К О Р О Т К І   П О В І Д О М Л Е Н Н Я

DOI: 10.37863/umzh.v73i7.6552

УДК 512.54

**Ю. А. Дрозд, А. І. Плакош** (Ін-т математики НАН України, Київ)

# ЧЕРНІКОВСЬКІ 2-ГРУПИ З КЛЯЙНІВСЬКОЮ ВЕРХІВКОЮ І ЦІЛКОМ ЗВІДНОЮ БАЗОЮ

We give a classification of Chernikov 2-groups with Kleinian top and totally reducible bottom.

Наведено класифікацію черніковських 2-груп з кляйнівською верхівкою і цілком звідною базою.

**1. Вступ.** Нагадаємо, що *черніковською групою* називається група, яка містить нормальну підгрупу скінченного індексу, що є прямим добутком скінченного числа квазіциклічних груп (або груп типу $(p^\infty)$). Відомо [6], що такою є будь-яка локально розв 'язна група з умовою мінімальності, а також будь-яка локально скінченна $p$-група з умовою мінімальності. Властивості таких груп вивчалися багатьма авторами, але питання про їхню класифікацію вперше було розглянуто в роботах [2, 3]. У цих роботах було встановлено зв'язок черніковських груп із зображеннями та когомологіями скінченних груп. Для $p$-груп цей зв'язок має такий вигляд. Нехай $R\colon H \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{Z}_p)$ — зображення скінченної $p$-групи $H$ над кільцем $\mathbb{Z}_p$ цілих $p$-адичних чисел. Оскільки $\mathbb{Z}_p \simeq \mathrm{Aut}(p^\infty)$, зображення $R$ визначає групу $M = (p^\infty)^r$ як модуль над груповим кільцем $\mathbb{Z}_p H$ (ми казатимемо також $H$*-модуль*). Тому можна розглядати *розширення* групи $H$ за допомогою $H$-модуля $M$, які класифікуються класами когомологій $H^2(H, M)$. Отже, пара $(M, \delta)$, де $\delta \in H^2(G, M)$, визначає деяку черніковську $p$-групу $G$ й усі черніковські $p$-групи отримуються таким способом. Групу $H$ ми назвемо *верхівкою*, а модуль $M$ — *базою* черніковської $p$-групи $G$. У роботах [2, 3] показано, що пари $(M, \delta)$ і $(M', \delta')$ визначають ізоморфні групи тоді і тільки тоді, коли вони одержуються одна з одної автоморфізмами групи $H$ і $H$-модуля $M$. Цей результат є основою для класифікації черніковських $p$-груп.

Втім, вже класифікація $p$-адичних зображень даної $p$-групи, як правило, є дуже складною задачею, яка розв'язана лише для циклічних груп порядків $p$ і $p^2$, а також, при $p = 2$, для четверної групи Кляйна та циклічної групи порядку 8. Більш того, відомо, що для інших $p$-груп ця задача є *дикою*, тобто містить у собі задачу класифікації довільних наборів матриць з точністю до спряженості.

Для циклічних груп порядків $p$ і $p^2$ класифікацію пар $(M, \delta)$ і $p$-груп з такою верхівкою наведено в роботі [3]. Когомології модулів, які одержуються з $p$-адичних зображень групи Кляйна, обчислено в роботі [8]. Ці групи швидко збільшуються зі збільшенням розмірності зображень, що вносить значні труднощі у класифікацію пар. У даній роботі ми розглянемо найпростіший випадок, коли зображення $R$ є *цілком звідним*, тобто розкладається у пряму суму незвідних зображень. Для цього випадку ми одержимо повну класифікацію відповідних черніковських груп.

**2. Когомології.** Отже, нехай $H = \langle\, a, b \mid a^2 = b^2 = 1,\, ab = ba \,\rangle$ — четверна група Кляйна. Вона має чотири незвідні $p$-адичні зображення, в яких $r = 1,\ a \mapsto u1,\ b \mapsto v1$, де $u, v \in \{+, -\}$. Їм відповідають чотири модулі $L_{uv},\ u, v \in \{+, -\}$, у яких адитивна група — квазіциклічна група $(2^\infty)$. Когомології цих модулів обчислено у [5] у термінах резольвенти $\mathbb{P}$, побудованої в [7], в якій $\mathbb{P}_n$ — модуль однорідних многочленів від $x, y$ степеня $n$ над груповим кільцем $\boldsymbol{R} = \mathbb{Z}G$, а

$$d\left(x^i y^j\right) = C_1 x^{i-1} y^j + (-1)^i C_2 x^i y^{j-1},$$

де

$$C_1 = \begin{cases} a + (-1)^i, & \text{якщо} \quad i > 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad i = 0; \end{cases}$$

$$C_2 = \begin{cases} b + (-1)^j, & \text{якщо} \quad j > 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad j = 0. \end{cases}$$

Нагадаємо цей результат.

**Твердження 2.1.** 1. $H^2(H, L_{++}) \simeq \mathbb{Z}/2$; *її ненульовий елемент — клас когомологій коциклу* $\gamma$, *в якому* $\gamma(x^2) = \gamma(y^2) = 0,\ \gamma(xy) = \varepsilon$, *де* $\varepsilon$ — *елемент порядку* 2 *групи* $(2^\infty)$.

2. $H^2(H, L_{uv}) \simeq (\mathbb{Z}/2)^2$, *якщо* $(u, v) \neq (+, +)$, *її елементи — класи коциклів* $\gamma$, *в яких* $\gamma(xy) = 0$, *а* $\gamma(x^2)$ *і* $\gamma(y^2)$ — *або* 0, *або* $\varepsilon$.

Для опису черніковських груп нам потрібно знати відповідні коцикли в термінах стандартної резольвенти [1]. Такий «переклад» наведено в [7]. У застосуванні до групи Кляйна він дає такі ненульові стандартні коцикли $\gamma$:

для модуля $L_{++}$ : $\gamma[a, a] = \gamma[b, b] = \gamma[a, b] = 0,\ \gamma[b, a] = \varepsilon$;

для модуля $L_{+-}$:

$\gamma_1^{+-}[a, a] = \gamma_1^{+-}[a, b] = \gamma_1^{+-}[b, a] = 0,\ \gamma_1^{+-}[b, b] = \varepsilon,$
$\gamma_2^{+-}[b, b] = \gamma_2^{+-}[a, b] = \gamma_2^{+-}[b, a] = 0,\ \gamma_2^{+-}[a, a] = \varepsilon,$
$\gamma_3^{+-} = \gamma_1^{+-} + \gamma_2^{+-}$;

для модуля $L_{-+}$:

$\gamma_1^{-+}[b, b] = \gamma_1^{-+}[a, b] = \gamma_1^{-+}[b, a] = 0,\ \gamma_1^{-+}[a, a] = \varepsilon,$
$\gamma_2^{-+}[a, a] = \gamma_2^{-+}[a, b] = \gamma_2^{-+}[b, a] = 0,\ \gamma_2^{-+}[b, b] = \varepsilon,$
$\gamma_3^{-+} = \gamma_1^{-+} + \gamma_2^{-+}$;

для модуля $L_{--}$:

$\gamma_1^{--}[b, b] = \gamma_1^{--}[a, b] = \gamma_1^{--}[b, a] = 0,\ \gamma_1^{--}[a, a] = \varepsilon,$
$\gamma_2^{--}[a, b] = \gamma_2^{--}[b, a] = 0,\ \gamma_2^{--}[a, a] = \gamma_2^{--}[b, b] = \varepsilon,$
$\gamma_3^{--} = \gamma_1^{--} + \gamma_2^{--}$.

Нумерацію коциклів $\gamma_i^{uv}$ підібрано так, що при автоморфізмі $\sigma$ групи $H$ такому, що $L_{uv}^\sigma = L_{u'v'}$, коцикл $\gamma_k^{uv}$ переходить у $\gamma_k^{u'v'}$ (у випадку $+$ — з точністю до кограниці).

Якщо $M = \bigoplus_{u,v} m_{uv} L_{uv}$, то $H^2(H, M) = \bigoplus_{u,v} m_{uv} H^2(H, L_{uv})$. Отже, елементи цієї групи можна ототожнити з четвірками векторів $\mathbf{h}_{uv},\ \mathbf{h}_{uv} = (h_1^{uv}, h_2^{uv}, \ldots, h_{m_{uv}}^{uv})$, де $h_i^{uv} \in H^2(H, L_{uv})$. Автоморфізми модуля $M$ діють окремо на кожний доданок $m_{uv} L_{uv}$, тобто такий автоморфізм задається четвіркою обертовних матриць $S_{uv}$ з цілими $p$-адичними коефіцієнтами. При дії цього автоморфізму вектор когомологій $\mathbf{h}_{uv}$ переходить у $\mathbf{h}_{uv} S_{uv}$. Якщо $(u, v) = (+, +)$, легко бачити, що при $\mathbf{h}_{++} \neq 0$ існує автоморфізм модуля $m_{uv} L_{uv}$, який переводить цей вектор у вектор $\mathbf{e}^{++} = (\gamma^{++}, 0, \ldots, 0)$. Якщо ж $(u, v) \neq (+, +)$, так само перевіряється, що або $\mathbf{h}_{uv} = 0$, або $\mathbf{h}_{uv}$ можна перевести у вектор $\mathbf{e}_k^{uv} = (\gamma_k^{uv}, 0, \ldots, 0)$, $k \in \{1, 2, 3\}$, або його можна перевести у вектор $\mathbf{e}_{12}^{uv} = (\gamma_1^{uv}, \gamma_2^{uv}, 0, \ldots, 0)$. (В усіх випадках це вектори довжини $m_{uv}$.)

Отже, пара $(M, \delta)$, де $\delta \in H^2(H, M)$, з точністю до автоморфізму модуля $M$ задається набором $\mathsf{H} = \{\, m_{uv}, \mathbf{h}_{uv} \mid u, v \in \{+, -\}\,\}$, в якому $\mathbf{h}_{++} \in \{0, \mathbf{e}^{++}\}$, а $\mathbf{h}_{uv} \in \{0, \mathbf{e}_k^{uv} \mid k \in \{1, 2, 3, 12\}\}$ при $(u, v) \neq (+, +)$.

Автоморфізми групи $H$ переставляють модулі $L_{uv}$ з $(u, v) \neq (+, +)$ і залишають на місці модуль $L_{++}$. При цьому в наборі $\mathsf{H}$, який задає пару $(M, \delta)$, лише переставляються індекси $uv$. Для вибору канонічних представників уведемо такі порядок на множині індексів $uv$, множині векторів $\{0, \mathbf{e}^{++}, \mathbf{e}_k^{uv}\}$ і множині наборів $\mathsf{H}$:

$++ < +- < -+ < --$;

$0 < \mathbf{e}^{++},\ 0 < \mathbf{e}_k^{uv} < \mathbf{e}_l^{uv}$, якщо $k < l$ і $\mathbf{e}_3^{uv} < \mathbf{e}_{12}^{uv}$;

$\mathsf{H} < \mathsf{H}'$, де $\mathsf{H}' = \{m'_{uv}, \mathbf{h}_{uv}\} \neq \mathsf{H}$, причому

якщо $uv$ — найменший за цим порядком номер, для якого $m_{uv} \neq m'_{uv}$, то $m_{uv} < m'_{uv}$;

якщо $m_{uv} = m'_{uv}$ для всіх $uv$, а $uv$ — перший за порядком номер, для якого $\mathbf{h}_{uv} \neq \mathbf{h}'_{uv}$, то $\mathbf{h}_{uv} < \mathbf{h}'_{uv}$.

**Означення 2.1.** *Набір* $\mathsf{H} = \{\, m_{uv}, \mathbf{h}_{uv} \mid u, v \in \{+, -\}\,\}$ *назвемо канонічним, якщо* $\mathsf{H} \leq \mathsf{H}'$ *для будь-якого набору* $\mathsf{H}'$, *який одержується з нього перестановкою індексів* $uv$ *з* $(u, v) \neq \neq (0, 0)$.

Із попередніх розглядів випливає такий результат.

**Теорема 2.1.** *Кожна пара* $(M, \delta)$ *еквівалентна єдиній парі, яка задається канонічним набором.*

**3. Черніковські групи.** Згідно з результатами [3] і теоремою 2.1, черніковська група з кляйнівською верхівкою $H$ і цілком розкладною базою $M$ ізоморфна групі, яка відповідає парі, що задається канонічним набором $\mathsf{H}$, причому цей набір визначено однозначно. Нагадаємо, що група $G$, яка відповідає парі $(M, \delta)$, як множина збігається з декартовим добутком $M \times H$, а операція задається правилом

$$(x, h)(y, g) = (x + hy + \delta(h, g), hg).$$

Пари $(x, 1)$ утворюють підгрупу, ізоморфну $M$, і ми ототожнюємо їх з елементами $x \in M$. Позначимо $\bar{a} = (0, a)$, $\bar{b} = (0, b)$. Група $G$ породжується підгрупою $M$ та елементами $\bar{a}, \bar{b}$. Нам відомо, що $M$ — нормальна підгрупа, і знаємо, як комутують її елементи з $\bar{a}$ та $\bar{b}$ (це визначається дією $H$ на $M$). Отже, щоб визначити групу $G$, потрібно знати елементи $\alpha = \bar{a}^2$, $\beta = \bar{b}^2$ і $\eta = [\bar{a}, \bar{b}]$, які є елементами підгрупи $M$. Вони визначаються коциклом $\delta$.

**Означення 3.1.** *Нехай пара* $(M, \delta)$ *задається набором* $\mathsf{H} = \{\, m_{uv}, \mathbf{h}_{uv} \mid u, v \in \{+, -\}\,\}$. *Елементи групи* $M = m_{uv} L_{uv}$ *ми розглядаємо як вектори довжини* $m_{uv}$ *з коефіцієнтами з групи* $(p^\infty)$. *Через* $\boldsymbol{\varepsilon}_i^{uv}$ *позначимо вектор з* $m_{uv} L_{uv}$, *в якому на* $i$*-му місці стоїть* $\varepsilon$, *а інші координати є нулями. Визначимо елементи* $\alpha_{uv}$, $\beta_{uv}, \eta_{uv}$ *таким чином:*

*якщо* $\mathbf{h}_{uv} = 0$, *то* $\alpha_{uv} = \beta_{uv} = \eta_{uv} = 0$;

*якщо* $\mathbf{h}_{++} = \mathbf{e}^{++}$, *то* $\alpha_{++} = \beta_{++} = 0$, $\eta_{++} = \boldsymbol{\varepsilon}_1^{++}$;

*якщо* $\mathbf{h}_{+-} = \mathbf{e}_1^{+-}$, *то* $\alpha_{+-} = \boldsymbol{\varepsilon}_1^{+-}$, $\beta_{+-} = 0$, $\eta_{+-} = 0$;

*якщо* $\mathbf{h}_{+-} = \mathbf{e}_2^{+-}$, *то* $\beta_{+-} = \boldsymbol{\varepsilon}_1^{+-}$, $\alpha_{+-} = 0$, $\eta_{+-} = 0$;

*якщо* $\mathbf{h}_{+-} = \mathbf{e}_3^{+-}$, *то* $\alpha_{+-} = \beta_{+-} = \boldsymbol{\varepsilon}_1^{+-}$, $\eta_{+-} = 0$;

*якщо* $\mathbf{h}_{+-} = \mathbf{e}_{12}^{+-}$, *то* $\alpha_{+-} = \boldsymbol{\varepsilon}_1^{+-}$, $\beta_{+-} = \boldsymbol{\varepsilon}_2^{+-}$, $\eta_{+-} = 0$;

*якщо* $\mathbf{h}_{-+} = \mathbf{e}_1^{-+}$, *то* $\beta_{-+} = \boldsymbol{\varepsilon}_1^{-+}$, $\alpha_{-+} = 0$, $\eta_{-+} = 0$;
*якщо* $\mathbf{h}_{-+} = \mathbf{e}_2^{-+}$, *то* $\alpha_{-+} = \boldsymbol{\varepsilon}_1^{-+}$, $\beta_{-+} = 0$, $\eta_{-+} = 0$;
*якщо* $\mathbf{h}_{-+} = \mathbf{e}_3^{-+}$, *то* $\alpha_{-+} = \beta_{-+} = \boldsymbol{\varepsilon}_1^{-+}$, $\eta_{-+} = 0$;
*якщо* $\mathbf{h}_{-+} = \mathbf{e}_{12}^{-+}$, *то* $\alpha_{-+} = \boldsymbol{\varepsilon}_2^{-+}$, $\beta_{-+} = \boldsymbol{\varepsilon}_1^{-+}$, $\eta_{-+} = 0$;
*якщо* $\mathbf{h}_{--} = \mathbf{e}_1^{--}$, *то* $\alpha_{--} = \boldsymbol{\varepsilon}_1^{--}$, $\beta_{--} = 0$, $\eta_{--} = 0$;
*якщо* $\mathbf{h}_{--} = \mathbf{e}_2^{--}$, *то* $\alpha_{--} = \beta_{--} = \boldsymbol{\varepsilon}_1^{--}$, $\eta_{--} = 0$;
*якщо* $\mathbf{h}_{--} = \mathbf{e}_3^{--}$, *то* $\beta_{--} = \boldsymbol{\varepsilon}_1^{--}$, $\alpha_{--} = 0$, $\eta_{--} = 0$;
*якщо* $\mathbf{h}_{--} = \mathbf{e}_{12}^{+-}$, *то* $\alpha_{--} = \boldsymbol{\varepsilon}_1^{--} + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{--}$, $\beta_{--} = \boldsymbol{\varepsilon}_2^{--}$, $\eta_{--} = 0$.
Покладемо

$$\alpha(\mathsf{H}) = \alpha_{++} + \alpha_{+-} + \alpha_{-+} + \alpha_{--},$$

$$\beta(\mathsf{H}) = \beta_{++} + \beta_{+-} + \beta_{-+} + \beta_{--},$$

$$\eta(\mathsf{H}) = \eta_{++} + \eta_{+-} + \eta_{-+} + \eta_{--}.$$

Попередні розгляди дають повний опис черніковських груп із кляйнівською верхівкою і цілком розкладною базою.

**Теорема 3.1.** *Для кожного набору* $\mathsf{H} = \{\, m_{uv}, \mathbf{h}_{uv} \mid u, v \in \{+, -\}\,\}$ *визначимо групу* $G(\mathsf{H})$ *як таку, що породжується групою* $M = \bigoplus_{uv} m_{uv} L_{uv}$ *та елементами* $\bar{a}$, $\bar{b}$ *такими, що* $\bar{a} x \bar{a}^{-1} = ax$ *і* $\bar{b} x \bar{b}^{-1} = bx$ *для всіх* $x \in M$, $\bar{a}^2 = \alpha(\mathsf{H})$, $\bar{b} = \beta(\mathsf{H})$ *і* $[\bar{a}, \bar{b}] = \eta(\mathsf{H})$.

1. *Група* $G(\mathsf{H})$ *є черніковською групою з кляйнівською верхівкою і цілком розкладною базою.*

2. *Кожна черніковська група* $G$ *з кляйнівською верхівкою і цілком розкладною базою ізоморфна деякій групі* $G(\mathsf{H})$, *де* $\mathsf{H}$ — *канонічний набір, визначений однозначно групою* $G$.

## Література


1. К. С. Браун, *Когомології груп*, Наука, Москва (1987).
2. П. М. Гудивок, Ф. Г. Ващук, В. С. Дроботенко, *p-Группы Черникова и целочисленные p-адические представления конечных групп*, Укр. мат. журн., **44**, № 6, 742 – 753 (1992).
3. П. М. Гудивок, И. В. Шапочка, *О p-группах Черникова*, Укр. мат. журн., **51**, № 3, 291 – 304 (1999).
4. А. Картан, С. Эйленберг, *Гомологическая алгебра*, Изд-во иностр. лит., Москва (1960).
5. А. І. Плакош, І. В. Шапочка, *Про когомології четверної групи Клейна*, Наук. вісн. Ужгород. ун-ту, **30**, № 1, 95 – 102 (2017).
6. С. Н. Черников, *Группы с заданными свойствами системы подгрупп*, Наука, Москва (1980).
7. Yu. Drozd, A. Plakosh, *Cohomologies of finite Abelian groups*, Algebra and Discrete Math., **24**, № 1, 144 – 157 (2017).
8. Yu. Drozd, A. Plakosh, *Cohomologies of the Kleinian 4-group*, Arch. Math., **115**, № 2, 139 – 145 (2020).


Одержано 01.02.21