О некоторых свойствах предельных распределений для нормированных сумм

Б. В. Гнеденко

1. Пусть дана последовательность взаимно независимых случайных величин

$$\xi_1, \ \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$$

Если при надлежащем подборе постоянных A_n и $B_n > 0$ функции распределения сумм

$$S_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{B_n} - A_n \tag{1}$$

при $n \to \infty$ сходятся к предельной функции распределения $\Phi(x)$, причем слагаемые $\frac{\xi_k}{B_n}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ оказываются предельно постоянными *), то эта функция обязана быть безгранично делимой и обладать некоторыми дополнительными свойствами. В 1936 г. в ответ на поставленный А. Я. Хинчиным вопрос о характеристическом свойстве предельных законов для нормированных сумм [1] (класс L) П. Леви дал исчерпывающий ответ. Результат П. Леви состоит в следующем.

Для того чтобы функция распределения $\Phi(x)$ принадлежала классу L, необходимо и достаточно, чтобы логарифм ее характеристической функции был представлен в виде

$$\lg \varphi(t) = i\gamma t - \frac{a^2 t^2}{2} + \int\limits_{-\infty}^{-0} \left\{ e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right\} dM(u) +$$

$$+ \int\limits_{+0}^{\infty} \left\{ e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right\} dN(u), \tag{2}$$

где γ и a — вещественные постоянные, а монотонные функции $M(u)$ и $N(u)$ таковы, что 1) при каждом значении $u \neq 0$ они имеют правую и левую производные, 2) функции $uM'(u)$ при $u < 0$ и $uN'(u)$ при $u > 0$ не возрастают ($M'(u)$ и $N'(u)$ обозначают любую из производных — левую или правую, быть может, в разных точках различные) и 3) интегралы

$$\int\limits_{-1}^{0} x^2 \, dM(x) \quad \text{и} \quad \int\limits_{0}^{1} x^2 \, dN(x)$$

существуют и $M(-\infty) = N(+\infty) = 0$ (см., напр., [1], стр. 49 и след.).

---

*) Т. е. существуют такие постоянные b_{nk}, что каково бы ни было $\varepsilon > 0$

$$\lim_{m \to \infty} P \left\{ \left| \frac{\xi_k}{B_n} - b_{nk} \right| < \varepsilon \right\} = 1.$$

2. Мы скажем, что функция распределения $F(x)$ принадлежит области притяжения закона $\Phi(x)$, если функции распределения нормированных сумм

$$S_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{B_n} - A_n \tag{3}$$

взаимно независимых и распределенных по закону $F(x)$ случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ при надлежащем подборе вещественных постоянных A_n и B_n сходятся к закону $\Phi(x)$, когда $n \to \infty$.

В качестве предельной функции распределения для сумм (3) может выступать не любая функция класса L, а только так называемые устойчивые законы. Класс этих законов был полностью определен П. Леви и А. Я. Хинчиным. Оказалось, что (см. [1], стр. 100) закон $\Phi(x)$ тогда и только тогда будет устойчивым, когда логарифм его характеристической функции может быть представлен в виде

$$\lg \varphi(t) = i\gamma t - c|t|^\alpha \left\{ 1 + i\beta \frac{t}{|t|} \omega(t, \alpha) \right\},$$

где α, β, γ, c — вещественные постоянные ($0 < \alpha \leqslant 2$, $c > 0$, $-1 \leqslant \beta \leqslant 1$), а

$$\omega(t, \alpha) = \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \alpha & \text{при } \alpha \neq 1, \\ \frac{2}{\pi} \lg |t| & \text{при } \alpha = 1. \end{cases}$$

Величину α мы назовем характеристическим показателем устойчивого закона.

В работе [2] мной были найдены области притяжения для каждого устойчивого закона с характеристическим показателем $\alpha \neq 2$. Случай $\alpha = 2$ — нормальное распределение — был рассмотрен еще в 1935 г. одновременно тремя авторами — А. Я. Хинчиным, П. Леви и В. Феллером. Их результат изложен в монографии Хинчина [1].

3. В ряде вопросов математической статистики особый интерес представляют так называемые одновершинные кривые распределения вероятностей. Обычно так называют функции распределения, имеющие в каждой точке первую производную, обладающую единственным экстремумом. То обстоятельство, что нормальное распределение, законы Пирсона — одновершинны, постоянно используется и в теоретических и в практических выводах статистики.

Понятие одновершинности было обобщено в 1937 г. А. Я. Хинчиным [3]. Следуя этой работе, мы скажем, что функция распределения $F(x)$ одновершинна, если существует по меньшей мере одно значение a, такое, что при $x < a$ функция $F(x)$ выпукла, а при $x > a$ — вогнута. Точку a естественно назвать *вершиной распределения*. Из общей теории выпуклых функций известно, что одновершинная функция распределения должна иметь в каждой точке, за исключением, быть может, вершины, правую и левую производные. Кроме того, производная

$F'(x)$ (в каждой точке может быть любая — правая или левая) не убывает при $x < a$ и не возрастает при $x > a$. Ясно, что одновершинная функция распределения всюду непрерывна, за исключением, быть может, вершины.

В дипломной работе А. И. Лапина было показано, что

1) если независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 имеют одновершинные функции распределения, то их сумма $\xi_1 + \xi_2$ также имеет одновершинную функцию распределения;

2) если последовательность одновершинных функций распределения сходится к предельной функции распределения, то эта последняя также одновершинна.

4. Цель настоящей заметки состоит в доказательстве следующих двух теорем.

Теорема 1. *Если функция распределения $F(x)$ принадлежит области притяжения устойчивого закона с характеристическим показателем α, то при любом δ $(0 \leqslant \delta < \alpha)$ существуют для функции $F(x)$ абсолютные моменты порядка δ; иными словами интегралы*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{\delta} dF(x)$$

конечны при $\delta < \alpha$.

Теорема 2. *Все законы класса L одновершинны.*

5. Доказательство теоремы 1. Для случая $\alpha = 2$ (см., напр., [4], стр. 82) эта теорема известна. Остается рассмотреть случай $\alpha \neq 2$. Для этого случая в [2] доказано, что если функция распределения $F(x)$ принадлежит области притяжения устойчивого закона с характеристическим показателем α $(0 < \alpha < 2)$, то при каждом постоянном $k > 0$ и $x \to \infty$

$$\frac{1 - F(x) + F(-x)}{1 - F(kx) + F(-kx)} \to k^{\alpha}.$$

Отсюда следует, что каковы бы ни были $\varepsilon > 0$ и $k > 1$ можно найти такое x_0, что

$$\frac{1 - F(k^s x_0) + F(-k^s x_0)}{1 - F(k^{s+1} x_0) + F(-k^{s+1} x_0)} = \frac{k^{\alpha}}{1 + \varepsilon_s}, \tag{4}$$

причем $|\varepsilon_s| \leqslant \varepsilon$ для $S = 0, 1, 2 \ldots$ Мы предположим, что

$$\frac{1 + \varepsilon}{k^{\alpha - \delta}} < 1.$$

Очевидно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{\delta} dF(x) = \int_{-x_0}^{x_0} |x|^{\delta} dF(x) + \sum_{s=1}^{\infty} \int_{k^{s-1}x_0 \leqslant |x| < k^s x_0} |x|^{\delta} dF(x) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-x_0}^{x_0} |x|^{\delta} dF(x) + x_0^{\delta} \sum_{s=1}^{\infty} k^{s\delta} [1 - F(k^{s-1} x_0) + F(-k^{s-1} x_0)].$$

Так как в силу (4)

$$1-F(k^s x_0)+F(-k^s x_0)=\prod_{r=0}^{s-1}(1+\varepsilon_r)\,k^{-\alpha s}\,[1-F(x_0)+F(-x_0)],$$

то

$$\sum_{s=1}^{\infty} k^{s\delta}\,[1-F(k^{s-1}x_0)+F(-k^{s-1}x_0)]\leqslant$$

$$\leqslant k^{\alpha}[1-F(x_0)+F(-x_0)]\sum_{s=1}^{\infty}(1+\varepsilon)^{s-1}\,k^{-s(\alpha-\delta)}.$$

В силу выбора ε, ряд в правой части неравенства сходится. Теорема доказана.

6. Доказательство теоремы 2. Мы докажем несколько более общий результат, а именно докажем, что если функции $M(u)$ и $N(u)$ в формуле (2) соответственно выпуклы и вогнуты, то функция распределения $\Phi(x)$, соответствующая характеристической функции $\varphi(t)$, одновершинна.

С этой целью рассмотрим сначала случай, когда $\Phi(x)$ не имеет нормальной компоненты, т. е. когда в формуле (2) $a=0$.

Рассмотрим последовательность серий взаимно независимых случайных величин ξ_{nk} $(1\leqslant k\leqslant n;\ n=1,2,\ldots)$. Функции распределения величин $\xi_{nk}(1\leqslant k\leqslant n)$ положим равными*):

$$F_{nk}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}M(x) & \text{при}\quad x\leqslant x_n' \\[2mm] \dfrac{1}{n}[M(x_n')+M'(x_n')(x-x_n')] & \text{при}\quad x_n'\leqslant x\leqslant 0\\[2mm] 1+\dfrac{1}{n}[N(x_n'')+N_+'(x_n'')(x-x_n'')] & \text{при}\quad 0<x\leqslant x_n'\\[2mm] 1+\dfrac{1}{n}N(x) & \text{при}\quad x\geqslant x_n'.\end{cases}$$

Точки x_n' и x_n'' выбираем так, чтобы они удовлетворяли следующим двум требованиям:

1. $\dfrac{1}{n}[M(x_n')+M_-'(x_n')(x-x_n')]\leqslant 1+\dfrac{1}{n}[N(x_n'')+N_+'(x_n'')(x-x_n'')]$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n'=\lim\limits_{n\to\infty}x_n''=0.$

Согласно предположению о функциях $M(x)$ и $N(x)$, функции распределения $F_{nk}(x)$ при всех n и k одновершинны. Следовательно, по первой теореме Лапина, одновершинны также функции распределения сумм

$$S_n=\xi_{n1}+\xi_{n2}+\ldots+\xi_{nn}-A_n, \tag{5}$$

*) $M_-(x)$ означает левую, а $N_+(x)$ — правую производную в точке x. Требование 1 обеспечивает монотонность функции $F_{nk}(x)$.

где A_n — действительные постоянные. Если при некотором подборе постоянных A_n функции распределения сумм (5) сходятся к предельной, то, в силу второй теоремы Лапина, эта предельная также одновершинна.

Легко видеть, что величины ξ_{nk} бесконечно малы. Действительно, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, при достаточно большом n $x_n' > -\varepsilon$ и $x_n'' < \varepsilon$, следовательно,

$$P\{|\xi_{nk}| \geqslant \varepsilon\} = \frac{1}{n}[M(-\varepsilon) - N(\varepsilon)].$$

Эта величина при $n \to \infty$ равномерно относительно $k (1 \leqslant k \leqslant n)$ стремится к нулю.

Мы можем, таким образом, воспользоваться теоремой об условиях существования предельного закона для сумм и условиях сходимости к нему функций распределения сумм (5). Эти условия применительно к нашему случаю состоят ([5], теоремы 10—12) в том, чтобы существовали такие неубывающие функции $M_1(x)$ и $N_1(x)$ $(M_1(-\infty) = N_1(+\infty) = 0)$ и постоянное a, чтобы при $n \to \infty$

$$nF_{nk}(x) \to M_1(x) \qquad \text{для } x < 0,$$

$$n(F_{nk}(x) - 1) \to N_1(x) \quad \text{для } x > 0$$

и

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}}\, n \left[\int\limits_{|x| < \varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) - \left(\int\limits_{|x| < \varepsilon} x\, dF_{nk}(x) \right)^2 \right] = a^2.$$

Легко видеть, что в нашем случае

$$\lim_{n \to \infty} nF_{nk}(x) = M(x) \qquad \text{для } x < 0,$$

$$\lim_{n \to \infty} n(F_{nk}(x) - 1) = N(x) \quad \text{для } x > 0.$$

Далее

$$n \int\limits_{|x| < \varepsilon} x^2\, dF_{nk}(x) = \int\limits_{-\varepsilon}^{x_n'} x^2\, dM(x) + \int\limits_{x_n'}^{0} x^2 M_-'(x_n')\, dx +$$

$$+ \int\limits_{0}^{x_n''} x^2 N_+'(x_n'')\, dx + \int\limits_{x_n''}^{\varepsilon} x^2\, dN(x).$$

Но

$$M'(x) \geqslant M_-'(x_n'') \qquad \text{при } x_n' < x < 0,$$

а

$$N'(x) \geqslant N_+'(x_n') \qquad \text{при } 0 < x < x_n'',$$

поэтому

$$\int\limits_{x_n'}^{0} x^2 M_-'(x_n')\, dx + \int\limits_{0}^{x_n''} x^2 N_+'(x_n'')\, dx \leqslant \int\limits_{x_n'}^{0} x^2\, dM(x) + \int\limits_{0}^{x_n''} x^2\, dN(x)$$

и, следовательно,

$$n \int\limits_{|x| < \varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) \leqslant \int\limits_{-\varepsilon}^{0} x^2\, dM(x) + \int\limits_{0}^{\varepsilon} x^2\, dN(x).$$

Из этого неравенства мы заключаем, что

$$0 \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n \left[\int\limits_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) - \left(\int\limits_{|x|<\varepsilon} x dF_{nk}(x) \right)^2 \right] \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n \int\limits_{|x|<\varepsilon} x^2\, dF_{nk}(x) = 0.$$

Таким образом, функция $\Phi(x)$ является предельной для функции распределения сумм (4) и, следовательно, одновершинной.

Если функция $\Phi(x)$ имеет нормальную компоненту, то мы представляем $\Phi(x)$ в виде композиции нормального закона и некоторого безгранично делимого закона без нормальной компоненты. Нормальный закон одновершинен, вторая компонента, согласно предыдущему, также одновершинна, их композиция по теореме Лапина также одновершинна.

Так как законы класса L таковы, что для них в формуле (2) функция $M(u)$ выпукла, а функция $N(u)$ вогнута, то все законы класса L одновершинны. Отсюда, в частности, следует, что законы класса L непрерывны всюду за исключением, быть может, вершины. Легко построить примеры законов класса L, имеющих в вершине разрыв.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Я. Хинчин, Предельные законы для сумм независимых случайных величин, М., 1938.

2. Б. В. Гнеденко, К теории областей притяжения устойчивых законов, Учен. зап. МГУ, вып. XXX, 1939.

3. А. Я. Хинчин, Об унимодальных распределениях, Труды НИИММ при Томском университете, т. 2, вып. 2, 1938.

4. Г. Крамер, Случайные величины и распределения вероятностей, М., 1947.

5. Б. В. Гнеденко, Предельные законы для сумм независимых случайных величин, Успехи мат. наук, вып. X, 1944.

Поступило 22. IX 1948.