№ 1 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ 1949
АКАДЕМИИ НАУК УССР

О самосопряженных расширениях эрмитовых операторов

М. А. Красносельский

Основная теорема о самосопряженных (гипермаксимальных) и максимальных эрмитовых расширениях в унитарном пространстве $\mathfrak{H}$ эрмитова оператора, действующего в пространстве $\mathfrak{H}$, была установлена Дж. Нейманом в предположении плотности в $\mathfrak{H}$ области определения расширяемого оператора.

В последнее время был установлен ряд фактов о самосопряженных расширениях эрмитовых операторов с выходом в расширенное пространство (в основном работы М. А. Наймарка, например [1], [2], [3]). При установлении этих фактов предполагалось, что расширяемый эрмитов оператор A имеет плотную область определения в пространстве $\mathfrak{H}$, в котором он задан. Однако в пространстве $\mathfrak{H}' \supset \mathfrak{H}$, с выходом в которое оператор A расширяется, область определения оператора A, конечно, неплотна. Таким образом, фактически рассматривались расширения операторов с неплотной областью определения (в $\mathfrak{H}'$); требовалось только, чтобы множество значений расширяемого оператора содержалось в замыкании области определения.

Задача построения положительных самосопряженных расширений положительного эрмитова оператора с плотной областью определения, полностью решенная М. Г. Крейном, также привела к рассмотрению расширений эрмитовых операторов с неплотной областью определения для случая, когда расширяемый оператор ограничен. Заметим, что даже факт существования самосопряженных расширений у ограниченного эрмитова оператора не следует из упомянутой выше теоремы Дж. Неймана. В работах М. Г. Крейна [4], [5] был установлен не только факт существования таких расширений, но и ряд более тонких утверждений (существование расширений с сохранением нормы расширяемого оператора, признаки единственности таких расширений).

В настоящей статье устанавливаются: вид эрмитовых расширений эрмитова оператора, существование максимальных эрмитовых расширений, условия существования самосопряженных расширений без предположения плотности области определения расширяемого оператора.

Основные утверждения настоящей работы были приведены без доказательств в нашей заметке [6].

Доказываемые предложения содержат, в частности, теорему Неймана и некоторые утверждения о расширениях с выходом в расширенное пространство.

Самостоятельный интерес, как нам кажется, представляет теорема 8, развивающая некоторые утверждения М. А. Наймарка ([1], теоремы 8 и 9).

Ряд предложений устанавливается с помощью или в терминах раствора двух подпространств — понятия, введенного М. Г. Крейном и автором в [7]. Для полноты изложения из [7] приводится теорема об инвариантности дефектных чисел.

Мы придерживаемся терминологии Ф. Рисса: линейный оператор A, действующий в пространстве $\mathfrak{H}$, называется эрмитовым, если

$$(Af,\ g) = (f,\ Ag)$$

для всех $f, g \in \mathfrak{D}(A)$ *). Эрмитов оператор A называется самосопряженным, если $A^* = A$.

Настоящая работа является частью диссертации, выполненной автором под руководством М. Г. Крейна.

§ 1

Раствор. Пусть $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ — два линейных множества унитарного пространства $\mathfrak{H}$. Ортогональные дополнения в $\mathfrak{H}$ к замыканиям этих множеств $\overline{\mathfrak{L}}_1$ и $\overline{\mathfrak{L}}_2$ будем обозначать соответственно через $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ ($\mathfrak{N}_i = \mathfrak{H} \ominus \overline{\mathfrak{L}}_i$; $i=1, 2$).

Хаусдорфово отклонение единичных сфер линейных множеств $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ называется раствором линейных множеств $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ и обозначается через $\Theta(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$.

Непосредственно из определения следует:

$$\Theta(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2) \leqslant 1 \tag{1.1}$$

и

$$\Theta(\overline{\mathfrak{L}}_1, \overline{\mathfrak{L}}_2) = \Theta(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2).$$

Легко видеть, что раствор линейных множеств $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ определяется формулой

$$\Theta(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2) = \max\left\{\sup_{f\in\mathfrak{L}_1;\|f\|=1} \varrho(f, \mathfrak{L}_2),\ \sup_{f\in\mathfrak{L}_2;\|f\|=1} \varrho(f, \mathfrak{L}_1)\right\}.$$

Расстояние от элемента f до линейного множества $\mathfrak{L}$ может быть определено как формулой

$$\varrho(f, \mathfrak{L}) = \inf_{g\in\mathfrak{L}} \|f-g\|,$$

так и формулой

$$\varrho(f, \mathfrak{L}) = \max_{g\in\mathfrak{N};\|g\|=1} |(f, g)|.$$

Таким образом, раствор линейных множеств $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ может быть записан в форме

$$\Theta(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2) = \sup\{|(f_1, g_2)|,\ |(f_2, g_1)|\},$$

где supremum распространен на все

$$f_i \in \mathfrak{L}_i,\ g_i \in \mathfrak{N}_i;\quad \|f_i\| = \|g_i\| = 1;\quad i=1, 2.$$

---

*) Через $\mathfrak{D}(A)$ и $\mathfrak{R}(A)$ обозначаются, соответственно, область определения и множество значений оператора A.

Supremum не изменится, если его распространить на $f_i \in \overline{\mathfrak{L}}_i$. Полученное тогда выражение для раствора симметрично относительно элементов f_i и g_i подпространств $\overline{\mathfrak{L}}_i$ и $\mathfrak{N}_i$. Отсюда непосредственно следует, что раствор линейных множеств $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ равен раствору их ортогональных дополнений в $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ в $\mathfrak{H}$:

$$\Theta(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2) = \Theta(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2).$$

Размерностью унитарного пространства $\mathfrak{H}$ называется мощность полной нормированной ортогональной системы пространства $\mathfrak{H}$. Для бесконечномерных $\mathfrak{H}$ размерность совпадает с минимальной мощностью всюду плотного в $\mathfrak{H}$ множества.

Лемма 1. *Если*

$$\Theta(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2) < 1,$$

то подпространства $\overline{\mathfrak{L}}_1$ и $\mathfrak{N}_1$ имеют ту же размерность, что и соответственно подпространства $\overline{\mathfrak{L}}_2$ и $\mathfrak{N}_2$.

Доказательство. Допустим, что размерность $\overline{\mathfrak{L}}_1$ меньше размерности $\overline{\mathfrak{L}}_2$. Обозначим через P оператор ортогонального проектирования на $\overline{\mathfrak{L}}_2$. Замыкание проекции $P\overline{\mathfrak{L}}_1$ подпространства $\overline{\mathfrak{L}}_1$ на $\overline{\mathfrak{L}}_2$ имеет размерность не бо́льшую, чем размерность $\overline{\mathfrak{L}}_1$ (для конечномерного $\mathfrak{L}_1$ это очевидно, а для бесконечномерного $\overline{\mathfrak{L}}_1$ следует из того, что проекция плотного в $\overline{\mathfrak{L}}_1$ множества плотна в $P\overline{\mathfrak{L}}_1$, а значит и в $\overline{P\overline{\mathfrak{L}}_1}$). Следовательно, в $\overline{\mathfrak{L}}_2$ найдется элемент $h\,(\|h\| = 1)$, ортогональный ко всем элементам $Pf\,(f \in \overline{\mathfrak{L}}_1)$, но тогда

$$(h, f) = (h, Pf) = 0$$

и элемент h ортогонален $\overline{\mathfrak{L}}_1$. Отсюда следует, что

$$\Theta(\overline{\mathfrak{L}}_1, \overline{\mathfrak{L}}_2) \geqslant 1$$

и, в силу (1,1),

$$\Theta(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2) = 1,$$

что противоречит условию леммы.

Так как и

$$\Theta(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2) < 1,$$

то лемма доказана.

Дефектные числа. Точка λ комплексной плоскости называется точкой регулярного типа для линейного оператора A, если найдется такое положительное k_λ, что

$$\|Af - \lambda f\| \geqslant k_\lambda \|f\| \qquad (f \in \mathfrak{D}(A)).$$

Точки регулярного типа для оператора A образуют открытое множество, так как, если λ_0 — точка регулярного типа для оператора A, то при $|\lambda - \lambda_0| < k_{\lambda_0}$

$$\|Af - \lambda f\| \geqslant \|Af - \lambda_0 f\| - |\lambda - \lambda_0| \cdot \|f\| \geqslant k_\lambda \cdot \|f\| \qquad (f \in \mathfrak{D}(A)),$$

где

$$k_\lambda = k_{\lambda_0} - |\lambda - \lambda_0|.$$

Если λ — точка регулярного типа для оператора A, то множество $\mathfrak{N}_\lambda$ элементов, ортогональных к $\mathfrak{R}(A-\lambda E)$, называется λ-дефектным подпространством.

Теорема 1. *Пусть G — область комплексной плоскости, состоящая из точек регулярного типа для оператора A.*

Тогда размерности дефектных подпространств $\mathfrak{N}_\lambda$ для всех $\lambda \in G$ одинаковы.

Доказательство. Покажем, что для каждой точки $\lambda_0 \in G$ найдется окрестность $W \subset G$ такая, что размерности дефектных подпространств $\mathfrak{N}_\lambda$ для всех $\lambda \in W$ будут равны размерности дефектного подпространства $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$. В силу леммы Гейне-Бореля, отсюда будет следовать утверждение теоремы.

Так как λ_0 — точка регулярного типа для оператора A, то

$$\|Af-\lambda_0 f\| \geqslant k_{\lambda_0}\|f\| \qquad (f \in \mathfrak{D}(A)),$$

где $k_{\lambda_0} > 0$.

Пусть W — окрестность точки λ_0 радиуса $\frac{1}{3}k_{\lambda_0}$, тогда для $\lambda \in W$ и $f \in \mathfrak{D}(A)$

$$\|Af-\lambda f\| > \frac{2}{3}k_{\lambda_0}\|f\|$$

и

$$\|(Af-\lambda f)-(Af-\lambda_0 f)\| < \frac{1}{3}\|Af-\lambda_0 f\|,$$

$$\|(Af-\lambda f)-(Af-\lambda_0 f)\| < \frac{1}{2}\|Af-\lambda f\|.$$

Следовательно, раствор линейных множеств $\mathfrak{L}_\lambda = \mathfrak{R}(A-\lambda E)$ и $\mathfrak{L}_{\lambda_0} = \mathfrak{R}(A-\lambda_0 E)$ не больше $\frac{1}{2}$:

$$\Theta(\mathfrak{L}_\lambda, \mathfrak{L}_{\lambda_0}) \leqslant \frac{1}{2}.$$

В силу леммы 1 размерности подпространств $\mathfrak{N}_\lambda$ для всех $\lambda \in W$ равны размерности подпространства $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$.

Теорема доказана.

Размерность дефектных подпространств $\mathfrak{N}_\lambda$ для $\lambda \in G$ будем называть дефектным числом оператора A в G.

Эрмитовы операторы. Линейный оператор R называется замкнутым, если из

$$f_n \to f, \quad Rf_n \to h \qquad (f_n \in \mathfrak{D}(R),\ n = 1, 2, \ldots)$$

следует

$$f \in \mathfrak{D}(R), \ h = Rf.$$

Оператор $\tilde{A}$ называется расширением оператора A, если

$$\mathfrak{D}(A) \subset \mathfrak{D}(\tilde{A})$$

и при всех $f \in \mathfrak{D}(A)$

$$\tilde{A}f = Af.$$

Оператор A, в свою очередь, будем называть частью оператора $\tilde{A}$, определенной на $\mathfrak{D}(A)$.

Говорят, что оператор A допускает замыкание, если он имеет замкнутые расширения. Если у оператора A существуют замкнутые расширения, то существует минимальное замкнутое расширение, которое называется **замыканием** оператора A и обозначается через $\bar{A}$.

Пусть A — эрмитов оператор. Мы будем предполагать, что A замкнут.

Для эрмитова оператора все точки комплексной плоскости, не лежащие на действительной оси, являются точками регулярного типа. Поэтому эрмитов оператор может иметь не более двух различных дефектных чисел — дефектное число в верхней полуплоскости и дефектное число в нижней полуплоскости; эти числа могут оказаться равными. Если одна из точек вещественной оси является точкой регулярного типа для оператора A (такие операторы называются операторами с „люком"), то множество точек регулярного типа для оператора связано и в силу теоремы 1 у оператора A одно дефектное число; в этом случае также говорят, что у оператора A **равны дефектные числа**.

Легко показать, что эрмитов оператор A самосопряжен тогда и только тогда, когда при любом λ $(\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0)$

$$\mathfrak{R}(A-\lambda E)=\mathfrak{H}.$$

Таким образом, у самосопряженного оператора дефектные числа равны нулю.

Ортогональное дополнение в $\mathfrak{H}$ к замыканию области определения оператора A всюду в дальнейшем мы будем обозначать через $\mathfrak{B}$:

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{H}\ominus\overline{\mathfrak{D}(A)}\,.$$

Множество значений оператора $A-\lambda E$ будем обозначать через $\mathfrak{L}_\lambda$.

Лемма 2. *Пересечение* $\mathfrak{B}\cap\mathfrak{L}_\lambda$ *при* $\mathrm{Im}\,\lambda\neq 0$ *состоит из нуля пространства* $\mathfrak{H}$.

Доказательство. Пусть

$$h=Ag_0-\lambda g_0\in\mathfrak{L}_\lambda\cap\mathfrak{B},$$

тогда

$$Ag_0=h+\lambda g_0$$

и, так как $(h, g_0)=0$, то

$$\mathrm{Im}\,(Ag_0, g_0)=\mathrm{Im}\,\lambda\cdot(g_0, g_0)\,.$$

Но для эрмитовых операторов

$$\mathrm{Im}\,(Ag_0, g_0)=0,$$

следовательно $g_0=0$ и $h=0$. Лемма доказана.

Пусть $P_{\mathfrak{N}_\lambda}$ — оператор ортогонального проектирования на $\mathfrak{N}_\lambda$. Обозначим через $\mathfrak{M}_\lambda$ проекцию подпространства $\mathfrak{B}$ на $\mathfrak{N}_\lambda$: $\mathfrak{M}_\lambda=P_{\mathfrak{N}_\lambda}\mathfrak{B}$.

Теорема 2. *Линейное множество* $\mathfrak{M}_\lambda$ *будет подпространством тогда и только тогда, когда*

$$\Theta(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}_\lambda)<1.$$

Доказательство. Оператор $P_{\mathfrak{N}_\lambda}$ в силу леммы 2 устанавливает однозначное соответствие между элементами $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{M}_\lambda$. Пусть $\mathfrak{M}_\lambda$ — подпространство. Тогда, в силу известной теоремы Банаха (см. напр., [8], стр. 278), оператор B, определенный на $\mathfrak{M}_\lambda$ равенством

$$BP_{\mathfrak{N}_\lambda}h = h \qquad (h \in \mathfrak{B}),$$

непрерывен, то есть

$$\| P_{\mathfrak{N}_\lambda}h \| \geqslant k \| h \| \qquad (h \in \mathfrak{B};\ k > 0)\,.$$

Отсюда

$$\| h - P_{\mathfrak{N}_\lambda}h \|^2 = \| h \|^2 - \| P_{\mathfrak{N}_\lambda}h \|^2 \leqslant (1-k^2) \cdot \| h \|^2$$

и

$$\left\| P_{\mathfrak{N}_\lambda}h - \frac{\| P_{\mathfrak{N}_\lambda}h \|^2}{\| h \|^2} h \right\|^2 \leqslant (1-k^2) \| P_{\mathfrak{N}_\lambda}h \|^2.$$

Из последних двух неравенств следует, что

$$\Theta(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}_\lambda) \leqslant \sqrt{1-k^2}.$$

Пусть теперь

$$\Theta(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}_\lambda) = m < 1.$$

Тогда для любого элемента $h \in \mathfrak{B}$ в частности,

$$\| h - P_{\mathfrak{N}_\lambda}h \| \leqslant m \cdot \| h \|$$

или, что то же,

$$\| h \| \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-m^2}} \| P_{\mathfrak{N}_\lambda}h \|,$$

то есть оператор B непрерывен. Пусть элемент φ_0 принадлежит $\overline{\mathfrak{M}}_\lambda$. Выберем последовательность

$$\varphi_n = P_{\mathfrak{N}_\lambda}h_n \qquad (\varphi_n \in \mathfrak{M}_\lambda,\ h_n \in \mathfrak{B};\quad n = 1, 2, \ldots),$$

такую, что

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi_0\,.$$

Тогда последовательность h_n $(n = 1, 2, \ldots)$ фундаментальна, так как

$$\| h_n - h_m \| \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-m^2}} \| \varphi_n - \varphi_m \|.$$

Пусть

$$\lim_{n\to\infty} h_n = h_0 \in \mathfrak{B}\,.$$

Очевидно,

$$\varphi_0 = P_{\mathfrak{N}_\lambda}h_0\,.$$

Таким образом, $\mathfrak{M}_\lambda = \overline{\mathfrak{M}}_\lambda$.

Теорема доказана.

Доказанное утверждение можно формулировать непосредственно в терминах оператора A.

Теорема 2′. *Для того чтобы линейное множество $\mathfrak{M}_\lambda$ было подпространством, необходимо и достаточно, чтобы не существовали такие* *последовательности элементов* $\varphi_n \in \mathfrak{D}(A)$ *и* $h_n \in \mathfrak{B}$ $(\|h_n\| = 1;\ n = 1, 2, \ldots)$, *что*

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n\| = 0$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \|h_n - A\varphi_n\| = 0.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}_\lambda$ — незамкнутое линейное множество. Тогда, в силу теоремы 2,

$$\Theta(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}_\lambda) = 1.$$

Отсюда, из очевидного неравенства

$$\varrho\left(\frac{P_{\mathfrak{N}_\lambda} h}{\|P_{\mathfrak{N}_\lambda} h\|},\ \mathfrak{B}\right) \leqslant \varrho\left(\frac{h}{\|h\|},\ \mathfrak{M}_\lambda\right) \qquad (h \in \mathfrak{B})$$

следует существование последовательности $h_n \in \mathfrak{B}$ $(\|h_n\| = 1;\ n = 1, 2, \ldots)$ такой, что

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(h_n, \mathfrak{N}_\lambda) = 1. \tag{1.2}$$

Равенству (1.2) эквивалентно равенство

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(h_n, L_\lambda) = 0,$$

из которого следует существование последовательности $\varphi_n \in \mathfrak{D}(A)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ такой что

$$\lim_{n\to\infty} \|h_n - (A\varphi_n - \lambda\varphi_n)\| = 0. \tag{1.3}$$

Если $\lambda = \alpha + i\beta$ $(\beta \neq 0)$, то

$$\|h - (A\varphi_n - \lambda\varphi_n)\|^2 = \|h - (A\varphi_n - \alpha\varphi_n)\|^2 + \beta^2\|\varphi_n\|^2$$

и из (1.3) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n\| = 0$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \|h - A\varphi_n\| = 0.$$

Пусть теперь $\varphi_n \in \mathfrak{D}(A)$, $h_n \in \mathfrak{B}$ $(\|h_n\| = 1;\ n = 1, 2, \ldots)$ — последовательности, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} \|\varphi_n\| = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \|h_n - A\varphi_n\| = 0$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \|h_n - (A\varphi_n - \lambda\varphi_n)\| = 0,$$

то есть

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(h_n, L_\lambda) = 0,$$

чему эквивалентно

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(h_n, \mathfrak{N}_\lambda) = \lim_{n\to\infty} \varrho(h_n, \mathfrak{M}_\lambda) = 1.$$

Таким образом,

$$\Theta(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}_\lambda) = 1$$

и, в силу теоремы 2, линейное множество $\mathfrak{M}_\lambda$ не замкнуто.

Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Линейные множества* $\mathfrak{M}_\lambda$ *при всех* $\lambda\,(\operatorname{Im}\lambda \neq 0)$ *одновременно являются подпространствами или незамкнутыми линейными множествами.*

Это следует из того, что условия теоремы 2 не зависят от λ.

П о л у д е ф е к т н ы е ч и с л а. Подпространство $\mathfrak{N}'_\lambda$ — ортогональное дополнение в $\mathfrak{N}_\lambda$ к $\overline{\mathfrak{M}}_\lambda$ будем называть λ-п о л у д е ф е к т н ы м п о д п р о с т р а н с т в о м о п е р а т о р а A.

Т е о р е м а 3. *Размерности λ-полудефектных подпространств эрмитова оператора A одинаковы для всех λ лежащих в одной из полуплоскостей (верхней или нижней) плоскости комплексной переменной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через P оператор ортогонального проектирования на подпространство $\overline{\mathfrak{D}(A)}$. Оператор PA будет эрмитов, так как при $f,\ g \in \mathfrak{D}(A)$

$$(PAf, g) = (Af, g) = (f, Ag) = (f, PAg).$$

У оператора PA, рассматриваемого в пространстве $\mathfrak{H}' = \overline{\mathfrak{D}(A)}$, область определения $\mathfrak{D}(PA)$ плотна в $\mathfrak{H}'$, так как она совпадает с областью определения $\mathfrak{D}(A)$ оператора A.

Покажем, что λ-полудефектное подпространство $\mathfrak{N}'_\lambda$ оператора A, рассматриваемого в $\mathfrak{H}$, совпадает с λ-дефектным подпространством $\mathfrak{P}_\lambda$ оператора PA, действующего в $\mathfrak{H}'$. Тогда из инвариантности в верхней и нижней полуплоскостях комплексной плоскости дефектных чисел эрмитова оператора PA будет следовать утверждение теоремы.

Действительно, пусть $\varphi \in \mathfrak{N}'_\lambda$, тогда элемент φ ортогонален $\mathfrak{B}$ и, следовательно, $\varphi \in \overline{\mathfrak{D}(A)}$. Значит, $P\varphi = \varphi$. Но тогда

$$(\varphi, PAg - \lambda g) = (\varphi, Ag - \lambda g) = 0 \qquad (g \in \mathfrak{D}(A))$$

и $\varphi \in \mathfrak{P}_\lambda$. Таким образом,

$$\mathfrak{N}'_\lambda \subset \mathfrak{P}_\lambda.$$

Если, наоборот, $\psi \in \mathfrak{P}_\lambda$, то также имеет место $\psi = P\psi$ и, следовательно,

$$(\psi, Ag - \lambda g) = (\psi, PAg - \lambda g) = 0 \qquad (g \in \mathfrak{D}(A)).$$

Значит, и

$$\mathfrak{P}_\lambda \subset \mathfrak{N}'_\lambda.$$

Теорема доказана.

Размерности λ-полудефектных подпространств эрмитова оператора A для чисел λ из одной (верхней или нижней) полуплоскости комплексной плоскости будем называть п о л у д е ф е к т н ы м и ч и с л а м и оператора A в соответствующей полуплоскости.

§ 2

Д р о б н о л и н е й н о е п р е о б р а з о в а н и е. Пусть для линейного оператора A при некоторых γ и δ из

$$\gamma A\varphi + \delta\varphi = 0 \qquad (\varphi \in \mathfrak{D}(A))$$

следует

$$\varphi = 0.$$

Определим на элементах f вида

$$f = \gamma Ag + \delta g \qquad (g \in \mathfrak{D}(A)) \tag{2.1}$$

оператор B равенством

$$Bf = \alpha Ag + \beta g, \tag{2.2}$$

где комплексные числа $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ удовлетворяют условию

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Линейный оператор B называют дробнолинейным преобразованием оператора A и пишут

$$B = (\alpha A + \beta E)\ (\gamma A + \delta E)^{-1}. \tag{2.3}$$

Если оператор B есть дробнолинейное преобразование оператора A, выраженное формулой (2.3), то оператор A есть дробнолинейное преобразование оператора B, выражаемое формулой

$$A = (\delta B - \beta E)\ (-\gamma B + \alpha E)^{-1}.$$

Действительно, решая уравнения (2.1) и (2.2) относительно g и Ag, получим

$$\left. \begin{aligned} g &= \frac{(-\gamma Bf + \alpha f)}{(\alpha\delta - \beta\gamma)} \\ Ag &= \frac{(\delta Bf - \beta f)}{(\alpha\delta - \beta\gamma)} \end{aligned} \right\} \qquad (f \in \mathfrak{D}(B)), \tag{2.4}$$

при этом из

$$-\gamma Bf + \alpha f = 0 \qquad (f \in \mathfrak{D}(B))$$

следует

$$g = 0,$$

значит, в силу (2.1), и

$$f = 0.$$

Если операторы A и B — дробнолинейные преобразования один другого, то из замкнутости одного следует замкнутость другого.

Действительно, пусть оператор A замкнут. Если последовательности $f_n \in \mathfrak{D}(B)$ и Bf_n $(n = 1, 2, \ldots)$ сходятся соответственно к f_0 и h_0, то сходятся и последовательности

$$\left. \begin{aligned} g_n &= \frac{(-\gamma Bf_n + \alpha f_n)}{(\alpha\delta - \beta\gamma)} \\ Ag_n &= \frac{(\delta Bf_n - \beta f_n)}{(\alpha\delta - \beta\gamma)} \end{aligned} \right\} \qquad (g_n \in \mathfrak{D}(A),\ f_n \in \mathfrak{D}(B);\ n = 1, 2, \ldots)$$

соответственно к некоторым элементам g_0 и φ_0. Так как оператор A замкнут, то $g_0 \in \mathfrak{D}(A)$ и $\varphi_0 = Ag_0$. В силу (2.1) и (2.2)

$$\left. \begin{aligned} f_n &= \gamma Ag_n + \delta g_n \\ Bf_n &= \alpha Ag_n + \beta g_n \end{aligned} \right\} \qquad (g_n \in \mathfrak{D}(A),\ f_n \in \mathfrak{D}(B);\ n = 1, 2, \ldots).$$

Переходя к пределу в этих равенствах при $n \to \infty$ получим

$$\left. \begin{aligned} f_0 &= \gamma Ag_0 + \delta g_0 \\ h_0 &= \alpha Ag_0 + \beta g_0 \end{aligned} \right\} \qquad (g_0 \in \mathfrak{D}(A)),$$

откуда следует, что

$$f_0 \in \mathfrak{D}(B), \qquad h_0 = Bf_0.$$

Из доказанного утверждения непосредственно следует, что для замкнутого оператора A линейное множество $\mathfrak{R}(A-\lambda E)$ есть подпространство, если λ — точка регулярного типа для A.

Преобразование Кели. Оператор

$$U_\lambda=(A-\bar{\lambda}E)(A-\lambda E)^{-1} \qquad (\operatorname{Im}\lambda\neq 0)$$

называется преобразованием Кели эрмитова оператора A. Формулы (2.1) и (2.2) для преобразования Кели примут вид

$$\begin{aligned} f&=Ag-\lambda g\\ U_\lambda f&=Ag-\bar{\lambda}g \end{aligned} \qquad (f\in\mathfrak{D}(U_\lambda),\ g\in\mathfrak{D}(A)).$$

Так как $\lambda, \bar{\lambda}$ $(\operatorname{Im}\lambda\neq 0)$ — точки регулярного типа для эрмитового оператора A, то область определения $\mathfrak{D}(U_\lambda)=\mathfrak{R}(A-\lambda E)=\mathfrak{L}_\lambda$ и множество значений $\mathfrak{R}(U_\lambda)=\mathfrak{R}(A-\bar{\lambda}E)=\mathfrak{L}_{\bar{\lambda}}$ оператора U_λ будут подпространствами.

Оператор U_λ изометричен, так как

$$\begin{aligned} \|U_\lambda f\|^2&=(Ag-\bar{\lambda}g, Ag-\bar{\lambda}g)=\|Ag\|^2-(\lambda+\bar{\lambda})(Ag,g)+|\lambda|^2\cdot\|g\|^2=\\ &=(Ag-\lambda g, Ag-\lambda g)=\|f\|^2 \qquad (f\in\mathfrak{D}(U_\lambda)). \end{aligned}$$

Лемма 2. *Для каждого элемента $h\in\mathfrak{B}$ имеет место равенство*

$$U_\lambda P_{\mathfrak{L}_\lambda}h=P_{\mathfrak{L}_{\bar{\lambda}}}h.$$

Доказательство. Так как $U_\lambda\mathfrak{L}_\lambda=\mathfrak{L}_{\bar{\lambda}}$, то достаточно показать, что элемент $h-U_\lambda P_{\mathfrak{L}_\lambda}h$ ортогонален подпространству $\mathfrak{L}_{\bar{\lambda}}$. Это следует из того, что если $\psi\in\mathfrak{L}_{\bar{\lambda}}$, то $\psi=U_\lambda\varphi$, где $\varphi\in\mathfrak{L}_\lambda$; значит

$$(h-U_\lambda P_{\mathfrak{L}_\lambda}h, \psi)=(h, U_\lambda\varphi-\varphi),$$

но, так как в силу (2.4)

$$U_\lambda\varphi-\varphi=g\in\mathfrak{D}(A),$$

то

$$(h-U_\lambda P_{\mathfrak{L}_\lambda}h, \psi)=(h,g)=0.$$

Лемма доказана.

Оператор V. Введем в рассмотрение оператор V равенством

$$VP_{\mathfrak{N}_\lambda}h=P_{\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}}h \qquad (h\in\mathfrak{B}). \tag{2.5}$$

Оператор V определен на $\mathfrak{M}_\lambda$; множеством его значений явл ется $\mathfrak{M}_{\bar{\lambda}}$.

В дальнейшем оператор V играет основную роль.

Из леммы 2 следует

$$\|P_{\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}}h\|^2=\|h\|^2-\|P_{\mathfrak{L}_{\bar{\lambda}}}h\|^2=\|h\|^2-\|P_{\mathfrak{L}_\lambda}h\|^2=\|P_{\mathfrak{N}_\lambda}h\|^2 \qquad (h\in\mathfrak{B}).$$

Таким образом, оператор V изометричен.

Из изометричности оператора V следует, что размерности подпространств $\mathfrak{M}_\lambda$ и $\mathfrak{M}_{\bar{\lambda}}$ равны. Значит, из равенства полудефектных чисел оператора A следует равенство его дефектных чисел; обратное утверждение неверно.

Отметим несколько простых свойств оператора V.

Из теоремы 2 следует, что оператор V замкнут тогда и только тогда, когда

$$\Theta(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}_\lambda) < 1.$$

Эквивалентное утверждение следует из теоремы 2′: оператор V замкнут тогда и только тогда, когда для всякой последовательности

$$\varphi_n \in \mathfrak{D}(A), \quad \|A\varphi_n\| = 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

такой, что

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n\| = 0$$

имеет место

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(A\varphi_n, \mathfrak{B}) > 0.$$

Между прочим, отсюда непосредственно следует, что оператор V замкнут, если эрмитов оператор A ограничен. Замкнутость оператора V очевидна также и в том случае, когда

$$\Theta[\mathfrak{R}(A), P_{\overline{\mathfrak{D}(A)}}\mathfrak{R}(A)] < 1.$$

Обозначим через $\mathfrak{E}$ ортогональное дополнение в $\mathfrak{H}$ к замыканию линейной оболочки множеств $\mathfrak{D}(A)$ и $\mathfrak{R}(A)$. $\mathfrak{E}$ совпадает с множеством элементов $\varphi \in \mathfrak{D}(V)$, для которых $V\varphi = \varphi$. Действительно, если $\varphi \in \mathfrak{E}$, то $(\varphi, Ag - \lambda g) = 0$, следовательно, $\varphi \in \mathfrak{N}_\lambda$, $\varphi \in \mathfrak{N}_{\bar\lambda}$, и $V\varphi = \varphi$; наоборот, из $V\varphi = \varphi$ следует, что $\varphi \in \mathfrak{N}_\lambda \mathfrak{M}_{\bar\lambda}$, тогда

$$(\varphi, Ag - \lambda g) = 0, \quad (\varphi, Ag - \bar\lambda g) = 0 \qquad (g \in \mathfrak{D}(A)),$$

откуда вытекает, что $\varphi \in \mathfrak{E}$.

§ 3

Допустимые расширения. Изометрическое расширение $\tilde U_\lambda$ изометрического оператора U_λ (преобразования Кели эрмитова оператора A) будем называть допустимым расширением, если из

$$\tilde U_\lambda f = f \qquad (f \in \mathfrak{D}(\tilde U_\lambda))$$

следует, что

$$f = 0.$$

Лемма 3. *Если $\tilde U_\lambda$ — допустимое расширение оператора U_λ, то оператор*

$$\tilde A = (\lambda \tilde U_\lambda - \bar\lambda E)\;(\tilde U_\lambda - E)^{-1} \tag{3.1}$$

является эрмитовым расширением эрмитова оператора A.

Доказательство. То, что оператор $\tilde A$ является расширением оператора A, очевидно. Нужно только показать, что $\tilde A$ — эрмитов оператор.

Оператор $\tilde A$ определен на элементах g вида

$$g = \tilde U_\lambda f - f \qquad (f \in \mathfrak{D}(\tilde U_\lambda)), \tag{3.2}$$

на которых он принимает значения

$$\tilde A g = \lambda \tilde U_\lambda f - \bar\lambda f, \tag{3.3}$$

следовательно,

$$\operatorname{Im}(Ag, g) = \operatorname{Im}(\lambda\tilde{U}_\lambda f - \bar{\lambda} f, \tilde{U}_\lambda f - f) =$$

$$= \operatorname{Im}[(\lambda+\bar{\lambda})(f, f) - \lambda(\tilde{U}_\lambda f, f) - \bar{\lambda}(f, \tilde{U}_\lambda f)] = 0.$$

Лемма доказана.

Очевидно, и наоборот, каждому эрмитову расширению $\tilde{A}$ оператора A соответствует изометрическое расширение $\tilde{U}_\lambda$ (преобразование Кели оператора $\tilde{A}$) изометрического оператора U_λ. Таким образом, между эрмитовыми расширениями оператора A и допустимыми изометрическими расширениями оператора U_λ устанавливается взаимнооднозначное соответствие. В частности, для получения самосопряженных расширений оператора A нужно построить допустимые унитарные расширения $\tilde{U}_\lambda$ оператора U_λ, так как для преобразования Кели $\tilde{U}_\lambda$, самосопряженного оператора $\tilde{A}$ должно быть

$$\mathfrak{D}(\tilde{U}_\lambda) = \mathfrak{R}(\tilde{A} - \lambda E) = \mathfrak{H}, \quad \mathfrak{R}(\tilde{U}_\lambda) = \mathfrak{R}(\tilde{A} - \bar{\lambda} E) = \mathfrak{H}.$$

Нами установлено, что для того, чтобы изометрическому (унитарному) расширению $\tilde{U}_\lambda$ преобразования Кели U_λ оператора A соответствовало по (3.1) эрмитово (самосопряженное) расширение эрмитова оператора A, необходимо и достаточно, чтобы оператор $\tilde{U}_\lambda$ был допустимым изометрическим (унитарным) расширением оператора U_λ.

Изучим вначале изометрические расширения оператора U_λ, не являющиеся допустимыми.

Лемма 4. *Если для некоторого изометрического расширения $\tilde{U}_\lambda$ оператора U_λ (не являющегося допустимым) и для некоторого элемента $h \in \mathfrak{D}(\tilde{U}_\lambda)$ имеет место равенство*

$$\tilde{U}_\lambda h = h,$$

то

$$h \in \mathfrak{B}.$$

Доказательство. Если $\tilde{U}_\lambda h = h$, то для всех $f \in \mathfrak{D}(U_\lambda)$

$$(\tilde{U}_\lambda h - h, \ U_\lambda f) = 0,$$

но, так как $U_\lambda f = \tilde{U}_\lambda f$, то отсюда следует, что

$$(h, f - U_\lambda f) = 0$$

и, в силу (3.2),

$$(h, g) = 0 \qquad (g \in \mathfrak{D}(A)).$$

Лемма доказана.

Следствие 1. *Все изометрические расширения $\tilde{U}_\lambda$ оператора U_λ будут допустимыми, если у оператора A область определения плотна в $\mathfrak{H}$, то есть если $\mathfrak{B}$ пусто.*

Теорема 4. *Если для некоторого изометрического расширения $\tilde{U}_\lambda$ (не являющегося допустимым) оператора U_λ и для некоторого элемента $h \in \mathfrak{D}(U_\lambda)$ имеет место равенство*

$$\tilde{U}_\lambda h = h,$$

то

$$\tilde{U}_\lambda P_{\mathfrak{N}_\lambda} h = V P_{\mathfrak{N}_\lambda} h = P_{\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}} h.$$

Доказательство. Из леммы 4 следует, что $h \in \mathfrak{B}$. Так как оператор $\tilde{U}_\lambda$ является расширением оператора U_λ, то

$$\tilde{U}_\lambda P_{\mathfrak{L}_\lambda} h = U_\lambda P_{\mathfrak{L}_\lambda} h$$

и, в силу леммы 4,

$$\tilde{U}_\lambda P_{\mathfrak{L}_\lambda} h = P_{\mathfrak{L}_{\bar{\lambda}}} h.$$

Тогда

$$\tilde{U}_\lambda P_{\mathfrak{N}_\lambda} h = \tilde{U}_\lambda (h - P_{\mathfrak{L}_\lambda} h) = h - P_{\mathfrak{L}_{\bar{\lambda}}} h = -P_{\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}} h.$$

Теорема доказана.

Теорема 4 позволяет выделить из всех изометрических расширений оператора U_λ класс допустимых расширений. Очевидно, это будут те и только те расширения, которые ни на одном элементе из $\mathfrak{M}_\lambda$ не принимают того же значения, что и оператор V. Таким образом, для того, чтобы изометрическому расширению $\tilde{U}_\lambda$ преобразования Кели U_λ оператора A соответствовало по (3.1) эрмитово расширение $\tilde{A}$ оператора A, необходимо и достаточно, чтобы ни для одного элемента $\varphi \in \mathfrak{D}(\tilde{U}_\lambda) \cap \mathfrak{M}_\lambda$ не имело места равенство

$$\tilde{U}_\lambda \varphi = V\varphi.$$

Ниже мы покажем, что такие расширения существуют.

Пусть S и T — такие линейные операторы, что $\mathfrak{D}(S) \cap \mathfrak{D}(T) = 0$. Линейный оператор, принимающий на элементах $\varphi + \psi$ ($\varphi \in \mathfrak{D}(S)$, $\psi \in \mathfrak{D}(T)$) значения $S\varphi + T\psi$, называют прямой суммой операторов S и T и обозначают через $S \dotplus T$.

Непосредственно из определения оператора V и леммы 2 следует, что оператор $U_\lambda \dotplus V$ изометричен и оставляет инвариантным каждый элемент из $\mathfrak{B}$:

$$(U_\lambda \dotplus V)\, h = h \qquad (h \in \mathfrak{B}). \tag{3.4}$$

Оператор $U_\lambda \dotplus V$ будет минимальным изометрическим расширением оператора U_λ из оставляющих инвариантным каждый элемент $h \in \mathfrak{B}$ (в том смысле, что всякое другое изометрическое расширение $\tilde{U}_\lambda$ оператора U_λ, для которого $\tilde{U}_\lambda h = h$ при всех $h \in \mathfrak{B}$, будет расширением оператора $U_\lambda \dotplus V$).

Самосопряженные расширения. Построение изометрического расширения $\tilde{U}_\lambda$ оператора U_λ эквивалентно построению изометрического оператора U с областью определения $\mathfrak{D}(U) \subset \mathfrak{N}_\lambda$ и с множеством значений $\mathfrak{R}(U) \subset \mathfrak{N}_{\bar\lambda}$; при этом

$$\tilde U_\lambda = U_\lambda \dotplus U.$$

Нас интересует, в первую очередь, возможность построения допустимых унитарных расширений $\tilde U_\lambda$ оператора U_λ. Ясно, что такие расширения могут быть только тогда, когда у оператора A равны дефектные числа. Более того, равенство дефектных чисел является и достаточным условием существования унитарных допустимых расширений преобразования Кели оператора A.

Пусть вначале полудефектные числа оператора A равны нулю. Это значит, что

$$\overline{\mathfrak{M}}_\lambda = \mathfrak{N}_\lambda ; \quad \overline{\mathfrak{M}}_{\bar\lambda} = \mathfrak{N}_{\bar\lambda} .$$

В этом случае, очевидно, каждое допустимое унитарное расширение $\tilde U_\lambda$ оператора U_λ определится формулой

$$\tilde U_\lambda = U_\lambda \dotplus \overline{U},$$

где U — изометрический оператор, определенный на $\mathfrak{M}_\lambda$, с множеством значений $\subset \mathfrak{N}_\lambda$, не принимающий ни на одном элементе из $\mathfrak{M}_\lambda$ того же значения, которое принимает оператор V (таким оператором будет, например, оператор $U = -V$).

Пусть теперь известно только, что у оператора A равны дефектные числа. Пусть U'_λ—некоторое унитарное расширение оператора U_λ не являющееся, вообще говоря, допустимым. Мы покажем, что каждое такое расширение можно „исправить", то есть можно при помощи U'_λ построить оператор $\tilde U_\lambda$, являющийся допустимым унитарным расширением оператора U_λ.

Пусть $\mathfrak{B}'$ — подпространство, каждый элемент которого оператор U'_λ оставляет инвариантным. В силу леммы 4

$$\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}.$$

Обозначим через $\mathfrak{M}'_\lambda$ проекцию подпространства $\mathfrak{B}'$ на дефектное подпространство $\mathfrak{N}_\lambda$. Рассмотрим часть U^0_λ оператора U'_λ, определенную на $\mathfrak{H} \ominus \overline{\mathfrak{M}'_\lambda}$. Оператор U^0_λ будет замкнутым допустимым расширением оператора U_λ. В силу леммы 3 ему по (3.1) будет соответствовать замкнутое эрмитово расширение A^0 оператора A.

Заметим, что

$$\overline{\mathfrak{D}(A^0)} \oplus \mathfrak{B}' = \mathfrak{H}. \tag{3.5}$$

Докажем это. Обозначим через V' часть оператора V, определенную на $\mathfrak{M}'_\lambda$. У оператора U^0_λ есть изометрическое расширение $\tilde U^0_\lambda$, оставляющее инвариантным каждый элемент из $\mathfrak{H} \ominus \overline{\mathfrak{D}(A^0)}$ (для построения такого расширения нужно построить оператор V для эрмитова оператора A^0 и воспользоваться (3.4)). Оператор $\tilde U^0_\lambda$ будет изометрическим расширением оператора $U^0_\lambda \dotplus V'$. Так как U'_λ — унитарное замыкание оператора $U_\lambda^0 \dotplus V'$, то оператор U_λ' будет расширением и оператора $\tilde{U}_\lambda^0$. Но оператор U_λ' оставляет инвариантными только элементы подпространства $\mathfrak{B}'$, откуда следует (3.5).

В силу (3.5) оператор U_λ^0 является преобразованием Кели замкнутого эрмитова оператора A^0, полудефектные числа которого равны нулю. Выше мы показали, что в этом случае у оператора U_λ^0 есть допустимые унитарные расширения $\tilde{U}_\lambda$. Эти расширения будут, очевидно, допустимыми унитарными расширениями и оператора U_λ.

Эти рассуждения и формулы (3.2) и (3.3) приводят нас к предложению, являющемуся обобщением основной (в теории расширений эрмитовых операторов с плотной областью определения) теоремы Дж. Неймана.

Теорема 5. *Замкнутый эрмитов оператор A, действующий в унитарном пространстве $\mathfrak{H}$. допускает самосопряженные расширения тогда и только тогда, когда равны его дефектные числа.*

Общая форма самосопряженных расширений $\tilde{A}$ эрмитова оператора A в этом случае дается равенством

$$\tilde{A}(g+\varphi-U\varphi)=Ag+\bar{\lambda}\varphi-\lambda U\varphi, \tag{3.6}$$

где

$$g \in \mathfrak{D}(A), \quad \varphi \in \mathfrak{N}_\lambda,$$

а U — изометрический оператор, для которого

$$\mathfrak{D}(U)=\mathfrak{N}_\lambda, \quad \mathfrak{R}(U)=\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$$

и который ни на одном элементе из $\mathfrak{M}_\lambda$ не принимает того же значения, которое принимает оператор V.

Из этой теоремы следует, что эрмитовы операторы с „люком“ (в частности, ограниченные, положительные) имеют самосопряженные расширения, так как у них равны дефектные числа.

Такие же рассуждения, как и при доказательстве теоремы 5, приводят нас к аналогу второго утверждения Дж. Неймана.

Теорема 6. *Каждый замкнутый эрмитов оператор A, действующий в унитарном пространстве $\mathfrak{H}$, имеет в $\mathfrak{H}$ максимальные эрмитовы расширения.*

Эту теорему можно доказать и проще, расширяя вначале оператор U_λ до U_λ' так, чтобы эрмитов оператор

$$A'=(\lambda U_\lambda'-\bar{\lambda}E)\,(U_\lambda'-E)^{-1}$$

имел плотную в $\mathfrak{H}$ область определения. Для этого, например, достаточно взять оператор

$$U_\lambda'=U\dotplus(-V),$$

так как в этом случае все изометрические расширения оператора U_λ' будут допустимыми изометрическими расширениями.

Расширения с выходом. Будем рассматривать эрмитовы расширения оператора A с неравными дефектными числами, действующего в унитарном пространстве $\mathfrak{H}$, с выходом в пространство $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}'$, то, выбирая пространство $\mathfrak{H}'$ достаточно большой размерности (размерность $\mathfrak{H}'$ должна быть бесконечным кардинальным числом, не меньшим чем каждое дефектное число оператора A, рассматриваемого в пространстве $\mathfrak{H}$), мы добьемся равенства дефектных чисел оператора A, рассматриваемого уже в пространстве $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}'$. Это следует из того, что подпространство $\mathfrak{H}'$ включено в оба дефектные подпространства оператора A, рассматриваемого в пространстве $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}'$. Таким образом, в пространстве $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}'$ мы получаем возможность строить самосопряженные расширения оператора A:

Теорема 7. *Всякий замкнутый эрмитов оператор допускает самосопряженные расширения (возможно, с выходом в расширенное подпространство).*

Подпространства $\mathfrak{N}_\lambda$, $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$ и $\mathfrak{D}(A)$. Формула (3.6) естественно ставит вопрос о линейной зависимости элементов линейных множеств $\mathfrak{N}_\lambda$, $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$ и $\mathfrak{D}(A)$. Некоторый ответ на этот вопрос дают две теоремы М. А. Наймарка ([1], теоремы 8 и 9). Теорема 8 содержит и дополняет эти предложения М. А. Наймарка.

Теорема 8. *Линейные множества $\mathfrak{N}_\lambda$, $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$ и $\mathfrak{D}(A)$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда $\mathfrak{D}(A)$ не плотно в $\mathfrak{H}$.*

В случае, когда $\mathfrak{D}(A)$ не плотно в $\mathfrak{H}$, равенство

$$\varphi + \psi + g = 0,$$

при

$$\varphi \in \mathfrak{N}_\lambda, \quad \psi \in \mathfrak{N}_{\bar\lambda}, \quad g \in \mathfrak{D}(A),$$

имеет место тогда и только тогда, когда существует такой элемент $h \in \mathfrak{B}$, что

$$\alpha. \quad P_{\mathfrak{L}_\lambda} h = \frac{Ag - \lambda g}{\bar\lambda - \lambda},$$

$$\beta. \quad \varphi = P_{\mathfrak{N}_\lambda} h,$$

$$\gamma. \quad \psi = -P_{\mathfrak{N}_{\bar\lambda}} h = -V\varphi.$$

Доказательство. Предположим, что область определения $\mathfrak{D}(A)$ оператора A не плотна в $\mathfrak{H}$. Тогда, в силу леммы 2, и определения оператора V для каждого элемента $h \in \mathfrak{B}$ найдутся элементы

$$\varphi \in \mathfrak{N}_\lambda, \ \psi \in \mathfrak{N}_{\bar\lambda}, \ g \in \mathfrak{D}(A),$$

связанные с элементом h соотношениями α, β, γ, причем

$$h = \varphi + \frac{Ag - \lambda g}{\bar\lambda - \lambda},$$

$$h = -\psi + \frac{Ag - \bar\lambda f}{\bar\lambda - \lambda}.$$

Отсюда непосредственно следует:

$$\varphi + \psi + g = 0,$$

то есть, что линейные множества $\mathfrak{N}_\lambda$, $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$ и $\mathfrak{D}(A)$ линейно зависимы. Достаточность условий α, β, γ доказана.

Для установления необходимости этих условий заметим, что равенству

$$\varphi + \psi + g = 0$$

при

$$\varphi \in \mathfrak{N}_\lambda, \quad \psi \in \mathfrak{N}_{\bar\lambda}, \quad g \in \mathfrak{D}(A)$$

равносильно, при $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$,

$$\frac{Ag - \lambda g}{\bar\lambda - \lambda} + \varphi = \frac{Ag - \bar\lambda g}{\bar\lambda - \lambda} - \psi \tag{3.7}$$

и, так как

$$(Ag - \lambda g, \varphi) = 0, \quad (Ag - \bar\lambda g, \psi) = 0$$

и

$$\|Ag - \lambda g\| = \|Ag - \bar\lambda g\|,$$

то

$$\|\varphi\| = \|\psi\|. \tag{3.8}$$

Пусть W — линейный оператор, определенный на элементах λ вида $k\varphi$ формулой

$$W(k\varphi) = -k\psi.$$

Оператор $U_\lambda \dotplus W$ в силу (3.8) будет изометрическим расширением оператора U_λ. Оператор $U_\lambda \dotplus W$ не будет допустимым расширением оператора U_λ, так как

$$(U_\lambda \dotplus W)\left(\frac{Ag - \lambda g}{\bar\lambda - \lambda} + \varphi\right) = \frac{Ag - \bar\lambda g}{\bar\lambda - \lambda} - \psi$$

и из (3.7) следует, что элемент

$$h = \frac{Ag - \lambda g}{\bar\lambda - \lambda} + \varphi \tag{3.9}$$

инвариантен для оператора $U_\lambda \dotplus W$. Из леммы 4 следует тогда, что область определения оператора A не плотна в пространстве $\mathfrak{H}$ и что $h \in \mathfrak{B}$.

Из соотношений (3.7) и (3.9) и определения оператора V вытекают условия α, β, γ.

Теорема доказана.

Заметим, что элемент $h \in \mathfrak{B}$, фигурирующий в условиях α, β, γ теоремы 8, определяется однозначно.

Теорема 9. *Каждый элемент $\tilde g$ области определения $\mathfrak{D}(\tilde A)$ эрмитова расширения $\tilde A$ оператора A, имеющий представление в силу теоремы 5*

$$\tilde g = g + \varphi - U\varphi,$$

где

$$g \in \mathfrak{D}(A), \quad \varphi \in \mathfrak{D}(U) \subset \mathfrak{N}_\lambda, \quad U\varphi \in \mathfrak{N}_{\bar\lambda},$$

однозначно определяет „порождающие“ его элементы $g \in \mathfrak{D}(U)$, $\varphi \in \mathfrak{N}_\lambda$.

Доказательство. Пусть для элемента $\tilde{g}$ имеют место два представления

$$\tilde{g} = g_1 + \varphi_1 - U\varphi_1,$$
$$\tilde{g} = g_2 + \varphi_2 - U\varphi_2,$$

где

$$g_1,\ g_2 \in \mathfrak{D}(A);\quad \varphi_1,\ \varphi_2 \in \mathfrak{N}_\lambda.$$

Тогда

$$(g_1 - g_2) + (\varphi_1 - \varphi_2) - U(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \tag{3.10}$$

и из предыдущей теоремы следует, что

$$U(\varphi_1 - \varphi_2) = V(\varphi_1 - \varphi_2).$$

В силу теоремы 5 из этого равенства вытекает

$$\varphi_1 = \varphi_2.$$

Значит и $g_1 = g_2$.

Теорема доказана.

Поступило 27. IX 1948 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Наймарк, О самосопряженных расширениях второго рода симметрического оператора, Известия АН СССР, серия математическая, том 4, № 1 (1940).

2. М. А. Наймарк, Спектральные функции симметрического оператора, Известия АН СССР, серия математическая, том 4, № 3 (1940).

3. М. А. Наймарк, О спектральных функциях симметрического оператора, Известия АН СССР, серия математическая, том 7, № 6 (1943).

4. М. Г. Крейн, О самосопряженных расширениях ограниченных и полуограниченных операторов, ДАН СССР, том XLVIII, № 5 (1945).

5. М. Г. Крейн, Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения, Математический сборник, том 20 (62), № 3 (1947).

6. М. А. Красносельский, О расширении эрмитовых операторов с неплотной областью определения, ДАН СССР, том LIX, № 1 (1948).

7. М. Г. Крейн и М. А. Красносельский, Основные теоремы о расширении эрмитовых операторов и некоторые их применения к теории ортогональных полиномов и проблеме моментов, Успехи математических наук, том II, выпуск 3 (19) (1947).

8. Ф. Хаусдорф, Теория множеств, ОНТИ, М.—Л. (1937).