О многомерной локальной предельной теореме теории вероятностей

Д. Г. Мейзлер, О. С. Парасюк, Е. Л. Рвачева

Настоящая заметка представляет собой обобщение одного результата Б. В. Гнеденко [1] на многомерный случай *).

Пусть дана последовательность взаимно независимых, одинаково распределенных случайных s-мерных векторов

$$\xi^{(n)} = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_s^{(n)}) \quad (n = 1, 2, \dots), \tag{1}$$

компоненты которых принимают только целочисленные значения. Обозначим через $P(x) = P(x_1, x_2, \dots, x_s)$ вероятность того, что

$$\xi_k^{(n)} = x_k \quad (k = 1, 2, \dots, s).$$

Будем считать, что моменты первого и второго порядка

$$a_k = M\xi_k^{(n)}, \quad b_{ij} = M(\xi_i^{(n)} \xi_j^{(n)})$$

конечны, а детерминант

$$\Delta = |b_{ij}|$$

отличен от нуля.

Пусть далее

$$\zeta^{(n)} = (\zeta_1^{(n)}, \zeta_2^{(n)}, \dots, \zeta_s^{(n)}) = \sum_{m=1}^{n} \xi^{(m)} = \left(\sum_{m=1}^{n} \xi_1^{(m)}, \sum_{m=1}^{n} \xi_2^{(m)}, \dots, \sum_{m=1}^{n} \xi_s^{(m)} \right). \tag{2}$$

Очевидно, что компоненты вектора $\zeta^{(n)}$ могут также принимать только целочисленные значения. Пусть $P_n(z) = P_n(z_1, z_2, \dots, z_s)$ — вероятность того, что компоненты вектора $\zeta^{(n)}$ примут значения

$$\zeta_k^{(n)} = z_k \quad (k = 1, 2, \dots, s).$$

Известно, что при некоторых довольно общих условиях вероятности $P_n(z_1, z_2, \dots, z_s)$ допускают асимптотическое представление вида

$$P_n(z) \sim \frac{1}{(2\pi n)^{\frac{s}{2}} \Delta^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} Q\left(\frac{z - na}{\sqrt{n}}\right)}, \tag{3}$$

где a обозначает вектор $(a_1, a_2, \dots, a_s)$, а

$$Q(u) = \sum_{i,j=1}^{s} B_{ij} u_i u_j$$

есть квадратичная форма с коэфициентами

$$B_{ij} = \frac{\Delta_{ji}}{\Delta},$$

образующими матрицу, обратную матрице $\|b_{ij}\|$.

*) Краткое сообщение об этом результате было опубликовано нами ранее [2]; здесь мы даём полное его доказательство.

Нашей задачей является указание необходимых и достаточных условий для существования указанного асимптотического представления. Более точно мы доказываем следующее предложение:

Теорема. *Для того чтобы разности*

$$n^{\frac{s}{2}} P_n(z) - \frac{1}{(2\pi)^{\frac{s}{2}} \Delta^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} Q\left(\frac{z-na}{\sqrt{n}}\right)} \tag{4}$$

для всех векторов z с целочисленными координатами стремились равномерно (относительно z) к нулю, необходимо и достаточно, чтобы (s) *общий наибольший делитель объемов s-мерных симплексов, все $s+1$ вершин которых лежат в целочисленных точках x, для которых*

$$P(x) > 0,$$

был равен $\frac{1}{s!}$.

Естественно, что в условии (s) имеются в виду невырожденные s-мерные симплексы. Условие $|\Delta| \neq 0$ гарантирует их существование.

Условие (s) равносильно следующему.

(s') — параллелепипедальная решетка, порождаемая всеми векторами

$$x = x' - x'',$$

для которых $P(x') > 0$, $P(x'') > 0$, совпадает с решеткой всех целочисленных точек s-мерного пространства.

Доказательство. Обозначим через

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_s) = Me^{i\sum_{\nu=1}^{s} t_\nu \xi_\nu} = \sum_{x_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{x_s=-\infty}^{\infty} e^{i(t_1 x_1 + \ldots + t_s x_s)} P(x_1, \ldots, x_s)$$

характеристическую функцию случайного вектора $\xi^{(n)}$. Тогда характеристическая функция вектора суммы $\zeta^{(n)}$ будет равна

$$f^n(t_1, \ldots, t_s) = Me^{i\sum_{\nu=1}^{s} \zeta_\nu t_\nu} = \sum_{z_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{z_s=-\infty}^{\infty} e^{i(t_1 z_1 + \ldots + t_s z_s)} P_n(z_1, \ldots, z_s).$$

Умножим обе части последнего равенства на $e^{i(t_1 z_1 + t_2 z_2 + \ldots + t_s z_s)}$ и проинтегрируем по $t_1, t_2, \ldots, t_s$ каждый раз в пределах от $-\pi$ до π. Тогда получим

$$(2\pi)^s P_n(z_1, \ldots, z_s) = \int_{-\pi}^{\pi} \ldots \int_{-\pi}^{\pi} f^n(t_1, \ldots, t_s) e^{-i(t_1 z_1 + \ldots + t_s z_s)} dt_1 \ldots dt_s.$$

Положим

$$x_i = \frac{z_i - na_i}{\sqrt{n}}; \; z_i = x_i\sqrt{n} + na_i \quad (i = 1, 2, \ldots, s), \tag{5}$$

тогда

$$(2\pi)^s P^n(x\sqrt{n} + na) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \ldots \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\sqrt{n}(_1 x_1 + \ldots + t_s x_s)} e^{-in(a_1 t_1 + \ldots + a_s t_s)} f^n(t_1, \ldots, t_s) dt_1 \ldots dt_s.$$

Обозначим

$$\bar{f}(t_1, \ldots, t_s) = e^{-i(a_1 t_1 + \ldots + a_s t_s)} f(t_1, \ldots, t_s),$$

имеем

$$(2\pi)^s P_n(x\sqrt{n} + na) = \int_{-\pi}^{\pi} \ldots \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\sqrt{n}(t_1 x_1 + \ldots + t_s x_s)} \bar{f}^n(t_1, \ldots, t_s)\, dt_1 \ldots dt_s.$$

Произведем замену переменных, положив

$$y_i = t_i \sqrt{n} \quad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Находим

$$(2\pi)^s n^{\frac{s}{2}} P_n(x\sqrt{n} + na) = \int_{-\pi\sqrt{n}}^{\pi\sqrt{n}} \ldots \int_{-\pi\sqrt{n}}^{\pi\sqrt{n}} e^{-i(x_1 y_1 + \ldots + x_s y_s)} \bar{f}^n\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{y_s}{\sqrt{n}}\right) dy_1 \ldots dy_s.$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{s}{2}}} \cdot \frac{1}{\Delta^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} Q(x_1, \ldots, x_s)} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^s} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(x_1 y_1 + \ldots + x_s y_s) - \frac{1}{2} q(y_1, \ldots, y_s)} dy_1 \ldots dy_s,$$

где $q(y) = q(y_1, \ldots, y_s)$ — квадратичная форма с коэфициентами b_{ij},

$$q(y) = \sum_{i, j=1}^{s} b_{ij} y_i y_j.$$

Нам необходимо показать, что при $n \to \infty$ равномерно в s-мерном интервале $-\infty < z_i < \infty$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ разность

$$R_n = (2\pi)^s \left[n^{\frac{s}{2}} P_n(x\sqrt{n} + na) - \frac{1}{(2\pi)^{\frac{s}{2}} \Delta^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} Q(x)} \right]$$

стремится к нулю.

Представим R_n в виде суммы трех интегралов

$$R_n = I_1 + I_2 + I_3,$$

где

$$I_1 = \int_{\mathfrak{G}(n)} e^{-i(x_1 y_1 + \ldots + x_s y_s)} \left[\bar{f}^n\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{y_s}{\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{1}{2} q(y_1, \ldots, y_s)} \right] dy_1 \ldots dy_s,$$

$$I_2 = \int_{\mathfrak{G}(n)} e^{-i(x_1 y_1 + \ldots + x_s y_s) - \frac{1}{2} q(y_1, \ldots, y_s)} dy_1 \ldots dy_s$$

$$I_3 = \int_{\mathfrak{G}_1(n)} e^{-i(x_1 y_1 + \ldots + x_s y_s)} \bar{f}^n\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{y_s}{\sqrt{n}}\right) dy_1 \ldots dy_s,$$

где $\mathfrak{G}(n)$ — область, определяемая неравенствами $|y_i| < u$ $(i=1,\ldots,s)$, $\overline{\mathfrak{G}}(n)$ — часть пространства, внешняя к $\mathfrak{G}(n)$, $\overline{\mathfrak{G}}_1(n)$ — общая часть $\overline{\mathfrak{G}}(n)$ и области, определяемой неравенствами $|y_i| \leqslant \pi\sqrt{n}$, $i=1, 2, \ldots, s$. Величину u определим позднее так, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} u = \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u}{\sqrt{n}} = 0$.

Тогда

$$|I_2| \leqslant \int\limits_{\overline{\mathfrak{G}}(n)} e^{-\frac{1}{2}q(y_1,\ldots,y_s)}\, dy_1 \ldots dy_s \xrightarrow[\text{при } n\to\infty]{} 0. \tag{6}$$

Перейдем к оценке интеграла I_1, который запишем в следующем виде:

$$I_1 = \int\limits_{\mathfrak{G}(n)} e^{-i(x_1y_1+\ldots+x_sy_s) - \frac{1}{2}q(y_1,\ldots,y_s)} \left[e^{n\ln\overline{f}\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{y_s}{\sqrt{n}}\right) + \frac{1}{2}q(y_1,\ldots,y_s)} - 1\right] dy_1 \ldots dy_s.$$

Покажем, что при $n \to \infty$ величина

$$\varrho_n = n\ln\overline{f}\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{y_s}{\sqrt{n}}\right) + \frac{1}{2}q(y_1,\ldots,y_s)$$

стремится к нулю равномерно в s-мерном интервале $|y_i| \leqslant u$ $(i=1,2,\ldots,s)$.

Действительно, так как при $n \to \infty$ величины $\frac{u}{\sqrt{n}} \to 0$, то в интервале $|y_i| \leqslant u$ $(i=1,\ldots,s)$ при n достаточно больших имеет место неравенство

$$\left|\overline{f}\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{y_s}{\sqrt{n}}\right) - 1\right| < \frac{1}{2}, \tag{7}$$

в силу чего можно написать

$$\ln\overline{f}\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{y_s}{\sqrt{n}}\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\overline{f}\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{y_s}{\sqrt{n}}\right) - 1\right]^{\nu}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu}$$

и

$$\varrho_n = \frac{1}{2}q(y_1,\ldots,y_s) +$$
$$+ \left[\overline{f}\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{y_s}{\sqrt{n}}\right) - 1\right]n + n\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}\left[\overline{f}\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{y_s}{\sqrt{n}}\right) - 1\right]^{\nu}.$$

Обозначим через $\overline{F}(v_1,\ldots,v_s)$ функцию распределения вектора, для которого $\overline{f}(t_1,\ldots,t_s)$ является характеристической функцией, тогда

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{f}(t_1,\ldots,t_s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(t_1v_1+\ldots+t_sv_s)}\, d\overline{F}(v_1,\ldots,v_s),\\
&\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty} v_i\, d\overline{F}(v_1,\ldots,v_s) = 0, \qquad (i=1,2,\ldots,s)\\
&\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty} v_iv_j\, d\overline{F}(v_1,\ldots,v_s) = b_{ij}, \qquad (i,j=1,2,\ldots,s)
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

В силу этих соотношений и неравенства

$$|e^{i\alpha}-1-i\alpha|\leqslant\frac{\alpha^2}{2}, \tag{9}$$

которое имеет место при любом вещественном α, имеем

$$\bar{f}\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{y_s}{\sqrt{n}}\right)-1=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[e^{i\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}}v_1+\ldots+\frac{y_s}{\sqrt{n}}v_s\right)}-1-i\left(\frac{y_1v_1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{y_sv_s}{\sqrt{n}}\right)\right]d\bar{F}(v_1,\ldots,v_s).$$

$$\left|\bar{f}\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{y_s}{\sqrt{n}}\right)-1\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{y_1v_1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{y_sv_s}{\sqrt{n}}\right)^2d\bar{F}(v_1,\ldots,v_s)=\frac{1}{2n}q(y_1,\ldots,y_s). \tag{10}$$

В силу (7) и (10) имеем

$$n\left|\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu}\left[\bar{f}\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{y_s}{\sqrt{n}}\right)-1\right]^{\nu}\right|\leqslant\frac{n}{2}\sum_{\nu=2}^{\infty}\left|\bar{f}\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{y_s}{\sqrt{n}}\right)-1\right|^{\nu}=$$

$$=\frac{n}{2}\,\frac{\left|\bar{f}\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{y_s}{\sqrt{n}}\right)-1\right|^2}{1-\left|\bar{f}\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{y_s}{\sqrt{n}}\right)-1\right|}\leqslant n\left|\bar{f}\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{y_s}{\sqrt{n}}\right)-1\right|^2\leqslant\frac{[q(y_1,\ldots,y_s)]^2}{4n}.$$

Пусть $L\to\infty$ при $n\to\infty$ и так, что $L=o(\sqrt{n})$.

В силу соотношений (8) имеем:

$$\frac{1}{2}q(y_1,\ldots,y_s)+n\left[\bar{f}\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{y_s}{\sqrt{n}}\right)-1\right]=$$

$$=n\int\limits_{D(n)}\left[e^{i\left(\frac{y_1v_1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{y_sv_s}{\sqrt{n}}\right)}-1-i\left(\frac{y_1v_1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{y_sv_s}{\sqrt{n}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{y_1v_1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{y_sv_s}{\sqrt{n}}\right)^2\right]d\bar{F}(v_1,\ldots,v_s)+$$

$$+n\int\limits_{\bar{D}(n)}\left[e^{i\left(\frac{y_1v_1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{y_sv_s}{\sqrt{n}}\right)}-1-i\left(\frac{y_1v_1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{y_sv_s}{\sqrt{n}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{y_1v_1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{y_sv_s}{\sqrt{n}}\right)^2\right]d\bar{F}(v_1,\ldots,v_s), \tag{11}$$

где $D(n)$ — область, определяемая неравенствами $|v_i|\leqslant L$, $i=1,2,\ldots,s$, а $\bar{D}(n)$ — часть пространства, внешняя к $D(n)$.

В силу соотношения

$$\left|e^{i\alpha}-1-i\alpha+\frac{\alpha^2}{2}\right|\leqslant\frac{|\alpha|^3}{6},$$

имеющего место при всяком вещественном α, имеем

$$\left|\frac{1}{2}q(y_1,\ldots,y_s)+n\left[\bar{f}\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{y_s}{\sqrt{n}}\right)-1\right]\right|\leqslant$$

$$\leqslant n\int\limits_{D(n)}\frac{1}{6}\left(\frac{y_1v_1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{y_sv_s}{\sqrt{n}}\right)^3 d\bar{F}(v_1,\ldots,v_s)+$$

$$+n\int\limits_{\bar{D}(n)}\left(\frac{y_1v_1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{y_sv_s}{\sqrt{n}}\right)^2 d\bar{F}(v_1,\ldots,v_s)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{6}\frac{L}{\sqrt{n}}(|y_1|+\ldots+|y_s|)\,q(y_1,\ldots,y_s)+n\int\limits_{\bar{D}(n)}\left(\frac{y_1v_1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{y_sv_s}{\sqrt{n}}\right)^2 d\bar{F}(v_1,\ldots,v_s)=$$

$$=\frac{L}{6\sqrt{n}}(|y_1|+\ldots+|y_s|)\,q(y_1,\ldots,y_s)+y_1^2\int\limits_{\bar{D}(n)}v_1^2 d\bar{F}(v_1,\ldots,v_s)+$$

$$+2y_1y_2\int\limits_{\bar{D}(n)}v_1v_2 d\bar{F}(v_1,\ldots,v_s)+\ldots+y_s^2\int\limits_{\bar{D}(n)}v_s^2 d\bar{F}(v_1,\ldots,v_s). \qquad (12)$$

Таким образом,

$$|\varrho_n|\leqslant\frac{L}{6\sqrt{n}}(|y_1|+\ldots+|y_s|)\,q(y_1,\ldots,y_s)+y_1^2\int\limits_{\bar{D}(n)}v_1^2 d\bar{F}(v_1,\ldots,v_s)+\ldots$$

$$\ldots+y_s^2\int\limits_{\bar{D}(n)}v_s^2 d\bar{F}(v_1,\ldots,v_s)+\frac{[q(y_1,\ldots,y_s)]^2}{4n}. \qquad (13)$$

Величины

$$\int\limits_{\bar{D}(n)}v_iv_j d\bar{F}(v_1,\ldots,v_s)\qquad(i,j=1,2,\ldots,s) \qquad (14)$$

при $n\to\infty$ стремятся к нулю.

Положим

$$u=\min\left[\sqrt[5]{n},\ \max_{i,}\int\limits_{\bar{D}(n)}v_iv_j d\bar{F}(v_1,\ldots,v_s),\ \sqrt[4]{\frac{\sqrt{n}}{L}}\right].$$

Очевидно, что

$$\frac{u}{\sqrt{n}}\to 0\quad\text{при } n\to\infty$$

и $u\to\infty$ при $n\to\infty$.

Тогда в интервале $|y_i|\leqslant u$ $(i=1,2,\ldots,s)$ имеет место неравенство

$$|\varrho_n|\leqslant K_1\left(\frac{L}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{4}}+K_2\max_{i,j}\int\limits_{\bar{D}(n)}v_iv_j d\bar{F}(v_1,\ldots,v_s)+K_3\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{5}},$$

где K_1, K_2, K_3 — некоторые константы. Отсюда заключаем, что $\varrho_n\to 0$ при $n\to\infty$.

При достаточно малых по модулю α имеет место оценка

$$|e^{\alpha}-1|\leqslant 2\alpha,$$

откуда

$$|I_1|\leqslant\int\limits_{\mathfrak{G}(n)} e^{-\frac{1}{2}q(y_1,\ldots,y_s)}\cdot 2|\varrho_n|\,dy_1\ldots dy_s\leqslant$$

$$\leqslant\left[K_1\left(\frac{L}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{4}}+K_2\max_{i,j}\int\limits_{\overline{D}(n)} v_iv_j d\overline{F}(v_1,\ldots,v_s)+\right. \tag{15}$$

$$\left.+K_3\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{5}}\right]\int\limits_{\mathfrak{G}(n)} e^{-\frac{1}{2}q(y)}\,dy_1\ldots,dy_s\to 0 \quad\text{при}\quad n\to\infty.$$

Для оценки интеграла I_3 воспользуемся следующей леммой.

Пусть дана совокупность точек $(x_{i1},x_{i2},\ldots,x_{is})$ $(i=1,2,\ldots)$ с целочисленными координатами в s-мерном пространстве. Не теряя общности, можем положить, что начало координат $O\,(0,0,\ldots,0)$ принадлежит этой совокупности. При этих предположениях имеет место следующее предложение:

Лемма. *Для того чтобы из совокупности точек с целочисленными координатами*

$$(x_{i1},\ x_{i2},\ldots,\ x_{is})\qquad\qquad (i=1,\ 2\ldots) \tag{16}$$

в s-мерном пространстве путем соответственного суммирования их координат можно было получить совокупность точек, лежащих во всех вершинах s-мерного куба со стороной равной единице, необходимо и достаточно, чтобы все миноры s-го порядка матрицы, составленной из координат точек (16), в своей совокупности были взаимно просты.

Наше требование означает существование таких целых неотрицательных чисел $m_{ij}(i=1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,s)$, чтобы имели место следующие соотношения для некоторого конечного числа $n\geqslant s$ точек данной совокупности (16)

$$(17_1)\quad\left\{\begin{array}{l} m_{11}x_{11}+m_{21}x_{21}+\ldots+m_{n1}x_{n1}=l_1\\ m_{11}x_{12}+m_{21}x_{22}+\ldots+m_{n1}x_{n2}=l_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ m_{11}x_{1s}+m_{21}x_{2s}+\ldots+m_{n1}x_{ns}=l_s\end{array}\right.$$

$$(17_2)\quad\left\{\begin{array}{l} m_{12}x_{11}+m_{22}x_{21}+\ldots+m_{n2}x_{n1}=l_1+1\\ m_{12}x_{12}+m_{22}x_{22}+\ldots+m_{n2}x_{n2}=l_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ m_{12}x_{1s}+m_{22}x_{2s}+\ldots+m_{n2}x_{ns}=l_s\end{array}\right. \tag{17}$$

$$(17_3)\quad\left\{\begin{array}{l} m_{13}x_{11}+m_{23}x_{21}+\ldots+m_{n3}x_{n1}=l_1\\ m_{13}x_{12}+m_{23}x_{22}+\ldots+m_{n3}x_{n2}=l_2+1\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ m_{13}x_{1s}+m_{23}x_{2s}+\ldots+m_{n3}x_{ns}=l_s\end{array}\right.$$

$$
(17_4)\left\{\begin{aligned}
&m_{14}x_{11}+m_{24}x_{21}+\ldots+m_{n4}x_{n1}=l_1+1\\
&m_{14}x_{12}+m_{24}x_{22}+\ldots+m_{n4}x_{n2}=l_2+1\\
&m_{14}x_{13}+m_{24}x_{23}+\ldots+m_{n4}x_{n3}=l_3\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&m_{14}x_{1s}+m_{24}x_{2s}+\ldots+m_{n4}x_{ns}=l_s
\end{aligned}\right. \qquad (17)
$$

$$
\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots
$$

$$
(17_{2^s})\left\{\begin{aligned}
&m_{12^s}x_{11}+m_{22^s}x_{21}+\ldots+m_{n2^s}x_{n1}=l_1+1\\
&m_{12^s}x_{12}+m_{22^s}x_{22}+\ldots+m_{n2^s}x_{n2}=l_2+1\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&m_{12^s}x_{1s}+m_{22^s}x_{2s}+\ldots+m_{n2^s}x_{ns}=l_s+1.
\end{aligned}\right.
$$

Очевидно, что разрешимость совокупности систем уравнений **(17)** эквивалентна разрешимости следующей совокупности s независимых систем по s уравнений относительно a_{ij} $(i=1, 2,\ldots, n;\ j=1, 2,\ldots, s)$

$$
(18_1)\left\{\begin{aligned}
&a_{11}x_{11}+a_{21}x_{21}+\ldots+a_{n1}x_{n1}=1\\
&a_{11}x_{12}+a_{21}x_{22}+\ldots+a_{n1}x_{n2}=0\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&a_{11}x_{1s}+a_{21}x_{2s}+\ldots+a_{n1}x_{ns}=0
\end{aligned}\right.
$$

$$
(18_2)\left\{\begin{aligned}
&a_{12}x_{11}+a_{22}x_{21}+\ldots+a_{n2}x_{n1}=0\\
&a_{12}x_{12}+a_{22}x_{22}+\ldots+a_{n2}x_{n2}=1\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&a_{12}x_{1s}+a_{22}x_{2s}+\ldots+a_{n2}x_{ns}=0
\end{aligned}\right. \qquad (18)
$$

$$
\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots
$$

$$
(18_s)\left\{\begin{aligned}
&a_{1s}x_{11}+a_{2s}x_{21}+\ldots+a_{ns}x_{n1}=0\\
&a_{1s}x_{12}+a_{2s}x_{22}+\ldots+a_{ns}x_{n2}=0\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&a_{1s}x_{1s}+a_{2s}x_{2s}+\ldots+a_{ns}x_{ns}=1.
\end{aligned}\right.
$$

Запишем системы (18_1), (18_2),..., (18_s) в матричной форме

$$
(19_1)\quad (x_{ij})\begin{pmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{n1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}
$$

$$
(19_2)\quad (x_{ij})\begin{pmatrix}a_{12}\\ a_{22}\\ \vdots\\ a_{n2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \qquad (19)
$$

$$
\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots
$$

$$
(19_s)\quad (x_{ij})\begin{pmatrix}a_{1s}\\ a_{\ s}\\ \vdots\\ a_{ns}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}
$$

Доказательство достаточности. Известно (см., напр., [3]), что существуют такие две унимодулярные квадратные целочисленные матрицы: S (порядка s) и N (порядка n), которые приводят матрицу (x_{ij}) к каноническому виду

$$E = S(x_{ij})N, \tag{20}$$

где

$$E = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} \dots 0 & 0 \dots 0 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 \dots \varepsilon_{ss} & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 \end{pmatrix}$$

и ε_{ii} — целые, причем последующие делят предыдущие.

Введем взамен неизвестных a_{ij} неизвестные b_{ij} по следующим формулам

$$\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, s). \tag{21}$$

Введя соотношения (21) в уравнения (18_1), (18_2),..., (18_s), получим

$$\begin{gathered} (x_{ij})N \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (x_{ij})N \begin{pmatrix} b_{1s} \\ b_{2s} \\ \vdots \\ b_{ns} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{22}$$

Умножим равенства (22) слева на матрицу S. Тогда получим

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} \dots 0 & 0 \dots 0 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 \dots \varepsilon_{ss} & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{1i} \\ s_{2i} \\ \vdots \\ s_{si} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 2, \dots, s). \tag{23}$$

Известно (см., напр., [3]), что общие наибольшие делители миноров s-го порядка матрицы (x_{ij}) и матрицы E совпадают с точностью до множителя ± 1. Так как матрица E имеет только один отличный от нуля минор s-го порядка, то имеем

$$\varepsilon_{11} \cdot \varepsilon_{22} \ldots \varepsilon_{ss} = \pm 1.$$

Отсюда следует, что все $\varepsilon_{ii} = \pm 1$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, а значит система (23) разрешима относительно b_{ij} в целых числах.

В силу того, что система (23) эквивалентна системам (18_1), $(18_2), \ldots, (18_s)$, из подстановки (21) получаем решения для a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, s)$ в целых числах.

Доказательство необходимости. Допустим, что общий наибольший делитель матрицы (x_{ij}) $\delta > 1$. Из этого следует, что

$$\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} \ldots \varepsilon_{ss}$$

делится на δ. Тогда хотя бы одно из чисел ε_{ii} отличается от ± 1.

Из системы (23) следует, что $s_{i1}, s_{i2}, \ldots, s_{is}$ делятся на ε_{ii}. Отсюда детерминант

$$\begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & \ldots & s_{1s} \\ s_{21} & s_{22} & \ldots & s_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{i1} & s_{i2} & \ldots & s_{is} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{s1} & s_{s2} & \ldots & s_{ss} \end{vmatrix} \neq 1,$$

что противоречит унимодулярности матрицы S. Таким образом, лемма доказана.

Из приведенной леммы следует, что в случае выполнения условия (s'), для всех i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ найдется такое число j и числа l_i, что вероятности попадания вектора-суммы ζ_j на все вершины некоторого единичного куба будут все положительны, т. е. для всех $i = 1, 2, \ldots, s$ будет

$$P(l_1, l_2, \ldots, l_{i-1}, l_i, l_{i+1}, \ldots, l_s) \times$$
$$\times\ P_j(l_1, l_2, \ldots, l_{i-1}, l_i + 1, l_{i+1}, \ldots, l_s) > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s). \qquad (24)$$

Оценим характеристическую функцию вектора суммы ζ_j. Очевидны следующие s соотношений:

$$f^j(t_1, \ldots, t_s) = \sum_{z_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{z_s=-\infty}^{\infty} e^{i(t_1 z_1 + \ldots + t_s z_s)} P_i(z_1, \ldots, z_s) =$$
$$= \sum_{z_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{z_s=-\infty}^{\infty} e^{i(t_1 z_1 + \ldots + t_{\nu-1} z_{\nu-1} + 2t_\nu z_\nu + t_{\nu+1} z_{\nu+1} + \ldots + t_s z_s)} [P_j(z_1, \ldots, 2z_\nu, \ldots, z_s) +$$
$$+ P_j(\ldots, 2z_\nu + 1, \ldots) e^{it_\nu}]; \quad (\nu = 1, 2, \ldots, s).$$

Отсюда

$$|f^j(t_1,\ldots,t_s)| \leqslant \sum_{z_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{z_s=-\infty}^{\infty} |P_j(z_1,\ldots,2z_\nu,\ldots,z_s)+$$

$$+P_j(z_1,\ldots,2z_\nu+1,\ldots,z_s)\,e^{it_\nu}|\,; \quad (\nu=1,2,\ldots,s)$$

$$|P_j(z_1,\ldots,2z_\nu,\ldots,z_s)+P_j(z_1,\ldots,2z_\nu+1,\ldots,z_s)\,e^{it_\nu}| =$$

$$\sqrt{[P_j(z_1,\ldots,2z_\nu,\ldots,z_s)+P_j(z_1,\ldots,2z_\nu+1,\ldots,z_s)]^2-4P_j(\ldots,2z_\nu,\ldots)\cdot P_j(\ldots,2z_\nu+1,\ldots)\sin^2\frac{t_\nu}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant P_j(\ldots,2z_\nu,\ldots)+P_j(\ldots,2z_\nu+1,\ldots)-2\,\frac{P_j(\ldots,2z_\nu,\ldots)\cdot P_j(\ldots,2z_\nu+1,\ldots)}{P_j(\ldots,2z_\nu,\ldots)+P_j(\ldots,2z_\nu+1,\ldots)}\sin^2\frac{t_\nu}{2}, \quad (25)$$

(последнее в силу неравенства

$$\sqrt{a^2-2ab} \leqslant a-b,$$

которое имеет место при произвольных числах a и b).

Отсюда

$$|f^j(t_1,\ldots,t_s)| \leqslant \sum_{z_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{z_s=-\infty}^{\infty} [P_j(\ldots,2z_\nu,\ldots)+P_j(\ldots,2z_\nu+1,\ldots)] -$$

$$-2\sum_{z_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{z_s=-\infty}^{\infty} \frac{P_j(\ldots,2z_\nu,\ldots)\cdot P_j(\ldots,2z_\nu+1,\ldots)}{P_j(\ldots,2z_\nu,\ldots)+P_j(\ldots,2z_\nu+1,\ldots)}\sin^2\frac{t_\nu}{2} = 1-\delta_{j\nu}\sin^2\frac{t_\nu}{2},$$

где

$$\delta_{j\nu} = 2\sum_{z_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{z_s=-\infty}^{\infty} \frac{P_j(\ldots,2z_\nu,\ldots)\cdot P_j(\ldots,2z_\nu+1,\ldots)}{P_j(\ldots,2z_\nu,\ldots)+P_j(\ldots,2z_\nu+1,\ldots)}.$$

В силу соотношений (24) величины $\delta_{j\nu}>0$ $(\nu=1,2,\ldots,s)$. Из неравенства

$$\frac{P_j(\ldots,2z_\nu,\ldots)\cdot P_j(\ldots,2z_\nu+1,\ldots)}{P_j(\ldots,2z_\nu,\ldots)+P_j(\ldots,2z_\nu+1,\ldots)} \leqslant \frac{1}{2}P_j(\ldots,2z_\nu,\ldots)\,P_j(\ldots,2z_\nu+1,\ldots),\ (\nu=1,2,\ldots,s)$$

следует, что

$$\delta_{j\nu} \leqslant \sum_{z_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{z_s=-\infty}^{\infty} [P_j(\ldots,2z_\nu,\ldots)+P_j(\ldots,2z_\nu+1,\ldots)] = 1, \quad (\nu=1,2,\ldots,s).$$

В интервале $|t| \leqslant \pi$

$$\left|\sin\frac{t}{2}\right| \geqslant \frac{|t|}{\pi},$$

а значит в этом интервале

$$|f^j(t_1,\ldots,t_s)| \leqslant 1-\delta_{j\nu}\frac{t_\nu^2}{\pi^2} \quad (\nu=1,2,\ldots,s). \quad (27)$$

В силу оценок (27) имеем оценку

$$|f^j(t_1,\ldots,t_s)| \leqslant 1-\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{s}\delta_{j\nu}^2 t_\nu^2}{s\pi^2} \leqslant e^{-\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{s} t_\nu^2\delta_{j\nu}}{s\pi^2}}. \quad (28)$$

Оценим теперь интеграл I_3.

$$|I_3| \leqslant \int\limits_{\mathfrak{G}_1(n)} \left|\bar{f}\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{y_s}{\sqrt{n}}\right)\right|^n dy_1\ldots dy_s.$$

Обозначим через N целую часть дроби $\frac{n}{j}$. Так как $|\overline{f}(t_1, \ldots, t_s)| \leqslant 1$, то имеем

$$|I_3| \leqslant \int\limits_{\overline{\mathfrak{G}}_1(n)} \left| f^j\left(\frac{y_1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{y_s}{\sqrt{n}}\right) \right|^N dy_1 \ldots dy_s.$$

В силу оценки (28) имеем

$$|I_3| \leqslant \int\limits_{\overline{\mathfrak{G}}_1(n)} e^{-\frac{N \sum\limits_{\nu=1}^{s}{}' y_\nu^2 \frac{\delta_{j\nu}}{n}}{s\pi^2}} dy_1 \ldots dy_s < \int\limits_{\overline{\mathfrak{G}}(n)} e^{-\frac{\frac{N}{n} \sum\limits_{\nu=1}^{s}{}' y_\nu^2 \delta_{j\nu}}{s\pi^2}} dy_1 \ldots dy_s.$$

Так как

$$N(j) \leqslant n < N(j+1),$$

то

$$|I_3| \leqslant \int\limits_{\overline{\mathfrak{G}}(n)} e^{-\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{s}{}' y_\nu^2 \delta_{j\nu}}{s\pi(j+1)}} dy_1 \ldots dy_s \xrightarrow[\text{при } n \to \infty]{} 0.$$

Соотношения (6), (15) и (31) для $|I_1|$, $|I_2|$, $|I_3|$ доказывают достаточность условия теоремы.

Легко видеть, что при нарушении условия (s') асимптотическое представление (3) не только не имеет силы в смысле равномерной сходимости, которая требуется в нашей теореме, но и вообще является совершенно непригодным для представления вероятностей $P_n(z)$, так как, очевидно, возможные значения векторной суммы будут иметь систематические пропуски.

Авторы выражают глубокую благодарность проф. Б. В. Гнеденко за постановку задачи и ценные указания при ее решении.

Поступило 22.IX 1948.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Гнеденко, О локальной теореме теории вероятностей, Успехи матем. наук, т. III, вып. 3, 1948.

2. Д. Г. Мейзлер, О. С. Парасюк, Е. Л. Рвачева, Многомерная локальная предельная теорема теории вероятностей, ДАН СССР, № 7, т. 60, 1948.

3. Ван-дер-Варден, Современная алгебра, Гостехиздат, 1947, т. 2. стр. 130—132.