№ 1 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ 1949
АКАДЕМИИ НАУК УССР

К проблеме типа односвязной римановой поверхности

Л. И. Волковысский

Как известно, метод склеивания в применении к проблеме типа односвязной римановой поверхности состоит в следующем: сперва при помощи разного рода сечений данная открытая односвязная риманова поверхность F разбивается на части, которые квазиконформно деформируются и отображаются на некоторые плоские области; затем граничные точки этих областей, соответствующие одинаковым точкам поверхности F идентифицируются, после чего вводится подходящая неевклидова метрика или строится подходящее исчерпание указанных областей различными семействами линий, что позволяет с помощью признака параболического типа Альфорса и аналогичного признака гиперболического типа определять во многих случаях тип исходной поверхности F (см., напр., [1]).

В настоящей статье, являющейся в основном извлечением из моей докторской диссертации, написанной под руководством академика М. А. Лаврентьева, рассматриваются случаи разбивки поверхностей на бесконечное число частей, легко квазиконформно отображаемых на прямолинейные полосы. Это приводит к задачам на склеивание бесконечного числа полос (см. ниже, п. 1). С помощью признака Альфорса удается получить достаточное условие для параболического типа такого склеивания, тем самым для параболического типа исходных римановых поверхностей.

§ 1. ЗАДАЧА НА СКЛЕИВАНИЕ БЕСКОНЕЧНОГО ЧИСЛА ПОЛОС

1. Постановка задачи. Пусть $\varphi_n(t)$, $(n=1, 2,...)$ — произвольная последовательность функций, определенных на интервале $(0, \infty)$ и имеющих всюду положительные производные $\varphi'_n(t)>0$, удовлетворяющие в окрестности каждой точки t условию Гельдера с некоторым показателем δ, $0<\delta<1$. Пусть далее функции $\varphi_n(t)$ обращаются в нуль в одной и той же точке t_0:

$$\varphi_n(t_0)=0 \tag{1}$$

и удовлетворяют предельным соотношениям

$$\lim_{t\to 0}\varphi_n(t)=-\infty, \quad \lim_{t\to\infty}\varphi_n(t)=\infty\,. \tag{2}$$

Каждой функции $\varphi_n(t)$ поставим в соответствие в плоскости $z=x+iy$ две прямолинейные полосы: полосу S_n,

$$n-1<y<n \tag{3}$$

и симметричную к ней относительно действительной оси полосу

$$n-1<-y<n. \tag{3'}$$

Условимся через (x_n) обозначать любую из граничных точек полос S_n и S'_n, имеющую абсциссу

$$x_n = \varphi_n(t). \tag{4}$$

Будем теперь склеивать наши полосы в единую риманову поверхность, требуя при этом, чтобы всякие две точки (x_n) и (x_{n+1}), лежащие на общей граничной прямой полос S_n и S_{n+1} или полос S'_n и S'_{n+1}, переходили в одну общую точку, равно как и каждая пара точек (x_1), (x_2), лежащих на общей граничной прямой полос S_1 и S'_1.

Из общих теорем квазиконформных отображений следует возможность конформного отображения всех рассматриваемых полос на „полосообразные области", однолистно заполняющие некоторую односвязную риманову поверхность, притом так, чтобы при этом происходило требуемое выше склеивание. Определение типа поверхности склеивания и составляет порождаемую системой функций $\varphi_n(t)$ задачу на склеивание бесконечного числа полос *).

2. Признак параболического типа. Желая воспользоваться признаком Альфорса, построим сперва семейство линий Γ_y, $0 < y < \infty$, концентрически заполняющих полосы S_n и S'_n; при этом подлежащие склеиванию точки идентифицируются. Каждую линию Γ_y определим как совокупность отрезков, получаемых следующим образом: из точки $z=iy$, $y>0$, проводим по направлению к оси x-ов два отрезка, расположенные под углом 45° к мнимой оси; эти отрезки продолжаем до встречи с ближайшей прямой $z=in$ в некоторой точке $\xi_n(y)$ — справа и $\tilde{\xi}_n(y)$ — слева. Из точек, соответствующих в нашей задаче на склеивание точкам $\xi_n(y)$ и $\tilde{\xi}_n(y)$, проводим новые отрезки, соответственно параллельные старым, до встречи в точках $\xi_{n-1}(y)$ — справа и $\tilde{\xi}_{n-1}(y)$ — слева, со следующей прямой $z=i(n-1)$ и т. д. до встречи с осью x-ов. Проводя симметричное построение снизу от точки $z=-iy$, получим совокупность отрезков, составляющих линию Γ_y (рис. 1).

Подсчитаем величину

$$L(y) = \int\limits_{\Gamma_y} \frac{dy}{dn}\, ds, \tag{5}$$

где ds — элемент линии Γ_y и dn — элемент нормали к ней, идущий до встречи с линией Γ_{y+dy}. Пусть

$$n-1 < y < n. \tag{6}$$

Обозначая через Γ_{yk} отрезок линии Γ_y, лежащий в полосе S_k справа

---

*) Относительно ограничений, налагаемых на функции склеивания, см. [1]. Правда, там требуется условие Гельдера для второй производной, однако, как в устной беседе заметил академик Лаврентьев, можно ограничиться условием Гельдера для первой производной от функции склеивания и даже более, одним только требованием ее положительности и непрерывности. К этому вопросу мы предполагаем вернуться в другом месте.

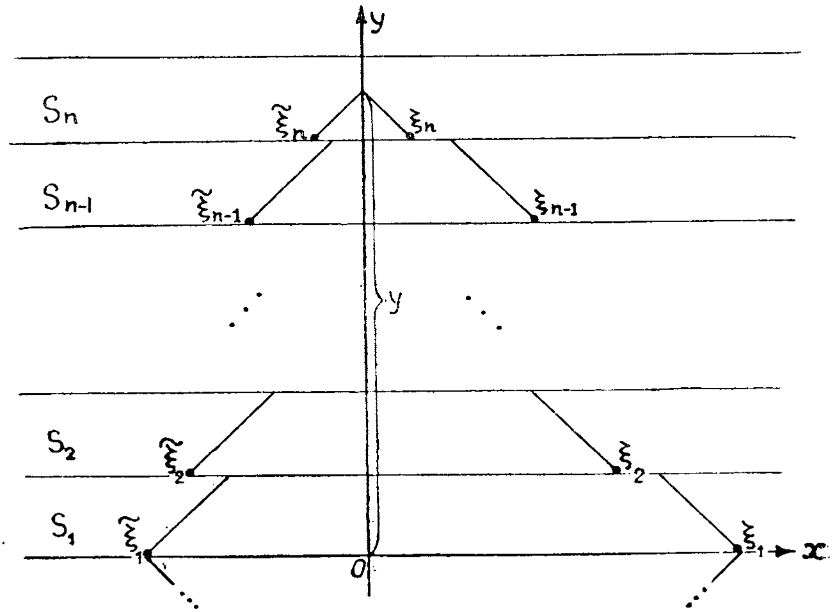

Рис. 1.

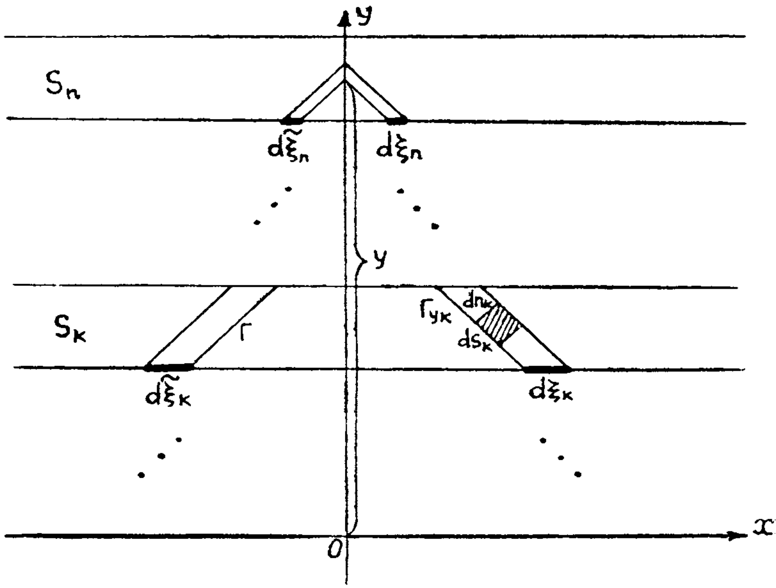

Рис. 2.

от мнимой оси, через ds_k — элемент отрезка Γ_{yk} и через dn_k - соответствующий элемент нормали, будем иметь (рис. 2)

$$\int\limits_{\Gamma_{yk}} \frac{dy}{dn_k} ds_k = \sqrt{2}\,\frac{dy}{d\xi_k} \int\limits_{\Gamma_{yk}} ds_k = 2\,\frac{dy}{d\xi_k}.$$

В силу (6) $dy=d\xi_n$, поэтому для соответствующей части $L_{\mathrm{I}}(y)$ величины $L(y)$, приходящейся на первый квадрант, имеем

$$L_{\mathrm{I}}(y)<2\sum_{k=1}^{n}\frac{d\xi_n}{d\xi_k}.$$

Аналогично для части $L_{\mathrm{II}}(y)$ величины $L(y)$, приходящейся на второй квадрант, имеем

$$L_{\mathrm{II}}(y)<2\sum_{k=1}^{n}\frac{d\tilde{\xi}_n}{d\tilde{\xi}_k},$$

откуда, учитывая еще вторую половину линии Γ_y, расположенную в нижней полуплоскости, получаем для всей величины $L(y)$ оценку

$$L(y)<4\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{d\xi_n}{d\xi_k}+\frac{d\tilde{\xi}_n}{d\tilde{\xi}_k}\right). \tag{7}$$

Предположим теперь, что для каждого значения $n=1,\ 2,\ldots$ существует конечная верхняя граница

$$m_n=\sup_{0<t<\infty}\frac{\varphi'_{n+1}(t)}{\varphi'_n(t)}. \tag{8}$$

Тогда для всех y, $0<y<\infty$ и всех $k=1,2,\ldots$

$$\frac{d\xi_{k+1}}{d\xi_k}\leqslant m_k,$$

следовательно,

$$\frac{d\xi_n}{d\xi_k}=\frac{d\xi_n}{d\xi_{n-1}}\cdot\frac{d\xi_{n-1}}{d\xi_{n-2}}\cdots\frac{d\xi_{k+1}}{d\xi_k}\leqslant m_{n-1}m_{n-2}\ldots m_k,$$

или, полагая

$$p_n=m_1m_2\ldots m_n, \tag{9}$$

имеем

$$\frac{d\xi_n}{d\xi_k}\leqslant\frac{p_{n-1}}{p_{k-1}}.$$

Аналогично имеем

$$\frac{d\tilde{\xi}_n}{d\tilde{\xi}_k}\leqslant\frac{p_{n-1}}{p_{k-1}},$$

следовательно, полагая еще $p_0=1$, имеем

$$L(y)<8\sum_{k=1}^{n}\frac{p_{n-1}}{p_{k-1}}.$$

Рассматривая все значения y из интервала (6), будем иметь

$$\int_{n-1}^{n}\frac{dy}{L(y)}>\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{p_{n-1}}{p_{k-1}}}=\frac{1}{8}\cdot\frac{\frac{1}{p_{n-1}}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k-1}},$$

отсюда следует, что интеграл ($y_0>0$ берется произвольно)

$$\int_{y_0}^{\infty} \frac{dy}{L(y)} \tag{10}$$

расходится, если расходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{p_{n-1}}}{\frac{1}{p_0}+\frac{1}{p_1}+\ldots+\frac{1}{p_n}},$$

для чего, по известной теореме о расходящихся рядах, достаточна расходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p_n}. \tag{11}$$

Как известно, расходимость интеграла (10) несовместима с гиперболическим типом односвязной римановой поверхности. Это позволяет формулировать следующую теорему:

Теорема 1. *Для того чтобы открытая односвязная риманова поверхность, получаемая при конформном склеивании бесконечного числа прямолинейных полос с функциями склеивания параметрически определяемыми функциями $\varphi_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$ удовлетворяющими перечисленным выше условиям, была параболического типа, достаточна расходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n},$$

где величина p_n *определяется с помощью формул (8), (9).*

3. Два примера. Мы скажем, что последовательность функций $\varphi_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$, определяющая задачу на склеивание бесконечного числа полос, порождается функцией $f(t)$ и последовательностью положительных чисел λ_n, если

$$\varphi_n(t) = f(\lambda_n t) - f(\lambda_n t_0). \tag{12}$$

Первый пример. Пусть

$$f(t) = \ln\ln(1+t), \tag{13}$$

λ_n — произвольная последовательность положительных чисел и $\varphi_n(t)$ — последовательность функций (12), определяющая задачу на склеивание бесконечного числа полос.

Элементарное исследование функции (13) показывает, что для всяких двух положительных чисел $\alpha<\beta$ и всех значений t, $0 \leqslant t \leqslant \infty$, выполняется соотношение

$$1 \leqslant \frac{\alpha f'(\alpha t)}{\beta f'(\beta t)} < \frac{\beta}{\alpha}, \tag{14}$$

где равенство слева достигается только для $t=0$ и $t=\infty$.

Предположим, что λ_n монотонно возрастают:

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots$$

Из (14) для наших функций $\varphi_n(t)$ следует, что

$$m_n = \sup_{0 \leqslant t \leqslant \infty} \frac{\varphi'_{n+1}(t)}{\varphi'_n(t)} = \sup_{0 \leqslant t \leqslant \infty} \frac{\lambda_{n+1} f'(\lambda_{n+1} t)}{\lambda_n f'(\lambda_n t)} = 1,$$

следовательно, величина

$$p_n = 1$$

и ряд (11) расходятся.

Предположим теперь, что

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \geqslant \ldots$$

Тогда из (14) следует, что

$$m_n \leqslant \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}$$

(равенство только для $\lambda_{n+1} = \lambda_n$), следовательно

$$p_n = m_1 m_2 \ldots m_n \leqslant \frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}}$$

и ряд (11) расходится, если расходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n.$$

На основании теоремы 1 получаем следующую теорему:

Теорема 2. *Открытая односвязная риманова поверхность, получаемая при конформном склеивании бесконечного числа прямолинейных полос с функциями склеивания $\varphi_n(t)$, определяемыми по формуле (12), с функцией $f(t)$:*

$$f(t) = \ln \ln (1+t)$$

и некоторой последовательностью положительных чисел λ_n, всегда параболического типа, если

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots \tag{15}$$

или

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \geqslant \ldots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty. \tag{16}$$

Второй пример. Пусть теперь последовательность (12) определяется с помощью функции

$$f(t) = -\ln \ln \operatorname{cth}^2 t. \tag{17}$$

Элементарное исследование показывает, что для всяких двух положительных чисел $\alpha < \beta$ и всех значений t, $0 \leqslant t \leqslant \infty$, выполняется соотношение

$$\frac{\alpha}{\beta} \leqslant \frac{\alpha f'(\alpha t)}{\beta f'(\beta t)} \leqslant 1, \tag{18}$$

где равенство слева — только для $t = 0$ и справа — только для $t = \infty$.

Повторяя те же рассуждения, что выше, приходим к следующей теореме:

Теорема 3. *Открытая односвязная риманова поверхность, получаемая при конформном склеивании бесконечного числа прямолинейных полос с функциями склеивания $\varphi_n(t)$, определяемыми по формуле (12), с функцией $f(t)$,*

$$f(t) = -\ln\ln \operatorname{cth}^2 t$$

и некоторой последовательностью положительных чисел λ_n всегда параболического типа, если

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \geqslant \ldots \tag{19}$$

или

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty. \tag{20}$$

Примечание. Используя квазиконформное отображение с ограниченной характеристикой, можно ослабить требование монотонного изменения последовательностей λ_n, участвующих в теоремах 2 и 3.

§ 2. ПРИЛОЖЕНИЕ К ПРОБЛЕМЕ ТИПА ОДНОСВЯЗНОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

I. Класс поверхностей Δ_1

4. Описание класса поверхностей Δ_1. Пусть a_n, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ есть произвольная система точек, расположенных на действительной оси плоскости w и удовлетворяющих условию

$$a_{2n} < a_{2n+1}\,. \tag{1}$$

Поставим в соответствие каждой паре точек a_n, a_{n+1} область G_n, состоящую из верхней полуплоскости $J(w) > 0$ — для четных n и нижней полуплоскости $J(w) < 0$ — для нечетных n, и, кроме того, логарифмического конца *), приклеенного к этим полуплоскостям вдоль отрезка Δ_n, заключенного между точками a_n, a_{n+1} (рис. 3). Склеивая каждую пару обла-

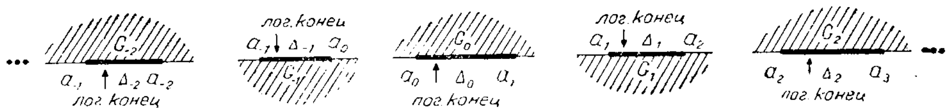

Рис. 3.

стей G_n, G_{n+1} вдоль их общей граничной полупрямой, выходящей из точки a_{n+1}, получим некоторую односвязную риманову поверхность F. Совокупность таких поверхностей, соответствующих всевозможным указанным системам точек a_n, будем называть классом поверхностей Δ_1 **).

---

*) Логарифмическим концом называется каждая из половинок поверхности логарифмической функции $\ln\frac{w-a}{w-b}$ (или $\ln(w-a)$), на которые она распадается, если на одном из ее листов провести разрез по простой гладкой дуге, соединяющей обе ее точки ветвления.

**) Класс Δ_1 образует подкласс класса поверхностей Δ, имеющих над каждой ограниченной частью плоскости w только логарифмические точки ветвления (см. [2]).

5. Признак параболического типа. Определение типа произвольной поверхности F класса $\varDelta_1$ легко приводится к задаче на склеивание бесконечного числа полос, где, однако, функции склеивания для полос, симметричных относительно действительной оси (см. п. 1) вообще разные.

Функция

$$z = \ln \frac{w - a_n}{w - a_{n+1}} \tag{2}$$

отображает область G_n на полосу шириной π, расположенную в плоскости $z = x + iy$, причем точки, расположенные на граничных полупрямых области G_n, выходящих из точек a_n, a_{n+1}, на расстоянии τ от этих точек, в плоскости z будут иметь абсциссу

$$x_n(\tau) = \ln \ln \left(1 + \frac{\varDelta_n}{\tau} \right). \tag{3}$$

Отображая все области G_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ на такие полосы, примыкающие друг к другу в том же порядке, как области G_n на F, мы придем к некоторой задаче на склеивание бесконечного числа полос (теперь ширины π, что, очевидно, не существенно) с функциями склеивания, определяемыми параметрически уравнениями (3). В случае, когда

$$\varDelta_{-n} = \varDelta_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

получаем симметричную задачу на склеивание бесконечного числа полос, рассмотренную в предыдущем параграфе (полоса, соответствующая области G_0, играет при этом роль склеенных полос S_1, S_1', рассмотренных в п. 1). Подобно первому примеру п. 3, в получаемой при условии (4) симметричной задаче на склеивание мы имеем дело с порождающей функцией

$$f(t) = \ln \ln (1 + t), \quad t = \frac{1}{\tau}, \quad 0 < t < \infty, \tag{5}$$

последовательностью значений

$$\lambda_n = \varDelta_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

и дополнительному еще значению $\lambda_0 = \varDelta_0$, соответствующему полосе, получаемой при отображении области G_0.

На основании теоремы 2 можем сформулировать следующую теорему:

Теорема 4. *Поверхность F класса $\varDelta_1$, отрезки $\varDelta_n$, $\varDelta_{-n}$ которой удовлетворяют условию симметрии*

$$\varDelta_{-n} = \varDelta_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

и одному из условий

$$\left\{ \begin{array}{l} \varDelta_1 \leqslant \varDelta_2 \leqslant \ldots \leqslant \varDelta_n \leqslant \ldots, \\ \varDelta_1 \geqslant \varDelta_2 \geqslant \ldots \geqslant \varDelta_n \geqslant \ldots, \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varDelta_n = \infty \end{array} \right. \tag{7}$$

всегда параболического типа.

II. КЛАСС ПОВЕРХНОСТЕЙ $F^{(\omega)}$

6. Описание класса поверхностей $F^{(\omega)}$. Пусть a_n, $n=0$, ± 1, ± 2,... есть произвольная система точек, расположенных на действительной оси плоскости w и удовлетворяющих условию

$$\begin{cases} \ldots < a_{-2} < a_{-1} < a_0 < a_1 < a_2 < \ldots, \\ \lim\limits_{n\to\pm\infty} a_n = \pm\infty. \end{cases} \tag{8}$$

Обозначим через F поверхность, состоящую из верхней полуплоскости $J(w)>0$ и логарифмических концов, приклеенных к каждому ее граничному отрезку Δ_n, заключенному между точками a_n и a_{n+1}. Совокупность таких поверхностей F, соответствующих всевозможным системам точек a_n, удовлетворяющим условию (8), будем называть классом поверхностей $F^{(\omega)}$ *).

7. Признак параболического типа. Обозначим через G область, состоящую из вертикальной полуполосы G', опирающейся на отрезок Δ, расположенный на действительной оси, и логарифмического конца G'', приклеенного к G' вдоль Δ. Легко построить квазиконформное отображение, с равномерно (независимо от Δ) ограниченной характеристикой, области G на полосу шириной π, расположенную в плоскости $z=x+iy$ (сперва отображаем логарифмический конец G'' на нижнюю полуплоскость вспомогательной плоскости ζ; затем при помощи косинуса отображаем вертикальную полуполосу G', сперва на полуплоскость, затем при помощи логарифмической функции на полосу шириной π, примыкающую к нижней полуплоскости $J(\zeta)<0$; легко производится склеивание полосы с полуплоскостью, причем получается указанное, не зависимое от Δ, ограничение для характеристики; наконец, полученную после склеивания полуплоскость отображаем конформно на полосу шириной π, расположенную в плоскости z). При указанном квазиконформном отображении G на полосу граничным точкам области G, отстоящим от концов Δ на расстоянии t, соответствуют точки z с абсциссой

$$x(t) = -\ln\ln \operatorname{cth}^2\frac{\pi t}{\Delta}. \tag{9}$$

Отображая указанным образом области G_n, соответствующие F, на полосы шириной π, заполняющие плоскость z, приходим к задаче на склеивание бесконечного числа полос с функциями склеивания, параметрически определяемыми уравнением (9) при $\Delta=\Delta_n$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

В случае, когда

$$\Delta_{-n} = \Delta_n$$

---

*) Класс $F^{(\omega)}$ образует подкласс более общего класса поверхностей $F^{(e)}$, состоящего из верхней полуплоскости $J(w)>0$ и бесконечного числа логарифмических концов, приклеенных ко всем интервалам смежности замкнутого множества точек (e), расположенного на границе этой полуплоскости.

получаем симметричную задачу на склеивание бесконечного числа полос, рассмотренную выше, и на основании теоремы 3 получаем следующую теорему:

Теорема 5. *Поверхность F класса $F^{(\omega)}$, отрезки Δ_n которой удовлетворяют условию симметрии*

$$\Delta_{-n}=\Delta_n, \quad n=1, 2, \ldots \tag{10}$$

и одному из условий

$$\begin{cases} \Delta_1 \leqslant \Delta_2 \leqslant \ldots \leqslant \Delta_n \leqslant \ldots, \\ \Delta_1 \geqslant \Delta_2 \geqslant \ldots \geqslant \Delta_n \geqslant \ldots, \end{cases} \tag{11}$$

всегда параболического типа.

В самом деле, в силу (9) имеем $\lambda_n = \dfrac{\pi}{\Delta_n}$, поэтому расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\lambda_n}$, требуемая в условии (20) теоремы 3, следует из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_n$, которая в свою очередь вытекает из структуры поверхностей класса $F^{(\omega)}$.

Примечание. Можно предполагать, что для параболического типа поверхностей классов Δ_1 и $F^{(\omega)}$ достаточно одно только условие симметрии

$$\Delta_{-n} = \Delta_n .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Волковысский, К проблеме типа односвязной римановой поверхности, Матем. сб., т. 18 (60), 2, 1946.

Поступило 22.IX 1948.