одинарним імпульсом, при цьому окремо розглянуто випадки з імпульсною післядією та переддією щодо моменту контрольного заміру еволюції процесу, що описується вихідним параболічним рівнянням. Ці результати важливі для подальших досліджень параболічних рівнянь із еволюційними умовами загальнішої структури.

Література

1. С. М. Алексеева, Н. И. Юрчук, *Метод квазиобращения для задачи управления начальным условием для уравнения теплопроводности с интегральным краевым условием*, Дифференц. уравнения, **34**, № 4, 495 – 502 (1998).
2. И. А. Белавин, С. П. Капица, С. П. Курдюмов, *Математическая модель глобальных демографических процессов с учетом пространственного распределения*, Журн. вычисл. математики и мат. физики, **38**, № 6, 885 – 902 (1998).
3. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений*, Физматгиз, Москва (1958).
4. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Пространства основных и обобщенных функций*, Физматгиз, Москва (1958).
5. В. В. Городецкий, *Задача Коши для параболических по Шилову уравнений в классах обобщенных периодических функций*, Изв. вузов. Математика, № 5, 82 – 84 (1988).
6. В. В. Городецкий, *О локализации решений задачи Коши для* $\overrightarrow{2b}$*-параболических систем в классах обобщенных функций*, Дифференц. уравнения, **24**, № 2, 348 – 350 (1988).
7. В. В. Городецкий, *Некоторые теоремы о стабилизации решений задачи Коши для параболических по Шилову систем в классах обобщенных функций*, Укр. мат. журн., **40**, № 1, 43 – 48 (1988).
8. В. В. Городецький, Р. І. Колісник, О. В. Мартинюк, *Нелокальна задача для рівнянь з частинними похідними параболчного типу*, Буков. мат. журн., **8**, № 2, 24 – 39 (2020); https://doi.org/10.31861/bmj2020.02.03.
9. С. Д. Эйдельман, *Параболические системы*, Наука, Москва (1964).
10. С. Д. Эйдельман, С. Д. Ивасишен, Ф. О. Порпер, *Теоремы Лиувилля для параболических в смысле Шилова систем*, Изв. вузов. Математика, № 6, 169 – 179 (1961).
11. Я. И. Житомирский, *Задача Коши для некоторых типов параболических по Г. Е. Шилову систем линейных уравнений в частных производных с непрерывными коэффициентами*, Изв. АН СССР. Сер. мат., **23**, 925 – 932 (1959).
12. N. I. Ivanchov, *Boundary value problems for a parabolic equation with integral conditions*, Different. Equat., **40**, 591 – 609 (2004); https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000035796.56467.44.
13. Л. І. Корбут, М. І. Матійчук, *Про зображення розв'язків нелокальних крайових задач для параболічних*, Укр. мат. журн., **46**, № 7, 947 – 951 (1994).
14. V. Litovchenko, *The Cauchy problem for parabolic equations by Shilov*, Sib. Mat. Zh., **45**, № 4, 809 – 821 (2004); DOI: 10.1023/B:SIMJ.0000035831.63036.bb.
15. V. Litovchenko, *Cauchy problem for* $\{\overrightarrow{p};\overrightarrow{h}\}$*-parabolic equations with time-dependent coefficients*, Math. Notes, **77**, № 3-4, 364 – 379 (2005); DOI: 10.1007/s11006-005-0036-9.

16. V. A. Litovchenko, *One method for the investigation of fundamental solution of the Cauchy problem for parabolic systems*, Ukr. Math. J., **70**, 922 – 934 (2018); https://doi.org/10.1007/s11253-018-1542-8.
17. V. A. Litovchenko, *Fundamental solution of the Cauchy problem for $\{\overrightarrow{p};\overrightarrow{h}\}$-parabolic systems with variable coefficients*, J. Math. Sci., **243**, № 2, 230 – 239 (2019); https://doi.org/10.1007/s10958-019-04537-x.
18. V. A. Litovchenko, I. M. Dovzhitska, *The fundamental matrix of solutions of the Cauchy problem for a class of parabolic systems of the Shilov type with variable coefficients*, J. Math. Sci., **175**, № 4, 450 – 476 (2011); DOI: 10.1007/s10958-011-0356-0.
19. V. Litovchenko, I. Dovzhytska, *Cauchy problem for a class of parabolic systems of Shilov type with variable coefficients*, Cent. Eur. J. Math., **10**, № 3, 1084 – 1102 (2012); DOI: 10.2478/s11533-012-0025-7.
20. V. A. Litovchenko, I. M. Dovzhytska, *Stabilization of solutions to Shilov-type parabolic systems with nonnegative genus*, Sib. Mat. J., **55**, № 2, 276 – 283 (2014); https://doi.org/10.1134/S0037446614020104.
21. V. A. Litovchenko, G. M. Unguryan, *Conjugate Cauchy problem for parabolic shilov type systems with nonnegative genus*, Different. Equat., **54**, 335 – 351 (2018); DOI: 10.1134/S0012266118030060.
22. V. Litovchenko, G. Unguryan, *Some properties of Green's functions of Shilov-type parabolic systems*, Miskolc Math. Notes, **20**, № 1, 365 – 379 (2019); DOI: 10.18514/MMN.2019.2089.
23. L. P. Luo, Y. Q. Wang, Z. G. Gong, *New criteria for oscillation of vector parabolic equations with the influence of impulse and delay*, Acta Sci. Natur. Univ. Sunyatseni, **51**, № 2, 45 – 48 (2012).
24. О. В. Мартинюк, *Задача Коші та нелокальні багатоточкові задачі для еволюційних рівнянь першого порядку за часовою змінною: дис. ... д-ра физ.-мат. наук*, Чернівці (2017).
25. М. І. Матійчук, В. М. Лучко, *Задача Коші для параболічних систем з імпульсною дією*, Укр. мат. журн., **58**, № 11, 1525 – 1535 (2006); https://doi.org/10.1007/s11253-006-0165-7.
26. А. М. Нахушев, *Уравнения математической биологии*, Высш. шк., Москва (1995).
27. И. Г. Петровский, *О проблеме Коши для систем уравнений с частными производными в области неаналитических функций*, Бюлл. МГУ. Математика и механика, **1**, № 7, 1 – 72 (1938).
28. I. D. Pukal'skii, B. O. Yashan, *The Cauchy problem for parabolic equations with degeneration*, Adv. Math. Phys., **2020**, Article ID 1245143 (2020), 7 p.; https://doi.org/10.1155/2020/1245143.
29. А. М. Самойленко, М. А. Перестюк, *Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием*, Вища шк., Киев (1987).
30. J. Cannon, Ivan der Hoek, *Diffusion subject to the specification of mass*, J. Math. Anal. and Appl., **115**, № 2, 517 – 529 (1986).
31. J. Chabrowski, *On the non-local problems with a functional for parabolic equation*, Funkcial. Ekvac., **27**, 101 – 123 (1984).
32. В. Е. Слюсарчук, *Общие теоремы о существовании и единственности решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием*, Укр. мат. журн., **52**, № 7, 954 – 964 (2000).
33. А. Фридман, *Уравнения с частными производными параболического типа*, Мир, Москва (1968).
34. В. В. Шелухин, *Нелокальная по времени задача для уравнений динамики баротропного океана*, Сиб. мат. журн., **36**, № 3, 701 – 724 (1995).
35. Г. Е. Шилов, *Об условиях корректности задачи Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами*, Успехи мат. наук., **10**, № 4, 89 – 101 (1955).

Одержано 12.01.21