DOI: 10.37863/umzh.v73i5.6537

УДК 517.935

О. А. Бойчук (Ін-т математики НАН України, Київ),
В. П. Журавльов (Поліс. нац. ун-т, Житомир)

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ З КЕРУВАННЯМ ДЛЯ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ У БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

In this paper, using the generalized inversion theory of operators, we establish a criterion for solvability and the general form of solutions of operator equations with control that are not everywhere solvable and of linear boundary-value problems for such operators in Banach spaces.

Із використанням теорії узагальненого обернення операторів отримано критерій розв'язності і загальний вигляд розв'язків не скрізь розв'язних операторних рівнянь з керуванням та лінійних крайових задач для них у банахових просторах.

Дослідження задач теорії керування, основи якої було закладено у другій половині минулого століття (див., наприклад, монографії [1, 2] та наведену в них бібліографію), є актуальним і сьогодні.

Для дослідження значної кількості задач теорії керування активно використовуються сучасні результати з теорії крайових задач. Наприклад, деякі задачі математичної економіки [3], задачі по оптимальному переведенню системи з одного стану в інший [4, 5], задача оптимального керування з мінімальною енергією на розв'язках параболічного рівняння з розподіленим керуванням та нелокальними крайовими умовами [6], задача існування та побудови програмних керувань у лінійних керованих системах [7] та ін.

Розроблені за останній час методи дослідження крайових задач для не скрізь розв'язних операторних рівнянь у банахових просторах [8] можна застосувати до розв'язання не скрізь розв'язних операторних рівнянь з керуванням та крайових задач для них. Ці методи ґрунтуються на застосуванні проєкторів та узагальненого обернення операторів у банахових просторах.

Із застосуванням проєкторів та псевдообернених матриць в евклідових просторах у [9] отримано умови, при яких нерозв'язну вироджену диференціальну систему з імпульсним впливом можна зробити розв'язною шляхом введення функції керування, у [10] знайдено умови існування і побудовано розв'язки інтегро-диференціальної системи з керуванням та крайової задачі для неї.

Постановка задачі. Нехай $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ — банаховий простір обмежених вектор-функцій $z(t)$, визначених на скінченному проміжку $\mathcal{I}$ зі значеннями у банаховому просторі $\mathbf{B}_1$, $z(\cdot)\colon \mathcal{I} \to \mathbf{B}_1$ з нормою $|||z||| = \sup_{t\in\mathcal{I}} \|z(t)\|_{\mathbf{B}_1}$, $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ — банаховий простір обмежених вектор-функцій $f(t)$, визначених на тому ж проміжку $\mathcal{I}$ зі значеннями у банаховому просторі $\mathbf{B}_2$ з нормою $|||f||| = \sup_{t\in\mathcal{I}} \|f(t)\|_{\mathbf{B}_2}$, $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3)$ — банаховий простір обмежених вектор-функцій $u(t)$, визначених на тому ж проміжку $\mathcal{I}$ зі значеннями у банаховому просторі $\mathbf{B}_3$ з нормою $|||u||| = \sup_{t\in\mathcal{I}} \|u(t)\|_{\mathbf{B}_3}$, $\mathbf{B}$ — банаховий простір векторів зі сталими компонентами.

Розглянемо лінійну крайову задачу з керуванням

$$(Lz)(t) = f(t) + (Hu)(t), \tag{1}$$

$$\ell z(\cdot) = \alpha + Gu(\cdot), \tag{2}$$

де $L\colon \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1) \to \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)$ і $H:\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_3) \to \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)$ — лінійні обмежені оператори, $\ell\colon \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1) \to \mathbf{B}$ і $G\colon \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_3) \to \mathbf{B}$ — лінійні обмежені вектор-функціонали.

Мета цієї роботи полягає в знаходженні умов існування та вигляду загальних розв'язків $z(t)$ рівняння (1) з керуванням та крайової задачі з керуванням (1), (2), а також загального вигляду керувань $u(t)$, при яких такі розв'язки існують.

Розв'язок операторного рівняння з керуванням у банахових просторах. Нехай операторне рівняння без керування

$$(Lz)(t) = f(t) \tag{3}$$

не має розв'язку при довільних $f(t)$.

Розглянемо таку задачу: з'ясувати чи існує керування $u(t)$ таке, щоб операторне рівняння (1) з керуванням стало розв'язним. А якщо існує, то знайти умови існування, загальний вигляд розв'язку та загальний вигляд керування.

Далі для скорочення записів змінну t не будемо писати.

Нехай оператор $L \in \mathbf{GI}\big(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1),\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)\big)$ є узагальнено-оборотним. Узагальнена оборотність оператора L означає [11], що він нормально розв'язний, а його нуль-простір $N(L)$ та ядро $R(L)$ доповнювальні у банахових просторах $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)$ і $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)$ відповідно. При цьому існують [12] обмежені проєктори $\mathcal{P}_{N(L)}:\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1) \to N(L)$, $\mathcal{P}_{Y_L}:\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2) \to Y_L$, де $Y_L = \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2) \ominus R(L)$, та обмежений узагальнено-обернений оператор L^- до оператора L.

Відомо [8], що нормально розв'язне операторне рівняння (1) має розв'язки для тих і лише тих правих частин, які задовольняють умову

$$\mathcal{P}_{Y_L}[f + Hu] = 0. \tag{4}$$

Позначивши $B = \mathcal{P}_{Y_L}H$, з умови (4) отримаємо операторне рівняння

$$Bu = -\mathcal{P}_{Y_L}f \tag{5}$$

відносно керування u. Таким чином, виконання умови (4) залежить від розв'язності рівняння (5).

Керування $u(t)$, які є розв'язками рівняння (5), будемо називати допустимими керуваннями для рівняння (1) у сенсі [7].

Нехай $B \in \mathbf{GI}\big(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_3),\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)\big)$ — узагальнено-оборотний, а отже нормально розв'язний, оператор. Тоді існують [12] обмежені проєктори $\mathcal{P}_{N(B)}\colon \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_3) \to N(B)$, $\mathcal{P}_{Y_B}:\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2) \to Y_B$, де $Y_B = \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2) \ominus R(B)$, та обмежений узагальнено-обернений оператор B^-.

Операторне рівняння (5) має розв'язок тоді і лише тоді, коли виконується умова

$$\mathcal{P}_{Y_B}\mathcal{P}_{Y_L}f = 0, \tag{6}$$

при виконанні якої воно має сім'ю розв'язків

$$u = \mathcal{P}_{N(B)}\hat{u} - B^-\mathcal{P}_{Y_L}f, \tag{7}$$

де $\hat{u}$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_3)$.

Таким чином, для u з (7) умова розв'язності (4) операторного рівняння (1) буде виконуватись, і воно буде мати сім'ю розв'язків

$$z = \mathcal{P}_{N(L)}\hat{z} + L^{-}(f + Hu), \tag{8}$$

де $\hat{z}$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$.

Підставивши у (8) керування u (7), отримаємо загальний розв'язок рівняння (1)

$$z = \mathcal{P}_{N(L)}\hat{z} + L^{-}\Big\{f + H(\mathcal{P}_{N(B)}\hat{u} - B^{-}\mathcal{P}_{Y_L}f)\Big\} =$$

$$= \mathcal{P}_{N(L)}\hat{z} + L^{-}H\mathcal{P}_{N(B)}\hat{u} + L^{-}f - L^{-}HB^{-}\mathcal{P}_{Y_L}f =$$

$$= \big[\mathcal{P}_{N(L)}, L^{-}H\mathcal{P}_{N(B)}\big]\begin{bmatrix}\hat{z}\\ \hat{u}\end{bmatrix} + L^{-}\Big(I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)} - HB^{-}\mathcal{P}_{Y_L}\Big)f.$$

Для скорочення записів позначимо

$$X_1 = \mathcal{P}_{N(L)}, \qquad X_2 = L^{-}H\mathcal{P}_{N(B)}, \qquad \widetilde{H} = I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)} - HB^{-}\mathcal{P}_{Y_L}.$$

Теорема 1. *Нехай лінійні оператори* $L \in \mathbf{GI}\big(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)\big)$ *і* $B \in \mathbf{GI}\big(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)\big)$, *а операторне рівняння без керування* (3) *не має розв'язку при довільних* $f \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$.

Тоді операторне рівняння з керуванням (1) *розв'язне для тих і лише тих* $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, *які задовольняють умову* (6), *при виконанні якої воно має сім'ю розв'язків*

$$z = \big[X_1, X_2\big]\begin{bmatrix}\hat{z}\\ \hat{u}\end{bmatrix} + L^{-}\widetilde{H}f, \tag{9}$$

де $\hat{z} \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, $\hat{u} \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3)$ — *довільні елементи банахових просторів* $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ *і* $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3)$ *відповідно.*

При цьому воно має сім'ю допустимих керувань

$$u = \mathcal{P}_{N(B)}\hat{u} - B^{-}\mathcal{P}_{Y_L}f. \tag{10}$$

Зауваження **1.** Якщо $\mathcal{P}_{N(B)} = 0$, то операторне рівняння (5) буде n-нормальним [13] $(\dim\ker B = 0)$. У цьому випадку при виконанні умови (6) воно буде мати єдиний розв'язок

$$u = -B_l^{-1}\mathcal{P}_{Y_L}f, \tag{11}$$

де B_l^{-1} — лівий обернений оператор [14] до оператора B.

Тоді операторне рівняння (1) буде мати сім'ю розв'язків

$$z = X_1\hat{z} + L^{-}\widetilde{H}f,$$

де $\widetilde{H} = I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)} - HB_l^{-1}\mathcal{P}_{Y_L}$.

При цьому єдине допустиме керування буде мати вигляд (11).

Зауваження **2.** Якщо $\mathcal{P}_{N(B)} = 0$ і $\mathcal{P}_{N(L)} = 0$, то операторні рівняння (1) і (5) будуть n-нормальними [13] $(\dim\ker L = 0,\ \dim\ker B = 0)$. У цьому випадку при виконанні умови (6) рівняння (1) буде мати єдиний розв'язок

$$z = L_l^{-1}\widetilde{H}f$$

при єдиному допустимому керуванню (11).

***Зауваження* 3.** Якщо $\mathcal{P}_{Y_B} = 0$, то операторне рівняння (5) буде d-нормальним [13] $(d = \dim\ker Y_B = 0)$. У цьому випадку умова (6) буде завжди виконуватись, а рівняння буде мати сім'ю розв'язків

$$u = \mathcal{P}_{N(B)}\hat{u} - B_r^{-1}\mathcal{P}_{Y_L} f,$$

де $\hat{u}$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3)$, B_r^{-1} — правий обернений оператор [14] до оператора B.

Тоді операторне рівняння (1) буде скрізь розв'язним і матиме сім'ю розв'язків (9), де $\widetilde{H} = I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)} - HB_r^{-1}\mathcal{P}_{Y_L}$.

Розв'язок крайової задачі з керуванням у банаховому просторі. Підставимо загальний розв'язок (9) операторного рівняння (1) і відповідне допустиме керування (10) у крайову умову (2). В результаті отримаємо

$$\ell z(\cdot) = \Big[\ell X_1,\, \ell X_2\Big]\begin{bmatrix}\hat{z}\\ \hat{u}\end{bmatrix} + \ell L^- \widetilde{H} f =$$
$$= \alpha + G\Big[\mathcal{P}_{N(B)}\hat{u}(\cdot) - B^-\mathcal{P}_{Y_L} f\Big].$$

Позначивши

$$Q_1 = \ell X_1, \qquad Q_1 : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to \mathbf{B},$$
$$Q_2 = \ell X_2 - G\mathcal{P}_{N(B)}, \qquad Q_2 : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3) \to \mathbf{B},$$

після перетворень одержимо

$$\Big[Q_1, Q_2\Big]\begin{bmatrix}\hat{z}\\ \hat{u}\end{bmatrix} = \alpha - \big(\ell L^- \widetilde{H} + GB^-\mathcal{P}_{Y_L}\big) f. \tag{12}$$

Далі постає питання про розв'язність та зображення загального розв'язку рівняння (12) з операторною матрицею $\big[Q_1, Q_2\big]$.

Нехай оператори $Q_1 \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{B})$ і $\widehat{Q}_2 = \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} Q_2 \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3), \mathbf{B})$ — узагальнено-оборотні. Тоді існують обмежені проєктори $\mathcal{P}_{N(Q_1)} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to N(Q_1)$, $\mathcal{P}_{Y_{Q_1}} : \mathbf{B} \to \mathbf{B} \ominus R(Q_1)$, $\mathcal{P}_{N(\widehat{Q}_2)} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3) \to N(\widehat{Q}_2)$ і $\mathcal{P}_{Y_{\widehat{Q}_2}} : \mathbf{B} \to \mathbf{B} \ominus R(\widehat{Q}_2)$ [12], а також обмежені узагальнено-обернені оператори Q_1^-, $\widehat{Q}_2^-$ [8]. У цьому випадку операторна матриця $Q = \big[Q_1, Q_2\big]$ є узагальнено-оборотною [15, с. 545].

Наслідком узагальненої оборотності операторної матриці Q є нормальна розв'язність операторного рівняння (12). Тоді існують обмежені проєктори $\mathcal{P}_{N(Q)} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \times \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3) \to N(Q)$, $\mathcal{P}_{Y_Q} : \mathbf{B} \to Y_Q$ й обмежений узагальнено-обернений оператор $Q^- : \mathbf{B} \to \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \times \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3)$ до оператора Q.

За С. Г. Крейном [13] нормально розв'язне рівняння (12) може бути однозначно розв'язним ($\mathcal{P}_{N(Q)} \equiv 0$), скрізь розв'язним ($\mathcal{P}_{Y_Q} \equiv 0$), неоднозначно і не скрізь розв'язним ($\mathcal{P}_{N(B_0)} \neq 0$, $\mathcal{P}_{Y_Q} \neq 0$).

Розглянемо найбільш загальний випадок, коли рівняння (12) неоднозначно і не скрізь розв'язне, тобто $\mathcal{P}_{N(Q)} \neq 0, \mathcal{P}_{Y_Q} \neq 0$. Оскільки оператор Q нормально розв'язний, то, використовуючи теорему 3 з [15, с. 545] про розв'язність рівняння з операторною матрицею, переконуємося, що рівняння (12) має розв'язок тоді і лише тоді, коли виконується умова [8]

$$\mathcal{P}_{Y_Q}\Big\{\alpha-\big(\ell L^-\widetilde{H}+GB^-\mathcal{P}_{Y_L}\big)f\Big\}=0,$$

при виконанні якої рівняння (12) має сім'ю розв'язків

$$\begin{bmatrix}\hat{z}\\ \hat{u}\end{bmatrix}=\mathcal{P}_{N(Q)}\begin{bmatrix}\bar{z}\\ \bar{u}\end{bmatrix}-Q^-\Big\{\alpha-\big(\ell L^-\widetilde{H}+GB^-\mathcal{P}_{Y_L}\big)f\Big\}, \tag{13}$$

де

$$\mathcal{P}_{Y_Q}=\mathcal{P}_{Y_{\widehat{Q}_2}}\mathcal{P}_{Y_{Q_1}},\qquad \mathcal{P}_{N(Q)}=\begin{bmatrix}\mathcal{P}_{N(Q_1)} & -Q_1^-Q_2\mathcal{P}_{N(\widehat{Q}_2)}\\ 0 & \mathcal{P}_{N(\widehat{Q}_2)}\end{bmatrix}, \tag{14}$$

$$Q^-=\begin{bmatrix}Q_1^- - Q_1^-Q_2\widehat{Q}_2^-\mathcal{P}_{Y_{Q_1}}\\ \widehat{Q}_2^-\mathcal{P}_{Y_{Q_1}}\end{bmatrix} \tag{15}$$

— узагальнено-обернений оператор до оператора $Q,\ \bar{z}\in\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1),\ \bar{u}\in\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_3)$ — довільні елементи.

Позначивши для скорочення записів

$$\widetilde{Q}_1^-=Q_1^- - Q_1^-Q_2\widehat{Q}_2^-\mathcal{P}_{Y_{Q_1}},\qquad \widetilde{Q}_2^-=\widehat{Q}_2^-\mathcal{P}_{Y_{Q_1}}, \tag{16}$$

розв'язок (13) запишемо у вигляді

$$\begin{bmatrix}\hat{z}\\ \hat{u}\end{bmatrix}=\mathcal{P}_{N(Q)}\begin{bmatrix}\bar{z}\\ \bar{u}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\widetilde{Q}_1^-\\ \widetilde{Q}_2^-\end{bmatrix}\Big\{\alpha-\big(\ell L^-\widetilde{H}+GB^-\mathcal{P}_{Y_L}\big)f\Big\}. \tag{17}$$

Підставивши (17) у (9), будемо мати

$$z=\Big[X_1,X_2\Big]\left\{\mathcal{P}_{N(Q)}\begin{bmatrix}\bar{z}\\ \bar{u}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\widetilde{Q}_1^-\\ \widetilde{Q}_2^-\end{bmatrix}\Big[\alpha-\big(\ell L^-\widetilde{H}+GB^-\mathcal{P}_{Y_L}\big)f\Big]\right\}+L^-\widetilde{H}f.$$

Після перетворень отримаємо загальний розв'язок крайової задачі з керуванням (1), (2) у вигляді

$$z=\Big[X_1,X_2\Big]\mathcal{P}_{N(Q)}\begin{bmatrix}\bar{z}\\ \bar{u}\end{bmatrix}+\Big(X_1\widetilde{Q}_1^- - X_2\widetilde{Q}_2^-\Big)\alpha-$$

$$-\Big(X_1\widetilde{Q}_1^- + X_2\widetilde{Q}_2^-\Big)\big(\ell L^-\widetilde{H}+GB^-\mathcal{P}_{Y_L}\big)f+L^-\widetilde{H}f,$$

де $\bar{z}\in\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)$ $\bar{u}\in\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_3)$ — довільні елементи.

Врахувавши (14), із рівняння (17), яке буде мати вигляд

$$\begin{bmatrix}\hat{z}\\ \hat{u}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathcal{P}_{N(Q_1)} & -Q_1^-Q_2\mathcal{P}_{N(\widehat{Q}_2)}\\ 0 & \mathcal{P}_{N(\widehat{Q}_2)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{z}\\ \bar{u}\end{bmatrix}-$$

$$-\begin{bmatrix}\widetilde{Q}_1^-\\ \widetilde{Q}_2^-\end{bmatrix}\Big\{\alpha-\big(\ell L^-\widetilde{H}+GB^-\mathcal{P}_{Y_L}\big)f\Big\},$$

знайдемо елемент $\hat{u}$:

$$\hat{u} = \mathcal{P}_{N(\widehat{Q}_2)}\bar{u} + \widetilde{Q}_2^{-}\Big\{\alpha - \big(\ell L^{-}\widetilde{H} + GB^{-}\mathcal{P}_{Y_L}\big)f\Big\}. \tag{18}$$

Підставивши $\hat{u}$ з (18) у (7), отримаємо сім'ю допустимих керувань для крайової задачі (1), (2):

$$u = \mathcal{P}_{N(B)}\Big[\mathcal{P}_{N(\widehat{Q}_2)}\bar{u} + \widetilde{Q}_2^{-}\Big\{\alpha - \big(\ell L^{-}\widetilde{H} + GB^{-}\mathcal{P}_{Y_L}\big)f\Big\}\Big] - B^{-}\mathcal{P}_{Y_L}f =$$
$$= \mathcal{P}_{N(B)}\mathcal{P}_{N(\widehat{Q}_2)}\bar{u} + \mathcal{P}_{N(B)}\widetilde{Q}_2^{-}\alpha - \mathcal{P}_{N(B)}\widetilde{Q}_2^{-}\big(\ell L^{-}\widetilde{H} + GB^{-}\mathcal{P}_{Y_L}\big)f - B^{-}\mathcal{P}_{Y_L}f,$$

де $\bar{u} \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3)$ — довільний елемент.

Теорема 2. *Нехай лінійні оператори* $L \in \mathbf{GI}\big(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)\big)$ *і* $B \in \mathbf{GI}\big(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)\big)$.

Тоді якщо оператори $Q_1 \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{B})$ *і* $\widehat{Q}_2 \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3), \mathbf{B})$, *то крайова задача з керуванням* (1), (2) *розв'язна для тих і лише тих* $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ *й* $\alpha \in \mathbf{B}$, *які задовольняють систему умов*

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}_{Y_B}\mathcal{P}_{Y_L}f = 0, \\ &\mathcal{P}_{Y_{\widehat{Q}_2}}\mathcal{P}_{Y_{Q_1}}\Big[\alpha - \big(\ell L^{-}\widetilde{H} + GB^{-}\mathcal{P}_{Y_L}\big)f\Big] = 0, \end{aligned} \tag{19}$$

при виконанні яких вона має сім'ю розв'язків

$$z = \Big[X_1, X_2\Big]\mathcal{P}_{N(Q)}\begin{bmatrix}\bar{z}\\ \bar{u}\end{bmatrix} + \Big(X_1\widetilde{Q}_1^{-} + X_2\widetilde{Q}_2^{-}\Big)\alpha +$$
$$+ L^{-}\widetilde{H}f - \Big(X_1\widetilde{Q}_1^{-} + X_2\widetilde{Q}_2^{-}\Big)\big(\ell L^{-}\widetilde{H} + GB^{-}\mathcal{P}_{Y_L}\big)f,$$

де $\bar{z} \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, $\bar{u} \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3)$ *— довільні елементи.*

При цьому вона має сім'ю допустимих керувань

$$u = \mathcal{P}_{N(B)}\mathcal{P}_{N(\widehat{Q}_2)}\bar{u} + \mathcal{P}_{N(B)}\widetilde{Q}_2^{-}\alpha -$$
$$- \mathcal{P}_{N(B)}\widetilde{Q}_2^{-}\big(\ell L^{-}\widetilde{H} + GB^{-}\mathcal{P}_{Y_L}\big)f - B^{-}\mathcal{P}_{Y_L}f.$$

***Зауваження* 4.** Якщо $\mathcal{P}_{N(Q)} = 0$, то крайова задача (1), (2) буде n-нормальною [13] $(\dim\ker Q = 0)$. З формули (14) випливає, що цей випадок можливий, якщо $\mathcal{P}_{N(Q_1)} = 0$ і $\mathcal{P}_{N(\widehat{Q}_2)} = 0$. Тоді при виконанні системи умов (19) крайова задача (1), (2) має єдиний розв'язок

$$z = \Big(X_1\widetilde{Q}_1^{-} + X_2\widetilde{Q}_2^{-}\Big)\alpha + L^{-}\widetilde{H}f - \Big(X_1\widetilde{Q}_1^{-} + X_2\widetilde{Q}_2^{-}\Big)\Big[\ell L^{-}\widetilde{H} + GB^{-}\mathcal{P}_{Y_L}\Big]f.$$

При цьому вона має єдине допустиме керування

$$u = \mathcal{P}_{N(B)}\widetilde{Q}_2^{-}\alpha - \mathcal{P}_{N(B)}\widetilde{Q}_2^{-}\Big[\ell L^{-}\widetilde{H} + GB^{-}\mathcal{P}_{Y_L}\Big]f - B^{-}\mathcal{P}_{Y_L}f.$$

Особливі випадки крайових задач із керуванням. Далі розглянемо два особливих випадки: 1) операторне рівняння (1) скрізь розв'язне ($\mathcal{P}_{Y_L} = 0$) і 2) операторне рівняння (1) однозначно розв'язне ($\mathcal{P}_{N(L)} = 0$).

1. Нехай оператор L є узагальнено-оборотним і $\mathcal{P}_{Y_L} = 0$. Тоді операторне рівняння (1) d-нормальне $(\dim Y_L = 0)$, скрізь розв'язне. Тому умови (4) і (6) будуть завжди виконуватись.

У цьому випадку оператор H можна покласти рівним нулю, оскільки керування u не впливає на розв'язність рівняння (1). Але воно може вплинути на розв'язність крайової задачі (1), (2).

Оскільки $\mathcal{P}_{Y_L} = 0$, то оператор $B = \mathcal{P}_{Y_L} H \equiv 0$. Це означає, що $\mathcal{P}_{N(B)} = I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_3)}$. Тоді з формули (7) випливає, що керування $u(t) = \hat{u}(t)$, де $\hat{u}(t)$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3)$.

У цьому випадку рівняння (1) буде мати сім'ю розв'язків

$$z = \mathcal{P}_{N(L)}\hat{z} + L_r^{-1}\Big[f + H\hat{u}\Big] = \Big[X_1, X_2\Big]\begin{bmatrix}\hat{z}\\ \hat{u}\end{bmatrix} + L_r^{-1}f, \tag{20}$$

де $X_1 = \mathcal{P}_{N(L)}$, $X_2 = L_r^{-1}H$, $\hat{z} \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ і $\hat{u} \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3)$ — довільні елементи, L_r^{-1} — правий обернений оператор до оператора L, конструкцію якого наведено у [14].

Підставивши розв'язок (20) у крайову умову (2), отримаємо операторне рівняння відносно $\hat{z}$, $\hat{u}$:

$$\ell z = \Big[\ell X_1, \ell X_2\Big]\begin{bmatrix}\hat{z}\\ \hat{u}\end{bmatrix} + \ell L_r^{-1}f = \alpha + G\hat{u}(\cdot). \tag{21}$$

З рівняння (21) одержимо

$$Q\begin{bmatrix}\hat{z}\\ \hat{u}\end{bmatrix} = \alpha - \ell L_r^{-1}f, \tag{22}$$

де $Q = \big[Q_1, Q_2\big]$,

$$Q_1 = \ell\mathcal{P}_{N(L)}, \qquad Q_2 = \ell L_r^{-1}H - G. \tag{23}$$

Нехай оператори $Q_1 \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{B})$ і $\widehat{Q}_2 \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3), \mathbf{B})$ узагальнено-оборотні, а отже, операторне рівняння (22) є нормально розв'язним.

Рівняння (22) розв'язне для тих і лише тих правих частин, які задовольняють умову [8]

$$\mathcal{P}_{Y_Q}\big\{\alpha - \ell L_r^{-1}f\big\} = 0, \tag{24}$$

при виконанні якої воно має сім'ю розв'язків

$$\begin{bmatrix}\hat{z}\\ \hat{u}\end{bmatrix} = \mathcal{P}_{N(Q)}\begin{bmatrix}\bar{z}\\ \bar{u}\end{bmatrix} - Q^{-}\big\{\alpha - \ell L_r^{-1}f\big\}, \tag{25}$$

де $\mathcal{P}_{N(Q)}$, $\mathcal{P}_{Y_Q}$, Q^- визначені рівностями (14), (15).

Підставивши (25) у (20), отримаємо

$$z = \big[X_1, X_2\big]\left\{\mathcal{P}_{N(Q)}\begin{bmatrix}\bar{z}\\ \bar{u}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\widetilde{Q}_1^-\\ \widetilde{Q}_2^-\end{bmatrix}\Big(\alpha - \ell L_r^{-1}f\Big)\right\} + L_r^{-1}f,$$

де $\widetilde{Q}_1^-$ і $\widetilde{Q}_2^-$ визначені рівностями (16).

Після перетворень отримаємо загальний розв'язок крайової задачі (1), (2) у вигляді

$$z = \Big[X_1, X_2\Big]\mathcal{P}_{N(Q)}\begin{bmatrix}\bar{z}\\ \bar{u}\end{bmatrix} - \Big(X_1\widetilde{Q}_1^- + X_2\widetilde{Q}_2^-\Big)\alpha + \Big(X_1\widetilde{Q}_1^- + X_2\widetilde{Q}_2^-\Big)\ell L_r^{-1} f + L_r^{-1} f. \tag{26}$$

З рівняння (25), яке з урахуванням (14) і (15) набере вигляду

$$\begin{bmatrix}\hat{z}\\ \hat{u}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathcal{P}_{N(Q_1)} & -Q_1^- Q_2 \mathcal{P}_{N(\widehat{Q}_2)}\\ 0 & \mathcal{P}_{N(\widehat{Q}_2)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{z}\\ \bar{u}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\widetilde{Q}_1^-\\ \widetilde{Q}_2^-\end{bmatrix}\big\{\alpha - \ell L_r^{-1} f\big\}, \tag{27}$$

знайдемо загальний вигляд керування u, при якому крайова задача (1), (2) буде розв'язною:

$$u = \mathcal{P}_{N(\widehat{Q}_2)}\bar{u} - \widehat{Q}_2\big[\alpha - \ell L_r^{-1} f\big], \tag{28}$$

де $\bar{u} \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3)$ — довільний елемент.

Теорема 3. *Нехай лінійний оператор* $L \in \mathbf{GI}\big(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)\big)$ *є* d*-номальним* $(d = \dim Y_L = 0)$.

Тоді якщо оператори $Q_1 \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{B})$ *і* $Q_2 \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3), \mathbf{B})$ (23) *узагальнено-оборотні, то крайова задача з керуванням* (1), (2) *розв'язна для тих і лише тих* $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ *й* $\alpha \in \mathbf{B}$, *які задовольняють умову*

$$\mathcal{P}_{Y_{\widehat{Q}_2}}\mathcal{P}_{Y_{Q_1}}\big[\alpha - \ell L_r^{-1} f\big] = 0,$$

при виконанні якої вона має сім'ю розв'язків (26).

При цьому вона має сім'ю допустимих керувань (28).

2. Нехай оператор L є узагальнено-оборотним і $\mathcal{P}_{N(L)} = 0$. Тоді операторне рівняння (1) n-нормальне $(\dim N(L) = 0)$, однозначно розв'язне і при виконанні умови

$$\mathcal{P}_{Y_L}[f + Hu] = 0 \tag{29}$$

має єдиний розв'язок

$$z = L_l^{-1}[f + Hu], \tag{30}$$

де L_l^{-1} — лівий обернений оператор до оператора L, конструкцію якого наведено у [14].

З умови (29) знайдемо керування u, при якому операторне рівняння (1) буде мати розв'язок.

З (29) отримаємо операторне рівняння

$$Bu = -\mathcal{P}_{Y_L} f, \tag{31}$$

де $B = \mathcal{P}_{Y_L} H$.

Нехай оператор $B \in \mathbf{GI}\big(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)\big)$ є узагальнено-оборотним.

Операторне рівняння (31) має розв'язок тоді і лише тоді, коли виконується умова

$$\mathcal{P}_{Y_B}\mathcal{P}_{Y_L} f = 0, \tag{32}$$

при виконанні якої воно має сім'ю розв'язків

$$u = \mathcal{P}_{N(B)}\hat{u} - B^-\mathcal{P}_{Y_L} f, \tag{33}$$

де $\hat{u}$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3)$, B^- — обмежений узагальнено-оборотний оператор до оператора B.

Підставивши (33) у (30), отримаємо загальний розв'язок операторного рівняння (1) у вигляді

$$z = L_l^{-1}\left[f + H\Big(\mathcal{P}_{N(B)}\hat{u} - B^-\mathcal{P}_{Y_L}f\Big)\right] = X_2\hat{u} + L_l^{-1}\widetilde{H}f, \tag{34}$$

де $X_2 = L_l^{-1}H\mathcal{P}_{N(B)}$ $\widetilde{H} = I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)} - HB^-\mathcal{P}_{Y_L}$.

Підставивши розв'язок (34) та керування (33) у крайову умову (2), одержимо операторне рівняння відносно $\hat{u}$:

$$\ell z(\cdot) = \ell X_2\hat{u}(\cdot) + \ell L_l^{-1}\widetilde{H}f = \alpha + G\Big[\mathcal{P}_{N(B)}\hat{u}(\cdot) - B^-\mathcal{P}_{Y_L}f\Big].$$

Після перетворень отримаємо операторне рівняння

$$Q_2\hat{u} = \alpha - \left[\ell L_l^{-1}\widetilde{H} + GB^-\mathcal{P}_{Y_L}\right]f, \tag{35}$$

де $Q_2 = \ell X_2 - G\mathcal{P}_{N(B)}$.

Нехай оператор $Q_2 \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3), \mathbf{B})$ є узагальнено-оборотним, а отже, операторне рівняння (35) нормально розв'язне.

Рівняння (35) розв'язне для тих і лише тих правих частин, які задовольняють умову [8]

$$\mathcal{P}_{Y_{Q_2}}\left[\alpha - \Big(\ell L_l^{-1}\widetilde{H} + GB^-\mathcal{P}_{Y_L}\Big)f\right] = 0,$$

при виконанні якої воно має сім'ю розв'язків

$$\hat{u} = \mathcal{P}_{N(Q_2)}\bar{u} + Q_2^-\alpha - Q_2^-\left[\ell L_l^{-1}\widetilde{H} + GB^-\mathcal{P}_{Y_L}\right]f, \tag{36}$$

де $\bar{u}$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3)$.

Підставивши (36) у (34), одержимо

$$z = X_2\left\{\mathcal{P}_{N(Q_2)}\bar{u} + Q_2^-\left[\alpha - \Big(\ell L_l^{-1}\widetilde{H} + GB^-\mathcal{P}_{Y_L}\Big)f\right]\right\} + L_l^{-1}\widetilde{H}f.$$

Після перетворень отримаємо загальний розв'язок крайової задачі (1), (2) у вигляді

$$z = X_2\mathcal{P}_{N(Q_2)}\bar{u} + X_2Q_2^-\alpha - X_2Q_2^-\left[\ell L_l^{-1}\widetilde{H} + GB^-\mathcal{P}_{Y_L}\right]f + L_l^{-1}\widetilde{H}f, \tag{37}$$

де $\bar{u} \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3)$ — довільний елемент.

Теорема 4. *Нехай* $L \in \mathbf{GI}\big(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)\big)$ *— узагальнено-оборотний* n*-нормальний* $(n = \dim N(L) = 0)$ *оператор, а* $B \in \mathbf{GI}\big(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)\big)$.

Тоді якщо оператор $Q_2 \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3), \mathbf{B})$ *узагальнено-оборотний, то крайова задача з керуванням* (1), (2) *розв'язна для тих і лише тих* $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ *й* $\alpha \in \mathbf{B}$*, які задовольняють систему умов*

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}_{Y_B}\mathcal{P}_{Y_L}f = 0, \\ &\mathcal{P}_{Y_{Q_2}}\left[\alpha - \Big(\ell L_l^{-1}\widetilde{H} + GB^-\mathcal{P}_{Y_L}\Big)f\right] = 0, \end{aligned} \tag{38}$$

при виконанні яких вона має сім'ю розв'язків (37).

При цьому вона має сім'ю допустимих керувань (36).

Цікавими є ще два „крайніх" випадки, коли в рамках п. 2 $(\dim N(L) = 0)$ операторне рівняння (31) буде n-нормальним $(\dim \ker B = 0)$ або d-нормальним $(\dim \ker Y_B = 0)$.

Нехай $\mathcal{P}_{N(B)} = 0$, тоді операторне рівняння (31) буде n-нормальним $(n = \dim \ker B = 0)$. У цьому випадку при виконанні умови (32) воно буде мати єдиний розв'язок

$$u = -B_l^{-1}\mathcal{P}_{Y_L}f, \tag{39}$$

де B_l^{-1} — лівий обернений оператор [14] до оператора B. При цьому операторне рівняння (1) теж буде мати єдиний розв'язок

$$z = L_l^{-1}\Big[f - HB_l^{-1}\mathcal{P}_{Y_L}f\Big] = L_l^{-1}\widetilde{H}f. \tag{40}$$

Підставивши розв'язок (40) і керування (39) у крайову умову (2), отримаємо жорстку умову на параметри крайової задачі

$$\ell L_r^{-1}\widetilde{H}f = \alpha - GB_l^{-1}\mathcal{P}_{Y_L}f,$$

або

$$\Big[\ell L_l^{-1}\widetilde{H} + GB_l^{-1}\mathcal{P}_{Y_L}\Big]f = \alpha.$$

Для цього випадку теорему 4 можна сформулювати таким чином.

Теорема 5. *Нехай* $L \in \mathbf{GI}\big(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)\big)$ *і* $B \in \mathbf{GI}\big(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)\big)$ — *узагальнено-оборотні* n*-нормальні* $(\dim N(L) = 0)$, $(\dim N(B) = 0)$ *оператори.*

Тоді крайова задача з керуванням (1), (2) *розв'язна для тих і лише тих* $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ *й* $\alpha \in \mathbf{B}$, *які задовольняють систему умов*

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}_{Y_B}\mathcal{P}_{Y_L}f = 0, \\ &\alpha - \Big(\ell L_l^{-1}\widetilde{H} + GB^{-}\mathcal{P}_{Y_L}\Big)f = 0, \end{aligned}$$

при виконанні яких вона має єдиний розв'язок

$$z = L_l^{-1}\widetilde{H}f$$

і єдине допустиме керування

$$u = -B_l^{-1}\mathcal{P}_{Y_L}f.$$

Нехай $\mathcal{P}_{Y_B} = 0$. Тоді операторне рівняння (31) буде скрізь розв'язним d-нормальним $(d = \dim \ker Y_B = 0)$. У цьому випадку умова розв'язності (32) буде завжди виконуватись і операторне рівняння (31) буде мати сім'ю розв'язків

$$u = \mathcal{P}_{N(B)}\hat{u} + B_r^{-1}\mathcal{P}_{Y_L}f,$$

де $\hat{u}$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3)$, B_r^{-1} — обмежений правий обернений оператор [14] до оператора B.

Теорема 6. *Нехай* $L \in \mathbf{GI}\big(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)\big)$ *— узагальнено-оборотний* n*-нормальний* ($n = \dim N(L) = 0$) *оператор, а* $B \in \mathbf{GI}\big(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)\big)$ *— узагальнено-оборотний* d*-нормальний* ($d = \dim Y_B = 0$) *оператор.*

Тоді якщо оператор $Q_2 \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3), \mathbf{B})$ *узагальнено-оборотний, то крайова задача з керуванням* (1), (2) *розв'язна для тих і лише тих* $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ *й* $\alpha \in \mathbf{B}$, *які задовольняють умову*

$$\mathcal{P}_{Y_{Q_2}}\Big[\alpha - \Big(\ell L_l^{-1}\widetilde{H} + GB_r^{-1}\mathcal{P}_{Y_L}\Big)f\Big] = 0,$$

при виконанні якої вона має сім'ю розв'язків

$$z = X_2\mathcal{P}_{N(Q_2)}\bar{u} + X_2Q_2^-\alpha - X_2Q_2^-\Big[\ell L_l^{-1}\widetilde{H} + GB_r^{-1}\mathcal{P}_{Y_L}\Big]f + L_l^{-1}\widetilde{H}f,$$

де $\bar{u} \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3)$ *— довільний елемент.*

При цьому вона має сім'ю допустимих керувань

$$\hat{u} = \mathcal{P}_{N(Q_2)}\bar{u} + Q_2^-\alpha - Q_2^-\Big[\ell L_l^{-1}\widetilde{H} + GB_r^{-1}\mathcal{P}_{Y_L}\Big]f.$$

Розв'язок нетерового операторного рівняння з керуванням у евклідових просторах. У випадку, коли крайова задача з керуванням розглядається в евклідовому просторі, отримані результати для банахових просторів можна уточнити та конкретизувати.

Розглянемо крайову задачу з керуванням

$$(Lz)(t) = f(t) + (Hu)(t), \tag{41}$$

$$\ell z(\cdot) = \alpha + Gu(\cdot), \tag{42}$$

де $L\colon \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n) \to \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^m)$, $H\colon \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^{n_1}) \to \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^m)$ — лінійні обмежені нетерові оператори, які діють у просторах сумовних із квадратом функцій, $f(t) \in \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^m)$, $\ell\colon \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}^{m_1}$, $G\colon \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^{n_1}) \to \mathbf{R}^{m_1}$ — лінійні обмежені вектор-функціонали, $\alpha \in \mathbf{R}^{m_1}$.

Оскільки простори $\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ і $\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^m)$ є гільбертовими, то в них до нетерового оператора L існує єдиний псевдообернений оператор L^+, а також існують ортопроєктори $P_{N(L)}\colon \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n) \to N(L)$ і $P_{N(L^*)}\colon \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^m) \to N(L^*)$ на нуль-простори $N(L)$ і $N(L^*)$. Для побудови ортопроєкторів можна використати формулу (2.2.14) [8, с. 61].

Розв'язок та керування будемо шукати у класі функцій $z \in \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^m)$, $u \in \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^{n_1})$.

Позначимо через $X_p = P_{N_p(L)}$ $(n \times p)$-вимірну матрицю, яку складено з p лінійно незалежних стовпців матриці-ортопроєктора $P_{N(L)}$, де $p = \dim\ker L < \infty$, а через $P_{N_q(L^*)}$ $(q \times m)$-вимірну матрицю, яку складено з q лінійно незалежних рядків матриці-ортопроєктора $P_{N(L^*)}$, де $q = \dim\ker L^* < \infty$. Оскільки оператор L нетеровий, то $p \neq q$.

Використавши теорему 4.5.1 [8, с. 140] про розв'язність нетерового операторного рівняння, переконаємося, що рівняння (1) розв'язне для тих і лише тих $f(t) \in \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^m)$, які задовольняють q лінійно незалежних умов

$$P_{N_q(L^*)}[f + Hu] = 0, \tag{43}$$

і при цьому має p-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків

$$z = X_pc_p + L^+[f + Hu], \tag{44}$$

де c_p — довільний вектор евклідового простору $\mathbf{R}^p$.

З (43) отримаємо рівняння

$$Bu = -P_{N_q(L^*)} f, \tag{45}$$

де $B = P_{N_q(L^*)} H$.

Нехай оператор $B : \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^{n_1}) \to \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^q)$ нетеровий. Тоді для нього існує єдиний псевдообернений оператор B^+, а також існують ортопроєктори $P_{N(B)} : \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^{n_1}) \to N(B)$ і $P_{N(B^*)} : \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^q) \to N(B^*)$ на нуль-простори $N(B)$ і $N(B^*)$ відповідно.

Позначимо через $U_k = P_{N_k(B)}$ $(n_1 \times k)$-вимірну матрицю, яку складено з k лінійно незалежних базисних векторів нуль-простору $N(B)$ оператора B, де $k = \dim\ker B < \infty$, а через $P_{N_s(B^*)}$ $(s \times q)$-вимірну матрицю, яку складено з s лінійно незалежних базисних векторів нуль-простору $N(B^*)$, $\dim\ker N(B^*) = s < \infty$, $k \neq s$.

Рівняння (45) розв'язне для тих і лише тих $f \in \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^m)$, які задовольняють s лінійно незалежних умов

$$P_{N_s(B^*)} P_{N_q(L^*)} f = 0, \tag{46}$$

і при цьому має k-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків

$$u = U_k c_k - B^+ P_{N_q(L^*)} f, \tag{47}$$

де c_k — довільний вектор евклідового простору $\mathbf{R}^k$.

Підставивши (47) у (44), отримаємо

$$z = \big[X_p, \widetilde{U}_k\big] \begin{bmatrix} c_p \\ c_k \end{bmatrix} + L^+ \widetilde{H} f, \tag{48}$$

де $\widetilde{U}_k = L^+ H U_k$, $\widetilde{H} = I_{\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^m)} - H B^+ P_{N_q(L^*)}$.

Тоді справедливою є така теорема.

Теорема 7. *Нехай лінійні оператори L і B нетерові і* $\dim\ker L = p$, $\dim\ker B = k$.

Тоді операторне рівняння з керуванням (1) *розв'язне для тих і лише тих* $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, *які задовольняють умову* (46), *при виконанні якої воно має* $(c_p + c_k)$*-параметричну сім'ю розв'язків* (48).

При цьому воно має c_k-параметричну сім'ю лінійно незалежних допустимих керувань (47).

Крайові задачі з керуванням в евклідових просторах. Підставимо розв'язок (48) у крайову умову (42). В результаті отримаємо алгебраїчне рівняння відносно довільних сталих $c_p \in \mathbf{R}^p$ і $c_k \in \mathbf{R}^k$:

$$\big[Q_1, Q_2\big] \begin{bmatrix} c_p \\ c_k \end{bmatrix} = \alpha - \big(\ell L^+ \widetilde{H} + G B^+ P_{N_q(L^*)}\big) f, \tag{49}$$

де $Q = \big[Q_1, Q_2\big]$ — $\big(m \times (p+k)\big)$-вимірна стала матриця, $Q_1 = \ell X_p(\cdot)$ — $(m \times p)$-вимірна стала матриця, а $Q_2 = \ell U_k(\cdot) - G U_k(\cdot)$ — $(m \times k)$-вимірна стала матриця.

Як було показано раніше, рівняння з операторною матрицею (49) має розв'язок тоді і лише тоді, коли виконується умова [8]

$$P_{N(Q^*)} \Big\{ \alpha - \big(\ell L^+ \widetilde{H} + G B^+ P_{N_q(L^*)}\big) f \Big\} = 0,$$

при виконанні якої воно має сім'ю розв'язків

$$\begin{bmatrix} c_p \\ c_k \end{bmatrix} = \mathcal{P}_{N(Q)} \begin{bmatrix} \bar{c}_p \\ \bar{c}_k \end{bmatrix} + Q^- \alpha - Q^- \big(\ell L^+ \widetilde{H} + GB^+ P_{N_q(L^*)}\big) f, \qquad (50)$$

де $P_{N(Q^*)} = P_{N(\widehat{Q}_2^*)} P_{N(Q_1^*)}$ — $(m \times m)$-вимірна матриця-ортопроєктор,

$$\mathcal{P}_{N(Q)} = \begin{bmatrix} P_{N(Q_1)} & -Q_1^+ Q_2 P_{N(\widehat{Q}_2)} \\ 0 & P_{N(\widehat{Q}_2)} \end{bmatrix} \qquad (51)$$

— $\big((p+k) \times (p+k)\big)$-вимірна матриця-проєктор,

$$Q^- = \begin{bmatrix} Q_1^+ - Q_1^+ Q_2 \widehat{Q}_2^+ P_{N(Q_1^*)} \\ \widehat{Q}_2^+ P_{N(Q_1^*)} \end{bmatrix} \qquad (52)$$

— $((p+k) \times m)$-вимірна узагальнено-обернена матриця до матриці Q [15, с. 545], $\bar{c}_p \in \mathbf{R}^p$, $\bar{c}_k \in \in \mathbf{R}^k$ — довільні вектори. Зауважимо, що у формулі (51) проєктор $\mathcal{P}_{N(Q)}$ не є ортопроєктором, а у формулі (52) матриця Q^- узагальнено-обернена (не псевдообернена).

Позначивши

$$\widetilde{Q}_1^- = Q_1^+ - Q_1^+ Q_2 \widehat{Q}_2^+ P_{N(Q_1^*)}, \qquad \widetilde{Q}_2^- = \widehat{Q}_2^+ P_{N(Q_1^*)}$$

і врахувавши (51), запишемо розв'язок (50) у вигляді

$$\begin{bmatrix} c_p \\ c_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{N(Q_1)} & -Q_1^+ Q_2 P_{N(\widehat{Q}_2)} \\ 0 & P_{N(\widehat{Q}_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{c}_p \\ \bar{c}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widetilde{Q}_1^- \\ \widetilde{Q}_2^- \end{bmatrix} \Big\{ \alpha - \big(\ell L^+ \widetilde{H} + GB^+ P_{N_q(L^*)}\big) f \Big\}.$$

Нехай $\operatorname{rank} Q_1 = d_1$, $\operatorname{rank} \widehat{Q}_2 = d_2$. Позначимо через $P_{N_\mu(Q_1)}$ $(p \times \mu)$-вимірну матрицю, яку складено з $\mu = p - d_1$ лінійно незалежних стовпців матриці-ортопроєктора $P_{N(Q_1)}$, через $P_{N_\nu(\widehat{Q}_2)}$ $(k \times \nu)$-вимірну матрицю, яку складено з $\nu = k - d_2$ лінійно незалежних стовпців матриці-ортопроєктора $P_{N(\widehat{Q}_2)}$, а через $P_{N_\lambda(Q^*)}$ $(\lambda \times m)$-вимірну матрицю, яку складено з $\lambda = m - \operatorname{rank} Q$ лінійно незалежних рядків матриці-ортопроєктора $P_{N(Q^*)}$.

Тоді алгебраїчне рівняння (49) має розв'язки для тих і лише тих α і f, які задовольняють λ лінійно незалежних умов [8]

$$P_{N_\lambda(Q^*)} \Big[\alpha - \big(\ell L^+ \widetilde{H} + GB^+ P_{N_q(L^*)}\big) f \Big] = 0,$$

при виконанні яких воно має $(\mu + \nu)$-параметричну сім'ю розв'язків

$$\begin{bmatrix} c_p \\ c_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{N_\mu(Q_1)} & -Q_1^+ Q_2 P_{N_\nu(\widehat{Q}_2)} \\ 0 & P_{N_\nu(\widehat{Q}_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\mu \\ c_\nu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widetilde{Q}_1^- \\ \widetilde{Q}_2^- \end{bmatrix} \Big\{ \alpha - \big(\ell L^+ \widetilde{H} + GB^+ P_{N_q(L^*)}\big) f \Big\}, \qquad (53)$$

де c_μ — довільний вектор з евклідового простору R^μ, c_ν — довільний вектор з евклідового простору R^ν.

Підставивши (53) у (48), отримаємо загальний розв'язок крайової задачі (41), (42):

$$z = \big[X_p, \widetilde{U}_k\big] \left[\begin{bmatrix} P_{N_\mu(Q_1)} & -Q_1^+ Q_2 P_{N_\nu(\widehat{Q}_2)} \\ 0 & P_{N_\nu(\widehat{Q}_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\mu \\ c_\nu \end{bmatrix} + \right.$$

$$+\begin{bmatrix}\widetilde{Q}_1^-\\ \widetilde{Q}_2^-\end{bmatrix}\Big\{\alpha-\big(\ell L^+\widetilde{H}+GB^+P_{N_q(L^*)}\big)f\Big\}\Bigg]+L^+\widetilde{H}f.$$

Після перетворень одержимо

$$z=\Big[X_\mu,\widetilde{U}_\nu\Big]\begin{bmatrix}c_\mu\\ c_\nu\end{bmatrix}+(X_p\widetilde{Q}_1^-+\widetilde{U}_k\widetilde{Q}_2^-)\alpha+$$
$$+L^+\widetilde{H}f-(X_p\widetilde{Q}_1^-+\widetilde{U}_k\widetilde{Q}_2^-)\big(\ell L^+\widetilde{H}+GB^+P_{N_q(L^*)}\big)f,$$

де $X_\mu=X_pP_{N_\mu(Q_1)}$ — $(n\times\mu)$-вимірна матриця, а $\widetilde{U}_k=\big[-X_pQ_1^+Q_2+\widetilde{U}_k\big]P_{N_\nu(\widehat{Q}_2)}$ — $(k\times\nu)$-вимірна матриця.

З рівняння (53) знайдемо елемент c_k:

$$c_k=P_{N_\nu(\widehat{Q}_2)}c_\nu+\widetilde{Q}_2^-\Big\{\alpha-\big(\ell L^+\widetilde{H}+GB^+P_{N_q(L^*)}\big)f\Big\}. \tag{54}$$

Підставивши c_k з (54) у (47), отримаємо ν-параметричну сім'ю лінійно незалежних допустимих керувань для крайової задачі (41), (42):

$$u=U_\nu c_\nu+U_k\widetilde{Q}_2^-\Big\{\alpha-\big(\ell L^+\widetilde{H}+GB^+P_{N_q(L^*)}\big)f\Big\}-B^+P_{N_q(L^*)}f,$$

де $U_\nu=U_kP_{N_\nu}$, $c_\nu\in\mathbf{R}^\nu$ — довільний вектор.

Таким чином, для крайової задачі (41), (42), яка розглядається в евклідовому просторі, справджується така теорема.

Теорема 8. *Нехай* $L\colon\mathbf{L}_2(\mathcal{I},\mathbf{R}^n)\to\mathbf{L}_2(\mathcal{I},\mathbf{R}^m)$, $H\colon\mathbf{L}_2(\mathcal{I},\mathbf{R}^{n_1})\to\mathbf{L}_2(\mathcal{I},\mathbf{R}^m)$ *і* $G\colon\mathbf{L}_2(\mathcal{I},\mathbf{R}^{n_1})\to\mathbf{L}_2(\mathcal{I},\mathbf{R}^m)$ — *лінійні обмежені нетерові оператори*, $\operatorname{rank}Q_1=d_1$, $\operatorname{rank}\widehat{Q}_2==d_2$.

Тоді неоднорідна крайова задача (41), (42) *має розв'язки для тих і лише тих* $\alpha\in\mathbf{R}^{m_1}$ *і* $f(t)\in\mathbf{L}_2(\mathcal{I},\mathbf{R}^{n_1})$, *які задовольняють систему* $s+\lambda$ *умов*

$$P_{N_s(B^*)}P_{N_q(L^*)}f=0,$$
$$P_{N_\lambda(Q^*)}\Big[\alpha-\big(\ell L^+\widetilde{H}+GB^+P_{N_q(L^*)}\big)f\Big]=0,$$

при виконанні яких вона має сім'ю $\mu+\nu$ *лінійно незалежних розв'язків*

$$z=\Big[X_\mu,\widetilde{U}_\nu\Big]\begin{bmatrix}c_\mu\\ c_\nu\end{bmatrix}+\big[X_p\widetilde{Q}_1^-+\widetilde{U}_k\widetilde{Q}_2^-\big]\alpha+$$
$$+L^+\widetilde{H}f-\big[X_p\widetilde{Q}_1^-+\widetilde{U}_k\widetilde{Q}_2^-\big]\big(\ell L^+\widetilde{H}+GB^+P_{N_q(L^*)}\big)f.$$

При цьому крайова задача (41), (42) *має* ν*-параметричну сім'ю лінійно незалежних керувань*

$$u=U_\nu c_\nu+U_k\widetilde{Q}_2^-\Big\{\alpha-\big(\ell L^+\widetilde{H}+GB^+P_{N_q(L^*)}\big)f\Big\}-B^+P_{N_q(L^*)}f.$$

Література

1. Н. Н. Красовский, *Теория управления движением*, Наука, Москва (1968).
2. Р. Э. Калман, П. Л. Фалб, М. А. Арбиб, *Очерки по математической теории систем*, Едиториал УРСС, Москва (2004).
3. Н. Н. Данилов, *Курс математической экономики*, СО РАН, Новосибирск (2002).
4. В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, *Оптимальное управление*, Физматлит, Москва (2005).
5. D. E. Kirk, *Optimal control theory: an introduction*, Dover Publ., New York (2004).
6. О. А. Капустян, О. К. Мазур, *Розв'язність задачі оптимального керування з мінімальною енергією для однієї параболічної крайової задачі з нелокальними крайовими умовами*, Журн. обчислюв. та прикл. математики, **120**, № 3, 6 – 10 (2015).
7. В. И. Зубов, *Построение программных движений в линейных управляемых системах*, Дифференц. уравнения, **6**, № 4, 632 – 633 (1970).
8. А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко, *Нормально разрешимые краевые задачи*, Наук. думка, Киев (2019).
9. О. А. Бойчук, Є. С. Войтушенко, Л. М. Шегда, *Нетерова імпульсна задача з керуванням*, Нелінійні коливання, **19**, № 3, 362 – 366 (2016).
10. І. А. Бондар, *Умови керування для не завжди розв'язних інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром та крайових задач для них*, Буков. мат. журн., **4**, № 1-2, 13 – 17 (2016).
11. И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, *Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов*, Штиинца, Кишинев (1973).
12. М. М. Попов, *Доповнювальні простори і деякі задачі сучасної геометрії просторів Банаха*, Математика сьогодні'07, вип. 13, 78 – 116 (2007).
13. С. Г. Крейн, *Линейные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, Москва (1971).
14. В. Ф. Журавлев, *Критерий разрешимости и представление решений линейных n- (d)-нормальных операторных уравнений в банаховом пространстве*, Укр. мат. журн., **62**, № 2, 167 – 182 (2010).
15. V. F. Zhuravlev, N. P. Fomin, P. N. Zabrodskiy, *Conditions of solvability and representation of the solutions of equations with operator matrices*, Ukr. Math. J., **71**, № 4, 537 – 552 (2019).

Одержано 20.01.21