№ 1 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ 1949
АКАДЕМИИ НАУК УССР

О почти периодических функциях Левитана

Б. Я. Левин

Введение

В. Степанов, Г. Вейль и А. Безикович [1], [2] обобщили понятие о почти периодической функции, вводя различными способами норму для функций, определенных на всей числовой оси.

Классы обобщенных почти периодических функций совпадают с замыканием по соответствующей норме множества всех почти периодических полиномов, т. е. всех функций вида

$$P(t)=\sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\lambda_k t} \quad (\lambda_k \text{ — вещественные числа}). \tag{0.10}$$

С. Бохнер дал следующее определение почти периодической функции, эквивалентное определению Г. Бора:

Функция $f(t)$ $(-\infty<t<\infty)$ называется почти периодической, если множество функций $\{f(t+\tau)\}$ (τ — параметр, $-\infty<\tau<\infty$) условно компактно в смысле равномерной сходимости на всей числовой оси *).

Это определение дало возможность обобщить понятие о почти периодической функции на функции, определенные на произвольных группах, и развить теорию таких функций [3], [4].

В 1938 г. Б. М. Левитан дал принципиально новое обобщение теории почти периодических функций, определенных на числовой оси [5], [6], рассматривая ε-смещения функции, действующие не на всей оси, а лишь на некотором конечном интервале.

Число τ названо им ε-смещением функции $f(t)$ на интервале $(-N, N)$ или ε, N-смещением, если

$$|f(t+\tau)-f(t)|<\varepsilon \quad \text{при } |t|<N. \tag{0.20}$$

Определение 1. *Непрерывная функция* $f(t)$ $(-\infty<t<\infty)$ *называется почти периодической в смысле Б. Левитана, если*

а) каждой паре чисел $\varepsilon>0$ *и* $N>0$ *можно поставить в соответствие относительно плотное множество* $E_{\varepsilon, N}$ *интервалов числовой оси, состоящее из* ε, N*-смещений функции* $f(t)$;

*) Множество $\mathfrak{M}$ называется условно компактным, если любая его бесконечная часть содержит последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся в смысле Коши, т.е. $\|x_n-x_m\|\to 0$ при $\min(n, m)\to\infty$.

b) при любом фиксированном $N>0$ *каждому* $\varepsilon>0$ *отвечает такое* $\delta_\varepsilon>0$, *что при* $\delta<\delta_\varepsilon$

$$E_{\delta, N} \pm E_{\delta, N} \subset E_{\varepsilon,N} \text{ *)}.$$

Так определенные функции мы будем в дальнейшем называть L-почти периодическими или, короче, L-п. п. функциями **). Примером такой функции может служить функция

$$f(t) = \frac{1}{2+\cos t+\cos \lambda t} \quad (\lambda \text{ — иррациональное}),$$

которая, как легко видеть, удовлетворяет условиям a) и b) и, следовательно, является L-п. п. функцией.

Она при этом не ограничена и поэтому не есть почти периодическая функция Г. Бора.

Б. М. Левитан развил для этих функций теорию, аналогичную теории Г. Бора.

Ограничиваясь L-п. п. функциями, у которых существует верхнее среднее от квадрата, т. е.

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(t)|^2\, dt < \infty, \tag{0.30}$$

он вводит „среднее“ $M(f)$, используя обобщенный предел С. Банаха [7],

$$M[f] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\, dt) \text{ ***}). \tag{0.40}$$

---

*) Знаки плюс и минус здесь, как и всюду в дальнейшем, обозначают арфметическую сумму и разность числовых множеств. Теоретико-множественную сумму мы будем обозначать символом V.

**) В определении L-п. п. функции вовсе не требуется, чтобы множества $E_{\varepsilon, N}$ содержали все ε, N-смещения функции $f(t)$. При таком требовании нетрудно было бы построить пример периодической функции, не являющейся L-почти периодической. В самом деле, определим функцию

$$\varphi(t)=1 \text{ при } |t-n\omega| < \delta \quad (n=1, 2, \ldots, \delta=\omega/10)$$

и $\varphi(t)=0$ при всех прочих значениях переменной t. Определим также функцию

$$\varphi_1(t)=1 \text{ при } \left| t-np\omega-\frac{\omega}{2}\right| < \delta \quad (n=1, 2, \ldots),$$

где p — целое число. Функция $f(t)=\varphi(t)+\varphi_1(t)$ — периодическая функция с периодом $p\omega$. Все числа вида $\tau_n=n\omega$ и $\tau_n'=np\omega+\frac{\omega}{2}$ являются $0, \delta$-смещениями функции $f(t)$.

Однако $\tau_n'-\tau_{np}=\frac{\omega}{2}$ не есть $0, \delta$-смещение функции $f(t)$.

Изменив несущественно пример, можно сделать функцию $f(t)$ непрерывной.

Аналогично можно построить пример предельно периодической функции, которая на каждом интервале имеет 0-смещения, сумма которых не является 0-смещением на этом же интервале.

*** Обычного среднего $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\, dt$ может не иметь, как это было пока-

Обычным путем показывается, что коэфициент Фурье L-п. п. функции $f(t)$

$$a(\lambda)=M[f(t)\, e^{-i\lambda t}] \tag{0.50}$$

может отличаться от нуля не более, чем для счетного множества значений показателя.

Это дает возможность каждой L-п. п. функции поставить в соответствие ряд Фурье

$$f(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{i\lambda_k t}. \tag{0.60}$$

Центральным местом теории является теорема о единственности определения L-п. п. функции ее рядом Фурье. Этот результат кажется тем более поразительным, что ряд Фурье определяется функцией $f(t)$ неоднозначно, так как, выбирая различные обобщенные пределы С. Банаха, мы будем получать различные ряды Фурье.

Теорему единственности следует понимать в том смысле, что совпадение какого-нибудь из рядов Фурье одной L-п. п. функции с каким-нибудь из рядов Фурье другой влечет за собой тождественное равенство этих функций.

Для рядов Фурье L-п. п. функций доказывается равенство Парсеваля

$$M[\,|f|^2] = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \tag{0.70}$$

и, наконец, доказывается, что ряд Фурье суммируется к данной функции по Вейлю. Точнее, теорема апроксимации формулируется так.

Существует такое множество чисел, зависящих от двух индексов $\{\alpha_k^n\}$ ($\alpha_k^n=0$ при $k>n$), что при любых $\varepsilon>0$, $N>0$ и $n>n_\varepsilon$ верно

$$\left| f(t) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^n a_k e^{i\lambda_k t} \right| < \varepsilon \quad \text{при } |t|<N, \tag{0.80}$$

где a_k — коэфициенты Фурье функции $f(t)$.

В. А. Марченко [10] заметил, что L-п. п. функции представляют собой все непрерывные функции на некотором хаусдорфовом пространстве, которое получается введением на числовой оси особой топологии.

Им же показано, что ряд Фурье ограниченной функции суммируем к этой функции методом Фейера—Бохнера в каждой точке, в которой она непрерывна в этой особой топологии.

зано мною и Б. Левитаном в наших совместных работах, даже ограниченная L-п. п. функция [8], [9].

В более поздних работах Б. М. Левитану, однако, удалось освободиться от обобщенного предела при построении рядов Фурье и доказательстве основных теорем [6].

Пользуясь своим методом В. А. Марченко значительно упростил доказательства основных теорем этой теории.

Заметим еще, что в работах В. А. Марченко, так же как и в первых работах Б. М. Левитана, вместо условия b) в определении L-п. п. функции, взято условие, которое кажется более сильным. Именно

b′). Если

$$\tau' \in E_{\varepsilon, N} \quad \text{и} \quad \tau'' \in E_{\varrho, N},$$

то

$$\tau' \pm \tau'' \in E_{\varepsilon + \lambda(\varrho), N}.$$

В § 1 этой статьи мы устанавливаем, что определение L-п. п. функции эквивалентно другому, значительно более простому определению, которое аналогично определению Бохнера для почти периодических функций Г. Бора.

Основываясь на этом более простом определении, мы даем далее в § 2 новое построение теории L-п. п. функций, которое имеет на наш взгляд ряд серьезных преимуществ. В частности это построение дает возможность перенести теорию L-п. п. функций на функции, определенные на произвольной группе.

Оно позволяет значительно полнее сформулировать теорему апроксимации так, что класс L-п. п. функций оказывается совпадающим с замыканием в особом смысле множества всех почти периодических полиномов.

Таким образом, мы имеем, аналогично тому как это устанавливается в теории функций Г. Бора, три эквивалентные определения L-п. п. функций: определение 1, приведенное во введении, аналогичное определению Г. Бора, определение, приведенное в § 1 (см. теорему 1), аналогичное определению С. Бохнера, и определение с помощью замыкания в особом смысле множества всех почти периодических полиномов.

Нам представляется, что при таком построении также лучше вскрывается смысл теоремы единственности.

В дополнении к § 1 мы показываем, что условие b) и, представляющееся более сильным, условие b′) в определении L-п. п. функции, эквивалентны.

Во втором дополнении мы строим пример функции, удовлетворяющей условию a) и не удовлетворяющей условию b), и тем самым показываем независимость этих условий.

В § 2 мы, исходя из нового определения, развиваем теорию L-п. п. функций.

В дополнении 1 к § 2 мы исследуем связь между построенными нами рядами Фурье и теми, которые строятся с помощью обобщенного предела С. С. Банаха.

В дополнении 2 мы изучаем связь между устойчивыми по Ляпунову почти периодическими и L-п. п. движениями в метрическом пространстве.

§ 3 посвящен построению теории L-п. п. на группах.

§ 1

В этом параграфе мы дадим эквивалентное предыдущему новое определение L-п. п. функции, которое аналогично известному определению Бохнера почти периодических функций Г. Бора.

Определение 2. *Последовательность вещественных чисел* $\{\tau_n\}$ *мы назовем сходящейся к числу* τ_0 *по функции* $f(t)$, $\tau_n \xrightarrow{f} \tau_0$, *если*

$$\lim_{n\to\infty} f(t+\tau_n-\tau_0) = f(t) \tag{1.10}$$

при любом значении переменной t.

Определение 3. Последовательность вещественных чисел $\{\tau_n\}$ *мы назовем условно сходящейся по функции* $f(t)$, $\tau_n \xrightarrow{f}$, *если*

$$\lim_{\min(n,m)\to\infty} f(t+\tau_n-\tau_m) = f(t). \tag{1.20}$$

Заметим, что из условной сходимости последовательности $\{\tau_n\}$ по функции $f(t)$ не следует сходимость последовательности функции $\{f(t+\tau_n)\}$.

Теорема 1. *Для того чтобы непрерывная функция* $f(t)$ *была* L-п. п. *необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1. Любая бесконечная последовательность вещественных чисел $\{\tau_n\}$ *содержит подпоследовательность* $\{\tau'_n\}$, *условно сходящуюся по данной функции (условная компактность числовой оси).*

2. Если $\tau'_n \xrightarrow{f} 0$ *и* $\tau''_n \xrightarrow{f} 0$, *то* $\tau'_n \pm \tau''_n \xrightarrow{f} 0$ *(групповое свойство).*

Замечание. Если в определении (1.20) сходимость в каждой точке заменить равномерной сходимостью на всей оси, то условие 1 совпадет с определением почти периодической функции по Бохнеру, а условие 2 будет выполняться для любой функции.

Покажем сначала, что при $\tau_n \xrightarrow{f} 0$

$$f(t+\tau_n) \rightrightarrows f(t)$$

на любом конечном сегменте.

В самом деле, в противном случае, мы имели бы на некотором сегменте $|t| \leqslant N$ бесконечную последовательность h_k и такую последовательность τ_{n_k}, что

$$|f(\tau_{n_k}+h_k) - f(h_k)| \geqslant \varepsilon. \tag{1.30}$$

Не нарушая общности можно считать, что $h_k \to h_0$, следовательно, $h_k - h_0 \xrightarrow{f} 0$ и в силу 2)

$$f(h_0+\tau_{n_k}+h_k-h_0) \to f(h_0).$$

С другой стороны,

$$f(h_k) \to f(h_0),$$

но это противоречит (1.30).

Аналогично, если $\tau_n \xrightarrow{f}$, то

$$f(t+\tau_n-\tau_m) \rightrightarrows f(t)$$

на любом конечном сегменте при $\min(m, n) \to \infty$.

Покажем, что при выполнении условия 1 множество ε, N-смещений функции $f(t)$ относительно плотно при любых $\varepsilon > 0$ и $N > 0$.

Если бы это было не так — существовали бы интервалы произвольно большой длины, не содержащие ε, N-смещений функции $f(t)$. Построим рекуррентно последовательность чисел $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$, выбирая за τ_n центр интервала, свободного от ε, N-смещений, длина которого не меньше, чем $2\sum_{k=1}^{n}|\tau_k|$.

При таком построении ни одна из разностей $\tau_n - \tau_m$ не является ε, N-смещением функции $f(t)$, и, следовательно, нельзя выделить из последовательности $\{\tau_n\}$ условно сходящуюся подпоследовательность. Это противоречит условию 1.

Обозначим через $E_{\varepsilon, N}$ при $N \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$ множество всех ε, N-смещений, и при $N < \frac{1}{\varepsilon}$ множество всех $\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}$-смещений функции $f(t)$. Пусть теперь при некоторых $\varepsilon > 0$, $N > 0$ и произвольно малом $\varrho > 0$ существуют такие числа τ' и τ'', что

$$\tau' \in E_{\varrho, N}, \quad \tau'' \in E_{\varrho, N} \quad \text{и} \quad \tau' + \tau'' \,\bar{\in}\, E_{\varepsilon, N}.$$

Тогда, выбрав последовательность $\varrho_n \to 0$ и соответствующие последовательности τ'_n и τ''_n, получим, что $\tau'_n \xrightarrow{f} 0$, $\tau''_n \xrightarrow{f} 0$ и $\tau'_n + \tau''_n$ не стремятся к нулю, что противоречит условию 2.

Итак, каждой паре чисел $\varepsilon > 0$ и $N > 0$ отвечает относительно плотное множество $E_{\varepsilon, N}$, ε, N-смещений и эти множества $E_{\varepsilon, N}$ удовлетворяют условию b) Б. Левитана. Достаточность доказана.

Доказательство необходимости, значительно более сложное, нам придется разбить на несколько этапов.

1°. С помощью множеств $E_{\varepsilon, N}$ мы введем топологию на оси, построив по этим множествам окрестности нуля.

Прежде всего заметим, что каждое множество $E_{\varepsilon, N}$ содержит некоторый интервал с центром в нуле.

В самом деле, при достаточно малом $\varrho > 0$

$$E_{\varepsilon, N} \supset E_{\varrho, N} + E_{\varrho, N},$$

но $E_{\varrho, N}$ состоит из интервалов, а разность интервала с самим собой дает интервал с центром в нуле.

Отсюда, далее, следует, что $E_{\varepsilon, N}$ содержит относительно плотное множество интервалов $E'_{\varepsilon, N}$, длины которых превосходят некоторое положительное число $\zeta_{\varepsilon, N}$. Действительно, при достаточно малом $\varrho > 0$

$$E_{\varepsilon, N} \supset E_{\varrho, N} + E_{\varrho, N}.$$

Если δ — радиус интервала с центром в нуле, входящего в $E_{\varrho, N}$, то, окружив каждую точку $E_{\varrho, N}$ δ-окрестностью, мы получим относительно плотное множество интервалов длины, не меньшей, чем δ, причем это множество включено в $E_{\varepsilon, N}$.

Лемма 1. *Пересечение множеств* $E_{\varepsilon, N}$ *и* $E_{\varepsilon', N'}$ ($\varepsilon>0$, $\varepsilon'>0$, $N>0$, $N'>0$) *содержит относительно плотное множество интервалов, длины которых превосходят некоторое положительное число.*

Доказательство. Пусть

$$E_{\varrho, N} \supset E'_{\varrho, N} + E'_{\varrho, N}, \quad E_{\varepsilon', N'} \supset E'_{\varrho', N'} + E'_{\varrho', N'}, \tag{1.40}$$

l — наибольший из включающих интервалов множеств $E'_{\varrho, N}$ и $E'_{\varrho', N'}$ и $\zeta = \max(\zeta_{\varrho, N}, \zeta'_{\varrho', N'})$. Обозначим

$$l' = l + 2\zeta.$$

Разобьем всю ось на интервалы $(kl', \overline{k+1}\, l')$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). В каждом из этих интервалов содержатся интервалы, входящие в $E'_{\varrho', N'}$, и интервалы, входящие в $E_{\varrho, N}$, с центрами в точках τ_k и τ'_k вида $\frac{1}{2} n\zeta$, где n — целое число, причем такие, что их длины не меньше, чем $\frac{1}{2}\zeta$.

Разность $\tau_k - \tau'_k$ находится в интервале $(-l', l')$. Но в этом интервале не более, чем $p = \left[\frac{4l'}{\zeta}\right]$ точек вида $\frac{1}{2} n\zeta$.

Таким образом, в каждом интервале длины $(p+2)\,l'$ существует две такие пары

$$\tau_{k_1}, \tau'_{k_1} \text{ и } \tau_{k_2}, \tau'_{k_2},$$

что

$$\tau_{k_1} - \tau'_{k_1} = \tau_{k_2} - \tau'_{k_2}$$

или

$$\tau_{k_1} + \tau_{k_2} = \tau'_{k_1} + \tau'_{k_2}; \tag{1.41}$$

из (1.40) и (1.41) следует, что каждый интервал длины $4(p+2)\,l'$ содержит точку, которая вместе со своей $\frac{\zeta}{2}$-скрестностью входит в пересечение множеств $E_{\varepsilon, N}$ и $E_{\varepsilon', N'}$. Лемма доказана.

Построим теперь множества $\tilde{E}_{\varepsilon, n}$ (n-натуральное) следующим образом: положим $\tilde{E}_{\varepsilon, 1} = E_{\varepsilon, 1}$. Пусть множества $\tilde{E}_{\varepsilon, k}$ определены при $\varepsilon > 0$ и $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Определим $\tilde{E}_{\varepsilon, n}$ как пересечение множеств $E_{\varepsilon, n}$ и $\tilde{E}_{\varepsilon, n-1}$. В силу леммы 1 множества $\tilde{E}_{\varepsilon, n}$ содержат относительно плотное множество интервалов. Эти множества состоят из ε, n-смещений.

Покажем, что они удовлетворяют условию b). В самом деле пусть это показано для всех $\tilde{E}_{\varepsilon, k}$ ($k = 1, 2 \ldots n-1$). Тогда, при достаточно малом $\varrho > 0$

$$\tilde{E}_{\varrho, n+1} \pm E_{\varrho, n-1} \subset E_{\varepsilon, n-1}$$

и

$$E_{\varrho, n} \pm E_{\varrho, n} \subset E_{\varepsilon, n}.$$

Отсюда следует, что пересечение множеств $E_{\varrho, n}$ и $\tilde{E}_{\varrho, n-1}$, т. е. $\tilde{E}_{\varrho, n}$ удовлетворяет условиям

$$\tilde{E}_{\varrho, n} \pm \tilde{E}_{\varrho, n} \subset E_{\varepsilon, n}$$

и

$$\tilde{E}_{\varrho, n} \pm \tilde{E}_{\varrho, n} \subset \tilde{E}_{\varepsilon, n-1},$$

т. е.

$$\tilde{E}_{\varrho, n} \pm \tilde{E}_{\varrho, n} \subset \tilde{E}_{\varepsilon, n}. \tag{1.42}$$

Для $n-1 < N \leqslant n$ положим $\tilde{E}_{\varepsilon, N} = E_{\varepsilon, n}$.

Очевидно, кроме условий a) и b) множества $\tilde{E}_{\varepsilon, N}$ удовлетворяют еще условию

$$\tilde{E}_{\varepsilon, N''} \supseteq \tilde{E}_{\varepsilon, N'} \text{ при } N'' > N'. \tag{1.43}$$

Обозначим

$$V_{\varepsilon} = \tilde{E}_{\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}}. \tag{1.44}$$

Легко видеть, что множества V_{ε} также удовлетворяют условиям a) и b).

Наконец, обозначим через U_{ε} сумму всех таких множеств V_{ϱ}, что при некотором $\delta_{\varrho} > 0$

$$V_{\varrho} + V_{\delta_{\varrho}} \subset V_{\varepsilon}. \tag{1.45}$$

Из (1.42) и (1.43) следует, что U_{ε} не пусто.

Лемма 2. *Если функция $f(t)$ не периодическая*), то множества U_{ε} удовлетворяют следующим условиям:*

1) Единственной точкой, принадлежащей всем U_{ε}, является нуль.

2) Для всякого U_{ε} найдется такое U_{δ}, что

$$U_{\delta} \pm U_{\delta} \subset U_{\varepsilon}.$$

3) Пересечение U_{ε_1} $(\varepsilon_1 > 0)$ и U_{ε_2} $(\varepsilon_2 > 0)$ содержит некоторое U_{δ} (при $\delta < \delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$).

4) Для всякой точки $x \in U_{\varepsilon}$ найдется такое U_{δ}, что $x + U_{\delta} \subset U_{\varepsilon}$.

Иначе говоря, множества U_{ε} образуют полную систему окрестностей нуля аддитивной группы вещественных чисел**).

Доказательство. 1) Если τ принадлежит всем U_{ε}, то

$$|f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon \text{ при } |t| \leqslant \frac{1}{\varepsilon},$$

где ε — любое положительное число, т. е. τ — период функции $f(t)$.

2) По определению U_{ε} существует V_{σ} такое, что

$$V_{\sigma} \subset U_{\varepsilon}.$$

При достаточно малом $\delta > 0$

$$V_{\delta} \pm V_{\delta} \subset V_{\sigma}$$

и так как $U_{\delta} \subset V_{\delta}$, получаем

$$U_{\delta} \pm U_{\delta} \subset U_{\varepsilon}.$$

---

*) Если $f(t)$ — периодическая, то утверждение леммы также верно при условии, что точки оси, отличающиеся на период, отождествлены.

**) См. Л. Понтрягин [11], стр. 67.

3. При данных ε_1 и ε_2 можно в силу 2 так выбрать $\delta > 0$, что

$$U_\delta + U_\delta \subset U_{\varepsilon_1} \text{ и } U_\delta + U_\delta \subset U_{\varepsilon_2},$$

т. е.

$$U_\delta \subset U_{\varepsilon_1} \text{ и } U_\delta \subset U_{\varepsilon_2}.$$

4) Из $x \in U_\varepsilon$ следует, что $x \in V_\delta$ такому, что при некотором $\sigma > 0$

$$V_\delta + V_\sigma \subset V_\varepsilon.$$

Выбрав $\varrho > 0$ так, что $V_\varrho + V_\varrho \subset V_\sigma$, будем иметь

$$V_\delta + V_\varrho + V_\varrho \subset V_\varepsilon$$

и, следовательно

$$V_\delta + V_\varrho \subset U_\varepsilon,$$

откуда

$$x + U_\varrho \subset U_\varepsilon.$$

Лемма доказана.

Определив окрестности точки

$$U_\varepsilon(p) = p + U_\varepsilon, \tag{1.46}$$

мы превратим аддитивную группу вещественных чисел в топологическую группу. Эту группу мы будем обозначать Ω.

Заметим, что выбирая лишь рациональные $\varepsilon > 0$ и рациональные t, мы получим счетный базис окрестностей $U_\varepsilon(t)$, т. е. в группе Ω имеет место вторая аксиома счетности *).

2°. Определение 4. *Последовательность p_{t_n} точек группы Ω мы назовем условно сходящейся (или сходящейся по Коши), а если каждой окрестности U_ε отвечает такое число N_ε, что при* $\max(n, m) > N_\varepsilon$

$$p_{t_n} - p_{t_m} \in U_\varepsilon \text{ или } p_{t_n} \in p_{t_m} + U_\varepsilon.$$

Вообще говоря, не всякая условно сходящаяся последовательность элементов группы Ω сходится к предельному элементу. Поэтому мы дополним группу обычным способом, ставя в соответствие каждой условно сходящейся последовательности, не имеющей предельного элемента в Ω, некоторый абстрактный элемент, а последовательности, имеющей предел, — этот предельный элемент. При этом две последовательности p_{τ_n} и p_{t_n} мы будем считать эквивалентными, если при любом $\varepsilon > 0$ существует $N_\varepsilon > 0$ такое, что при $n > N_\varepsilon$ имеет место

$$p_{\tau_n} - p_{t_n} \in U_\varepsilon.$$

Легко видеть, что если две последовательности p_{t_n} и p_{τ_n} условно сходятся, то условно сходится также их сумма $p_{t_n} + p_{\tau_n}$ и разность $p_{t_n} - p_{\tau_n}$. В самом деле, выбрав по $\varepsilon > 0$ число $\varrho > 0$ так, что

$$U_\varrho \pm U_\varrho \subset U_\varepsilon,$$

определим N_ε так, что при $\max(m, n) > N_\varepsilon$

$$p_{t_n} - p_{t_m} \in U_\varrho \text{ и } p_{\tau_n} - p_{\tau_m} \in U_\varrho,$$

тогда

$$p_{t_n} \pm p_{\tau_n} - (p_{t_m} \pm p_{\tau_m}) \in U_\varrho \pm U_\varrho \subset U_\varepsilon.$$

---

*) См. [11].

Если

$$p' = \lim_{n\to\infty} p_{t_n} \quad \text{и} \quad p'' = \lim_{n\to\infty} p_{\tau n},$$

то сумма $p'+p''$ определится как элемент, отвечающий условно сходящейся последовательности $p_{t_n}+p_{\tau_n}$. Легко видеть, что сумма определяется таким образом однозначно и операция сложения коммутативна. Обозначим через T так дополненную группу Ω.

Для того чтобы топологизировать группу T, определим в ней окрестности нуля

$$W_\varepsilon = C_T \overline{C_\Omega U_\varepsilon}, \tag{1.50}$$

где $C_\Omega U$ — дополнение к множеству U в группе Ω и $C_T U$ — дополнение к множеству U в группе T, а $\bar{U}$ — замыкание множества $U \subset \Omega$.

Лемма 3. *Множества W_ε образуют полную систему окрестностей нуля в T, т. е. для W_ε, верны утверждения 1, 2, 3 и 4 леммы 2.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что из равенства

$$U_\varepsilon \vee \overline{C_\Omega U_\varepsilon} = T\text{*)}$$

следует

$$U_\varepsilon \supset C_T \overline{C_\Omega U_\varepsilon} = W_\varepsilon; \tag{1.51}$$

с другой стороны, если $p \in \Omega$ и $p \bar{\in} U_\varepsilon$, то $p \in C_\Omega U_\varepsilon \subset \overline{C_\Omega U_\varepsilon}$ и, следовательно, $p \bar{\in} W_\varepsilon$. Покажем далее, что при данном $\varepsilon > 0$ и достаточно малом $\varrho > 0$

$$\bar{U}_\varrho \subset W_\varepsilon. \tag{1.52}$$

В самом деле, пусть в силу утверждения 2 леммы существует такое $\varrho > 0$, что

$$U_\varrho \pm U_\varrho \subset U_\varepsilon. \tag{1.53}$$

Пусть последовательность $p_{\tau_n} \in U_\varrho$. Из (1.53) следует, что $p_{\tau_n} \pm \pm U_\varrho \in U_\varepsilon$ и значит $p_{t_n} \bar{\in} p_{\tau_n} + U_\varrho$.

Таким образом, последовательности p_{t_n} и p_{τ_n} не могут определять один и тот же элемент и значит $\bar{U}_\varrho$ не имеет общих элементов с $\overline{CU_\varepsilon}$. Итак

$$W_\varepsilon \supset \bar{U}_\varrho.$$

Перейдем непосредственно к доказательству четырех утверждений леммы.

1) Пусть p — точка пересечения всех W_ε и $p \neq 0$.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} p_{\tau_n} = p$ $(p_{\tau_n} \subset \Omega)$. Так как $p \neq 0$, то существует окрестность нуля U_ε, не содержащая точек p_{τ_n} и значит $p \subset \overline{C_\Omega U_\varepsilon}$. Но тогда $p \bar{\in} W_\varepsilon$, что противно предположению.

2) Выберем U_ϱ так, что

$$\bar{U}_\varrho \subset W_\varepsilon$$

и такое U_σ, что $U_\sigma \pm U_\sigma \subset U_\varrho$. Тогда из (1.51) очевидно

$$W_\sigma \pm W_\sigma \subset \bar{U}_\sigma \pm \bar{U}_\sigma \subseteq \bar{U}_\varrho \subset W_\varepsilon.$$

---

*) Знак $\vee$ означает теоретико-множественную сумму.

3) Доказывается так же, как в лемме 2.

4) Пусть $p \in W_\varepsilon$ и $\lim\limits_{n\to\infty} p_{\tau_n} = p$ $(p_{\tau_n} \in \Omega)$.

Если для всякой окрестности U_ϱ существует бесконечное множество таких точек p'_{τ_n}, что $p_{\tau_n} + U_\varrho$ содержит точки из $C_\Omega U_\varepsilon$, т. е. $p_{t_n} \in p'_{\tau_n} + U_\varrho$, то нетрудно выделить подпоследовательность p'_{t_n} так, что $\lim\limits_{n\to\infty} p'_{t_n} = p$. Таким образом, $p \in \overline{CU_\varepsilon}$ и $p \in W_\varepsilon$, что противно предположению. Итак, существует такое множество U_ϱ, что при $n > N_\varrho$

$$p_{\tau_n} + U_\varrho \subset U_\varepsilon. \tag{1.54}$$

Пусть теперь $\sigma > 0$ таково, что

$$U_\varrho \supset U_\sigma \pm U_\sigma$$

и пусть $p_{\vartheta_n} \in U_\sigma$. Тогда из (1.54) следует, что $p_{\tau_n} + p_{\vartheta_n} + U_\varrho$ не имеет общих точек с $C_\Omega U_\varepsilon$. Отсюда следует, что при $p_{t_n} \in C_\Omega U_\varepsilon$

$$p_{t_n} - (p_{\tau_n} + p_{\vartheta_n}) \,\bar{\in}\, U_\varrho$$

и значит замыкание $p + \overline{U}_\varrho$ не имеет общих точек с $\overline{C_\Omega U_\varepsilon}$, т. е.

$$p + \overline{U}_\varrho \subset W_\varepsilon,$$

и в силу (1.51) имеем

$$p + W_\varrho \subset W_\varepsilon.$$

Лемма доказана.

Множества вида $p + W_\varepsilon$ образуют полную систему окрестностей топологической группы T. Очевидно, топология, порожденная этой системой окрестностей на подгруппе Ω, совпадает с прежней топологией на ней. Выбирая ε рациональные и $p = p_t$ при t рациональных, получаем счетный базис окрестностей $p_t + W_\varepsilon$ группы T.

3°. Покажем теперь, что группа T компактна. Из построения множеств U_ε следует, что каждое такое множество содержит относительно плотное множество интервалов, длины которых превышают некоторую величину $\zeta_\varepsilon > 0$. Множества $p_{k\zeta_\varepsilon} + U_\varepsilon$ $\left(k = 1, 2, \ldots, n,\ n = \left[\frac{2e}{\zeta_\varepsilon}\right] + 1\right)$, очевидно, покрывают всю ось, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} (p_{k\zeta_\varepsilon} + U_\varepsilon) = \Omega^{*)}. \tag{1.60}$$

Пусть задана окрестность W_ε. Выберем ϱ так, что $\overline{U}_\varrho \subset W_\varepsilon$. По доказанному, существует конечное число таких точек $q_1, q_2, \ldots, q_n$, что множества $q_j + U_\varrho$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ покрывают Ω, а следовательно, $q_j + \overline{U}_\varrho$ покрывают T. Очевидно, $q_j + W_\varepsilon$ также покрывают T.

Пусть теперь дана бесконечная последовательность p_l элементов из T. Из них бесконечное множество $\{p_i'\}$ попадает в одно из множеств $q_j + W_\varepsilon$. Имеем

$$p_i^1 - p_j^1 \in W_\varepsilon.$$

---

*) Здесь Σ означает теоретико-множественную сумму.

Выделим точно так же из последовательности p_i^1 такую подпоследовательность $\{p_i^2\}$, что

$$p_i^2 - p_j^2 \in W_{\frac{\varepsilon}{2}}$$

и т. д.

Диагональная последовательность $\{p_i^i\}$, очевидно, является сходящейся, в силу 3) леммы 3.

Замечание. Компактное топологическое пространство T, регулярное, со второй аксиомой счетности можно по известной теореме Урысона *) метризовать. Обозначим расстояние между точками p_1 и p_2 через $d(p_1, p_2)$, введем функцию

$$\varrho(p_1 p_2) = \max_{p \in T} d(p_1 + p, p_2 + p) \qquad (1.61)$$

и покажем, что функция $\varrho(p_1, p_2)$ дает эквивалентную инвариантную метрику. Инвариантность, очевидно, прямо следует из определения. Ясно также, что

$$\varrho(p_1, p_2) \geqslant d(p_1, p_2).$$

Остается показать, что из $d(p_n, p_0) \to 0$ следует $\varrho(p_n, p_0) \to 0$. Предположим, что это не так. Тогда существуют такие последовательности p_n' и h_n, что

$$d(p_n', p_0) \to 0 \text{ и } d(p_n' + h_n, p_0 + h_n) \geqslant \varepsilon > 0. \qquad (1.62)$$

Выделяя подпоследовательность $h_n' \to h_0$ и переходя к пределу, мы получим

$$d(p_0 + h_0, p_0 + h_0) \geqslant \varepsilon > 0.$$

Итак, группу T можно считать метрической **).

Заданную L-п.п. функцию $f(t)$, по которой были построены группы Ω и T, можно рассматривать как функцию, определенную на группе Ω. Мы будем обозначать иногда

$$f(t) = f(p_t),$$

где p_t — точка (элемент) группы Ω.

Лемма 4. *Функция $f(p_t)$ есть непрерывная функция на Ω.*

В самом деле, U_ε состоит из ε, $\frac{1}{\varepsilon}$-смещений функции $f(t)$ и, следовательно, при заданном $0 < \varepsilon < \frac{1}{|t|}$ и $\tau_n = t_n - t \in U_\varepsilon$ получаем

$$|f(t + \tau_n) - f(t)| < \varepsilon$$

или

$$|f(p_{t_n}) - f(p_t)| < \varepsilon$$

и, следовательно, $f(p_{t_n}) \to f(p_t)$ при $p_{t_n} \to p_t$, т. е. $f(t)$ — непрерывная функция на Ω.

---

*) См. [11], стр. 60, а также [15].

**) При доказательстве теоремы 1 этот факт не используется.

4°. Для дальнейшего нам нужно построить инвариантный интеграл и инвариантную меру на группе T.

Заметим прежде всего, что всякая непрерывная функция $\varphi(p)$ на компактной группе T порождает на оси почти периодическую функцию

$$\varphi(t) = \varphi(p_t).$$

В самом деле, каждому $\varepsilon > 0$ отвечает такая окрестность нуля группы T, W_δ, что при $p_1 - p_2 \in W_\delta$

$$|f(p_1) - f(p_2)| < \varepsilon. \tag{1.70}$$

Множество $U_\delta \subset W_\delta$ образует относительно плотное множество на оси и согласно (1.70) при $\tau \in U_\delta$

$$|\varphi(t+\tau) - \varphi(t)| < \varepsilon.$$

Среднее от функции $\varphi(t)$

$$M[\varphi] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \varphi(t)\, dt, \tag{1.71}$$

обладающее обычными свойствами интеграла, мы будем обозначать

$$M[\varphi] = \int \varphi(p)\, dp. \tag{1.72}$$

Среднее инвариантно относительно сдвигов,

т. е.

$$M[\varphi(t+h)] = M[\varphi(t)]$$

или иначе

$$\int \varphi(p+p_n)\, dp = \int \varphi(p)\, dp.$$

Пусть теперь $q \in T$ и $q \overline{\in} \Omega$. Выбираем последовательность $q_n \in \Omega$ так, что $q_n \to q$. Тогда в силу равномерной непрерывности функции $\varphi(p)$ на T имеем $\varphi(p+q_n) \rightrightarrows \varphi(p+q)$ и, переходя к пределу под знаком интеграла, получаем

$$\int \varphi(p+q)\, dp = \int \varphi(p)\, dp \qquad (q \in T). \tag{1.73}$$

Таким образом, мы определили инвариантный интеграл для всех непрерывных функций на группе T *). С помощью этого интеграла нетрудно определить инвариантную меру для множеств из T.

Мерой открытого множества $G \subset T$ мы назовем величину

$$m(G) = \sup_{0 \le \varphi(p) \le \chi_G(p)} \left\{ \int \varphi(p)\, dp \right\}, \tag{1.74}$$

где $\varphi(p)$ — непрерывные функции и $\chi_G(p)$ — характеристическая функция множества G.

---

*) Можно было бы не делать этого построения, а сразу воспользоваться конструкцией Неймана [3], стр. 106—115. Подробнее об интегрировании на группах см. [16].

Очевидно, что при $G_1 \subset G$ будем иметь $m(G_1) \leqslant m(G)$. Положительность меры области легко следует из того, что среднее от неотрицательной, не равной нулю почти периодической функции — положительно.

Докажем, что мера области непрерывна снизу. Пусть, в самом деле, для некоторой функции $\varphi(p) \leqslant \chi_G(p)$

$$\int \varphi(p)\, dp > m(G) - \frac{\delta}{2}$$

и G_δ — множество точек, в которых $\varphi(p) < \frac{\delta}{2}$. Тогда

$$m(G_\delta) > \int \left[\varphi(p) - \frac{\delta}{2} \right] dp > m(G) - \delta$$

и, следовательно, для всякого открытого множества G можно подобрать открытое множество $G_\delta \subset G$ так, что

$$m(G_\delta) > m(G) - \delta.$$

Мера замкнутого множества определяется как разность между единицей и мерой дополнительного открытого множества. Это определение, конечно, эквивалентно следующему:

$$m(F) = \inf_{\varphi(p) \geqslant \chi_F(p)} \left\{ \int \varphi(p)\, dp \right\}, \tag{1.75}$$

где $\varphi(p)$—непрерывные функции, а $\chi_F(p)$ — характеристическая функция множества F.

Покажем, что

$$m(F) = \inf_{G \supset F} m(\varphi). \tag{1.76}$$

Пусть, в самом деле, непрерывная функция $\varphi(p)$ такова, что

$$\varphi(p) \geqslant \chi_F(p)$$

и

$$m(F) < M[\varphi] < m(F) + \delta.$$

Множество G_ε, на котором $\varphi(p) > 1 - \varepsilon$, есть открытое множество, содержащее F. Из неравенства

$$\frac{1}{1-\varepsilon} \varphi(p) \geqslant \chi_{G_\varepsilon}(p) \qquad (p \in G_\varepsilon)$$

следует

$$m(G_\varepsilon) < \frac{m(F) + \delta}{1 - \varepsilon}.$$

Таким образом,

$$\inf_{G \supset F} m(G) \leqslant m(F). \tag{1.77}$$

Пусть теперь G — некоторое открытое множество, содержащее F. Из компактности T легко следует, что граница G находится на положительном расстоянии ϱ от F. Определим непрерывную функцию $\psi(p)$ так

$$\psi(p) = 1 - \frac{\varrho(p, F)}{\varrho} \quad \text{при } \varrho(p, F) < \varrho$$

и

$$\psi(p) = 0 \qquad \text{при } \varrho(p, F) \geqslant \varrho.$$

Эта функция удовлетворяет неравенствам

$$\chi_F(p) \leqslant \psi(p) \leqslant \chi_{G_\varepsilon}(p),$$

откуда следует

$$m(F) \leqslant M[\psi] \leqslant m(G_\varepsilon). \tag{1.78}$$

Из (1.77) и (1.78) получаем

$$m(F) = \inf m(G) \qquad (G \supset F).$$

Аналогично можно доказать, что

$$\sup m(F) = m(G) \text{ при } (F \subset G).$$

Далее определяем обычным образом по Лебегу внешнюю меру произвольного множества ξ, как нижнюю границу мер открытых множеств G, содержащих ξ, и внутреннюю меру $m_*(\xi)$, как верхнюю границу мер замкнутых множеств, содержащихся в ξ.

Множество измеримо, если обе меры совпадают, и величина $m(\xi) = m^*(\xi) = m_*(\xi)$ называется мерой множества ξ.

Имея меру, можно обычным образом определить измеримые функции и интеграл Лебега. Очевидно, что так определенные мера и интеграл инвариантны относительно группы сдвигов. На этот интеграл переносятся основные свойства обычного интеграла Лебега и в частности теоремы о сходимости.

5°. Предположим теперь, что заданная L-п. п. функция $f(t) = f(p_t)$ ограничена и доопределим ее на всей группе T следующим образом:

$$f(p) = \lim_{\delta \to 0} \left(\inf_{q_t - p \in W_\delta} f(q_t) \right) \qquad (p \in T). \tag{1.80}$$

Такое доопределение мы будем называть „нижним доопределением“ или „нижним расширением“ функции $f(t)$. Аналогично определяется „верхнее расширение“.

При этом доопределении, очевидно, точные верхняя и нижняя границы функции $f(p)$ в любой области из T совпадают с ее границами на пересечении этой области с группой Ω. Отсюда и из леммы 4, конечно, следует, что функция $f(p)$ непрерывна во всех точках Ω.

Из определения (1.80) следует, что любым $p \in T$ и $\varepsilon > 0$ отвечает такая окрестность нуля W_δ, что при $q_t - p \in W_\delta$

$$f(p) \geqslant f(q_t) - \varepsilon,$$

а значит и при любом $q \in p + W_\delta$

$$f(p) \geqslant f(q) - \varepsilon. \tag{1.81}$$

Итак, функция $f(p)$ полунепрерывна снизу на T и непрерывна в точках плотной подгруппы Ω.

Обозначим через H множество всех точек $h \in T$, для каждой из которых можно подобрать последовательность чисел $\tau_n \xrightarrow{f} 0$ так, что $p_{\tau_n} \longrightarrow h$.

Лемма 5. *Множество H совпадает с множеством периодов функции $f(p)$, т. е. для того, чтобы имело место равенство*

$$f(p+h)=f(p) \text{ при } p\in T, \tag{1.82}$$

необходимо и достаточно, чтобы $h\in H$.

Достаточность. Пусть h — период функции $f(p)$ и $p_{\tau_n}\to h$ ($p_{\tau_n}\in\Omega$). Очевидно, функция $f(p+h)$ непрерывна при $p\in\Omega$. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} f(t+\tau_n)=\lim_{n\to\infty} f(p_t+p_{\tau_n})=f(p_t+h)=f(t),$$

т. е. $\tau_n \xrightarrow{f} 0$ и, следовательно, $h\in H$.

Необходимость. Пусть $h\in H$. Из определения (1.80) функции $f(p)$ имеем при $p_{\tau_n}\longrightarrow h$ и $\tau_n\xrightarrow{f} 0$

$$f(p_t+h)\leqslant \lim_{n\to\infty} f(p_t+p_{\tau_n})=f(p_t). \tag{1.83}$$

Выбрав для произвольной точки $p\in T$ последовательность p_{t_n} так что $\lim\limits_{n\to\infty} f(p_{t_n})=f(p)$, будем иметь в силу (1.80) и (1.83)

$$f(p+h)\leqslant \lim_{n\to\infty} f(p_{t_n}+h)\leqslant \lim_{n\to\infty} f(p_{t_n})=f(p).$$

Итак, при любом $p\in T$

$$f(p+h)\leqslant f(p). \tag{1.84}$$

Пусть теперь p_0+h — точка непрерывности функции $f(p)$ и пусть

$$f(p_0+h)-f(p_0)<-\varepsilon \text{ при } \varepsilon>0. \tag{1.85}$$

Тогда из непрерывности функции $f(p)$ в точке p_0+h и полунепрерывности снизу в точке p_0 следует существование такой окрестности нуля W_δ, что при $p\in p_0+W_\delta$

$$|f(p+h)-f(p_0+h)|<\varepsilon \text{ и } f(p_0)<f(p)+\varepsilon.$$

Отсюда и из (1.85) следует

$$f(p+h)-f(p)<-\varepsilon \text{ при } p\in p_0+W_\delta. \tag{1.86}$$

Из инвариантности операции интегрирования следует

$$\int [f(p+h)-f(p)]\,dp=0.$$

С другой стороны, из (1.74) и (1.86) имеем

$$\int [f(p+h)-f(p)]\,dp\leqslant -\varepsilon \operatorname{mes}(W_\varrho)<0.$$

Таким образом, во всех точках непрерывности функций $f(p)$ и в частности в точках $p_t\in\Omega$ имеем

$$f(p)=f(p-h). \tag{1.87}$$

Если $p\in T$ и $p_{t_n}\to p+h$ так, что

$$\lim_{n\to\infty} f(p_{t_n})=f(p+h),$$

то

$$f(p+h)=\lim_{n\to\infty} f(p_{t_n}-h)\geqslant f(p)$$

и, сопоставляя с (1.84), получаем

$$f(p+h)=f(p) \qquad (p\in T).$$

Лемма доказана.

Л е м м а 6. *Множество периодов H образуют замкнутую подгруппу группы T.*

Очевидно, что периоды образуют группу. Проверим лишь замкнутость, т. е. покажем, что если $h_n \in H$ и $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = h$, то $h \in H$. Пусть $p \in T$ и $p_{t_n} \to p+h$, так что

$$\lim_{n\to\infty} f(p_{t_n}) = f(p+h).$$

Тогда имеем

$$\lim_{n\to\infty} f(p_{t_n}) = \lim f(p_{t_n} - h_n) \geqslant f(p)$$

или

$$f(p+h) \geqslant f(p) \qquad (p \in T).$$

Заменяя h_n на $-h_n$, получаем

$$f(p+h) \leqslant f(p),$$

т. е. $f(p+h) = f(p)$ и, следовательно, $h \in H$.

Функция $f(p)$ сохраняет постоянное значение на каждом классе смежности $p+H$ и, следовательно, ее можно рассматривать как функцию, определенную на факторгруппе $T_f = \dfrac{T}{H}$. Факторгруппу T_f можно превратить в топологическую группу, введя на ней обычным образом топологию, т. е. приняв за окрестности нуля множества $W_\varepsilon + H$*).

Каждой точке p_t группы Ω мы теперь поставим в соответствие точку (элемент) $p_t + H$ группы Ω_f, являющейся подгруппой T_f. Если функция $f(t)$ не периодическая, то соответствие между Ω и Ω_f взаимно однозначное.

Очевидно, функция $f(p)$ непрерывна в каждой точке $p_t + h$ $(h \in H)$ группы T. Пусть теперь даны такая последовательность точек Ω и точка $p_{t_0} \in \Omega$, что при любом W_ϱ и $n > N_\varrho$ имеет место $p_{t_n} - p_{t_0} \in H + W_\varrho$.

Докажем, что при этом $f(p_{t_n}) \to f(p_{t_0})$.

В самом деле, можно выбрать последовательность $h_n \in H$ так, что $p_{t_n} + h_n \to p_{t_0}$ и, следовательно,

$$f(p_{t_n}) = f(p_{t_n} + h_n) \to f(p_{t_0}).$$

Таким образом, функция $f(p_t)$ непрерывна на группе Ω_f.

Отсюда, если последовательность точек p_{τ_n} сходится к нулю на Ω_f, то

$$f(p_t + p_{\tau_n}) \to f(p_t)$$

и, следовательно, $\tau_n \xrightarrow{f} 0$.

Пусть, наоборот, дано, что $\tau_n \xrightarrow{f} 0$. Рассмотрим точки p_{τ_n} на T. Так как все предельные точки этой последовательности принадлежат H, то в силу компактности T, вне любой окрестности H может существовать лишь конечное число точек p_{τ_n}. Иначе говоря, на Ω имеет место $p_{\tau_n} \to 0$.

*) См. [11], стр. 72.

Итак, сходимость последовательности чисел τ_n к нулю по функции $f(t)$ эквивалентна сходимости к нулю последовательности точек топологической группы Ω_f.

Отсюда, конечно, следует, что и условная сходимость последовательности чисел τ_n по функции $f(t)$ эквивалентна условной сходимости последовательности точек p_{τ_n} на Ω_f.

Факторгруппа T_f компактной группы T очевидно компактна, а ее подгруппа Ω_f условно компактна. Отсюда следует, в силу эквивалентности сходимостей, что для ограниченной L-п. п. функции выполняется условие 1 теоремы 1.

Так как групповая операция на топологической группе непрерывна, то из $p_{\tau_n} \to 0$ и $p_{\tau'_n} \to 0$ на Ω_f следует $p_{\tau_n} \pm p_{\tau'_n} \to 0$, а это эквивалентно условию 2.

Таким образом, необходимость условий 1 и 2 теоремы 1 доказана для ограниченных L-п. п. функций.

Случай неограниченной L-п.п. функции легко сводится к предыдущему. Достаточно лишь рассмотреть вместо данной функции $f(t)$ ограниченную L-п.п. функцию

$$F(t) - th\,[f(t)],$$

сходимость по которой эквивалентна сходимости по функции $f(t)$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Мы провели все рассуждения для вещественных функций. В случае комплексозначных функций рассуждения будут отличаться лишь в пункте 5°. Именно, нужно рассматривать нижнее доопределение отдельно для вещественной и мнимой частей функции $f(t)$; за группу H следует принять группу общих периодов этих доопределений.

§ 2

1°. Из теоремы 1 следует, что определение L-п. п. функции можно заменить следующим эквивалентным определением:

О п р е д е л е н и е 5. *Непрерывная функция $f(t)$ называется L-п. п., если:*

a′) *любая бесконечная последовательность вещественных чисел $\{\tau_n\}$ содержит подпоследовательность $\{\tau'_n\}$, условно сходящуюся по функции $f(t)$* $(\tau_n \xrightarrow{f} 0)$,

b′) *из* $\tau'_n \xrightarrow{f} 0$ *и* $\tau''_n \longrightarrow 0$ *следует* $\tau'_n \pm \tau''_n \xrightarrow{f} 0$.

В этом параграфе мы развернем теорию L-п. п. функций, исходя из этого определения.

Топология, вводимая на оси L-п. п. функцией $f(t)$, превращает аддитивную группу вещественных чисел в компактную топологическую группу Ω_f.

Непрерывность операции сложения, конечно, непосредственно следует из b′).

Дополняя группу Ω_f идеальными элементами так, как это было сделано в § 1 (или каким-нибудь эквивалентным способом), мы однозначно определим отвечающую функции $f(t)$ полную компактную группу T_f со второй аксиомой счетности, с плотной подгруппой Ω_f.

Точки Ω_f мы попрежнему будем обозначать p_t. Функция $f(t) = f(p_t)$, очевидно, есть непрерывная функция на Ω_f.

Всякая непрерывная на T_f функция $\varphi(p)$ является равномерно непрерывной и, следовательно, при $p_{h_n} \to p_0$ последовательность функции $\varphi(p_t + p_{h_n}) = \varphi(t + h_n)$ равномерно на всей оси сходится к функции $\varphi(p_t + p_0)$.

Отсюда следует, что функция $\varphi(t)$ — почти периодическая функция Г. Бора.

Из теории почти периодических функций известно, что если $\varphi(t+\tau_n) \rightrightarrows \varphi(t)$ и λ — показатель Фурье этой функции, то $e^{i\lambda\tau_n} \longrightarrow 1$ и, следовательно, $e^{i\lambda t}$ — равномерно непрерывная функция на Ω. Эта функция однозначно доопределяется на T_f и образует непрерывный характер $\chi(p)$ группы T_f *).

Отсюда и из теоремы апроксимации теории почти периодических функций следует, что всякая непрерывная функция на T_f может быть равномерно апроксимирована линейными комбинациями характеров.

Очевидно, что и обратно каждый непрерывный характер на T_f порождает ограниченный характер на оси, т. е.

$$\chi(p_t) = e^{i\lambda t}. \tag{2.10}$$

Так как в множество характеров группы T вместе с любыми двумя характерами входит их частное, то соответствующие числа λ образуют числовой модуль. Этот модуль счетный, так как характеры образуют ортонормированный базис в сепарабельном пространстве интегрируемых, с интегрируемым квадратом, функций на T_f.

Определение 6. *Последовательность чисел τ_n мы назовем сходящейся к числу τ_0 на числовом модуле $\mathfrak{M}$, $\tau \xrightarrow{\mathfrak{M}} \tau_0$, если*

$$\lim R[\Delta(\tau_n - \tau_0)] = 0, \tag{2.11}$$

где $R[u]$ — расстояние точки u от множества точек вида $2k\pi$ ($k = 1, 2, \ldots, n$).

Аналогично определяется условная сходимость последовательности чисел на модуле $\mathfrak{M}$.

Теорема 2. *Каждой L-п. п. функции $f(t)$ отвечает единственный счетный числовой модуль $\mathfrak{M}_f$, такой, что сходимость последовательности чисел τ_n по функции $f(t)$ эквивалентна ее сходимости на модуле $\mathfrak{M}_f$.*

---

*) Характером коммутативной группы T называется определенная на группе функция $\chi(p)$, удовлетворяющая равенству

$$\chi(p+q) = \chi(p)\chi(q) \text{ при } p, q \in T.$$

Доказательство. Если $\tau_n \xrightarrow{f} 0$ или, что то же, $p_{\tau_n} \longrightarrow 0$, то $\chi(p_{\tau_n}) \longrightarrow \chi(0) = 1$ для всех непрерывных характеров группы T_f и, следовательно, $e^{i\Lambda\tau_n} \longrightarrow 1$, т. е. τ_n стремится к нулю на модуле $\mathfrak{M}_f$.

Для доказательства того, что сходимость на модуле $\mathfrak{M}_f$ влечет за собой сходимость по функции, заметим, прежде всего, что если непрерывная на группе T_f функция $\varphi(p)$ не имеет периода, то сходимость по функции $\varphi(p_t)$ совпадает со сходимостью на группе.

В самом деле, если

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(p_t + p_{\tau_n}) = \varphi(p_t), \tag{2.12}$$

то всякая отличная от нуля предельная точка последовательности есть период и, следовательно, $p_{\tau_n} \to 0$. Обратное, очевидно, следует из равномерной непрерывности функции $\varphi(p)$.

В частности за функцию $\varphi(p)$ можно принять любую непрерывную функцию, имеющую строгий экстремум на T_f *).

Пусть теперь последовательность $\{\tau_n\}$ стремится к нулю на модуле $\mathfrak{M}_f$. Тогда $e^{i\Lambda\tau_n} \to 1$ при $\Lambda \in \mathfrak{M}_f$ и, следовательно,

$$\chi_\Lambda(p_t + p_{\tau_n}) \rightrightarrows \chi(p_t). \tag{2.13}$$

Но любую непрерывную функцию $\varphi(p)$ можно равномерно апроксимировать линейными комбинациями характеров. Следовательно,

$$\varphi(p + p_{\tau_n}) \rightrightarrows \varphi(p).$$

Отсюда следует, что $\tau_n \xrightarrow{f} 0$.

Нетрудно показать, что если из сходимости последовательности на модуле $\mathfrak{M}$ следует ее сходимость на модуле $\mathfrak{N}$, то $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$.

Таким образом, сходимость, определенная на оси L-п. п. функцией $f(t)$, однозначно определяет модуль, дающий эквивалентную сходимость.

Теорема 3. *Каждый числовой модуль $\mathfrak{M}$ является модулем некоторой L-п. п. функции.*

Доказательство. Модуль $\mathfrak{M}$ определяет сходимость точек оси, которая превращает аддитивную группу вещественных чисел в топологическую группу $\Omega_{\mathfrak{M}}$. Дополняя эту группу идеальными элементами, мы получим компактную группу $T_{\mathfrak{M}}$ со второй аксиомой счетности.

Не представляет труда определить непрерывную неотрицательную функцию $\varphi(p)$ на $T_{\mathfrak{M}}$, обращающуюся в нуль лишь в одной точке $p_0 \in T_{\mathfrak{M}}$ и $p_0 \bar{\in} \Omega_{\mathfrak{M}}$.

Например, пусть

$$\varphi(p) = \frac{1}{2\delta}\varrho(p, p_0) \text{ при } 0 \leqslant \varrho(p, p_0) < \delta \tag{2.14}$$

и $\varphi(p) = \dfrac{1}{2}$ при всех других значениях $p \in T_{\mathfrak{M}}$.

---

*) Например, можно выбрать $\varphi(p) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\varrho(p,0)}{\delta} & \text{при } 0 \leqslant \varrho(p,0) < \delta \\ 0 & \text{при } \varrho(p,0) \geqslant \delta, \end{cases}$
где $\varrho(p_1, p_2)$ — инвариантное расстояние.

Сходимость по почти периодической функции $\varphi(t)=\varphi(p_t)$ совпадает со сходимостью на $T_{\mathfrak{M}}$, т. е. со сходимостью по модулю.

Функция $f(t)=\dfrac{1}{\varphi(t)}$ определяет ту же сходимость и, следовательно, является L-п.п. функцией.

Она не ограничена и потому не является функцией Г. Бора.

Пример 1. Пусть модуль $\mathfrak{M}$ имеет конечный целый базис, т. е. любое число $\lambda\in\mathfrak{M}$ имеет вид

$$\lambda=\sum_{k=1}^{n} m_k\Delta_k \qquad m_k \text{ — целые числа,}$$

причем Δ_k — линейно независимы, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} m_k\Delta_k\neq 0$$

при m_k целых и $\sum\limits_{k=1}^{n} m_k^2\neq 0$.

Для условной сходимости последовательности τ_n на $\mathfrak{M}$ необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{\tau_n\}$ условно сходилась на числах базиса, т. е. чтобы

$$R[\Delta_k(\tau_p-\tau_q)]\to 0 \qquad \text{при } \min(p,q)\to\infty$$
$$(k=1,2,\ldots,n).$$

При этом, очевидно, последовательность чисел $e^{i\Delta_k\tau_p}$ сходится к некоторому пределу e^{ix_k}, причем число x определено с точностью до целого кратного 2π.

Многообразие, получаемое отождествлением между собою точек n-мерного пространства, соответствующие координаты которых отличаются на целое кратное 2π, называется n-мерным тором.

Очевидно, всякая условно сходящаяся на модуле $\mathfrak{M}$ последовательность чисел $\{\tau_p\}$ определяет точку на n-мерном торе.

Из теоремы Кронекера*) следует, что произвольным числам $x_1, x_2,\ldots,x_n$ можно сопоставить последовательность $\{\tau_p\}$ так, что

$$\lim_{p\to\infty} R[\Delta_k\tau_p-x_k]=0 \qquad \text{при } k=1,2,\ldots,n. \tag{2.15}$$

Таким образом, всякая точка n-мерного тора является предельной для некоторой последовательности.

Легко видеть также, что сходимость последовательности чисел $\{\tau_p\}$ на модуле $\mathfrak{M}$ эквивалентна сходимости последовательности точек $p(\Delta_1\tau_p, \Delta_2\tau_p,\ldots,\Delta_n\tau_p)$ на n-мерном торе.

Итак, группа $T_{\mathfrak{M}}$ есть n-мерный тор, $\Omega_{\mathfrak{M}}$ — винтовая линия на этом торе с уравнениями

$$x_k=\Delta_k t \qquad k=1,2,3,\ldots,n, \tag{2.16}$$

и операция группы состоит в сложении соответствующих координат точек.

---

*) См. [1], [12].

Для непрерывной на торе $T_{\mathfrak{M}}$ функции $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по теореме Вейля [13] имеем

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_0^{2\pi}\cdots\int\limits_0^{2\pi}\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\ldots dx_n=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\varphi(\Delta_1 t, \ldots, \Delta_n t)\,dt. \tag{2.17}$$

Таким образом, мера, определенная нами в § 1 на $T_{\mathfrak{M}}$, совпадает в этом случае с точностью до множителя $(2\pi)^n$ с обычной мерой Лебега на n-мерном торе.

Теорема 4. *Класс L-п. п функций, модуль которых принадлежит модулю $\mathfrak{M}$, совпадает с классом функций, непрерывных на $\Omega_{\mathfrak{M}}$.*

Доказательство. Пусть $\varphi(t)$ есть L-п. п. функция с $\mathfrak{M}_\varphi\subseteq\mathfrak{M}$. Пусть $p_{\tau_n}\to p_\tau$ на $\Omega_{\mathfrak{M}}$ или, что то же, $\tau_n-\tau\xrightarrow{\mathfrak{M}}0$.

Тогда последовательность $\tau^n-\tau_0$ стремится к нулю и по модулю $\mathfrak{M}_\varphi$. Но из сходимости по модулю $\mathfrak{M}_\varphi$ следует, по теореме 2, что

$$\varphi(p_{\tau_n})\to\varphi(p_\tau),$$

т. е. функция $\varphi(t)=\varphi(p_t)$ непрерывна на $\Omega_{\mathfrak{M}}$.

Пусть теперь наоборот $\varphi(t)$ непрерывна на $\Omega_{\mathfrak{M}}$.

Обозначим через H_φ множество точек, для каждой из которых существует последовательность $p_{\tau_n}\xrightarrow{\mathfrak{M}}h$, такая, что $\tau_n\xrightarrow{\varphi}0$.

Из лемм 5 и 6 следует, что H_φ есть замкнутая подгруппа, состоящая из периодов нижнего доопределения функции $\varphi(t)$ на группе $T_{\mathfrak{M}}$ и что сходимость последовательности τ_n по $\varphi(t)$ эквивалентна сходимости последовательности p_{τ_n} на факторгруппе $T_\varphi=T_{\mathfrak{M}}/H_\varphi$.

Отсюда следует, что $\varphi(t)$ — L-п. п. функция. Кроме того, каждый характер $\chi(p)$ группы T_φ является характером на $T_{\mathfrak{M}}$, если считать его постоянным на классах смежности, и значит модуль $\mathfrak{M}_\varphi$ включен в $\mathfrak{M}$. Теорема доказана.

Замечание. Теорему 4 можно сформулировать аналогично теореме Фаварда *) из теории почти периодических функций Г. Бора.

Если $f(t)$ — L-п. п. функция и из

$$f(t+\tau_n)\to f(t)$$

следует

$$\varphi(t+\tau_n)\to\varphi(t),$$

то $\varphi(t)$ — также L-п.п. функция и $\mathfrak{M}_\varphi\subseteq\mathfrak{M}_f$.

Легко заметить также, что класс почти периодических функций Г. Бора, модуль которых принадлежит $\mathfrak{M}$, совпадает с классом функ-

---

*) [12].

ций равномерно непрерывных на $\Omega_{\mathfrak{M}}$ или, что то же, непрерывных на $T_{\mathfrak{M}}$ *).

2°. Перейдем к вопросам апроксимации.

Лемма 7. *Если функция $f(t)$ такова, что при любом значении t_0 и любом $\varepsilon>0$ существуют почти периодический полином $P(t)$ с показателями из некоторого модуля $\mathfrak{M}$, не зависящего от t_0, и число $\mu>0$ такие, что*

$$|f(t_0+\tau)-P(t_0+\tau)|<\varepsilon, \tag{2.20}$$

где τ—любое η-смещение полинома $P(t)$, то $f(t)$ есть L-п. п. функция, принадлежащая модулю $\mathfrak{M}$.

В самом деле, пусть $\tau_n \xrightarrow{\mathfrak{M}} 0$. Тогда $P(t+\tau_n) \rightrightarrows P(t)$, т. е., начиная с некоторого номера,

$$|P(t+\tau_n)-P(t)|<\zeta=\min(\varepsilon, \eta)$$

и в силу (2.20) имеем

$$|f(t_0+\tau_n)-f(t_0)|<3\varepsilon \text{ при } n>n_\varepsilon.$$

Таким образом, функция $f(t)$ непрерывна на группе $\Omega_{\mathfrak{M}}$. Остается сослаться на теорему 3.

Замечание. Аналогично доказывается следующий факт.

Пусть последовательность почти периодических полиномов $P_n(t)$, принадлежащих некоторому модулю $\mathfrak{M}$, сходится так, что каждому числу $-\infty<t<\infty$ и $\varepsilon>0$ отвечают числа n и $\eta>0$, такие, что при $m>n$

$$|P_n(t_0+\tau)-P_m(t_0+\tau)|<\varepsilon,$$

где τ— любое η-смещение $P_n(t)$. Тогда предельная функция $f(t)$ есть L-п. п., принадлежащая модулю $\mathfrak{M}$.

Теорема 5 (апроксимации). *Для того чтобы функция $f(t)$ была L-п. п. функцией, принадлежащей модулю $\mathfrak{M}$, необходимо и достаточно, чтобы каждой паре чисел $\varepsilon>0$ и $N>0$ отвечал почти периодический полином $P(t)$ с показателями из модуля $\mathfrak{M}$ и числа $\delta>0$, такие, что*

$$|f(t+\tau)-P(t+\tau)|<\varepsilon \qquad (|t|\leqslant N), \tag{2.21}$$

где τ — любое δ-смещение для полинома $P(t)$.

Для доказательства необходимости построим функцию

$$\psi(p)=\sup[\varphi_\sigma(p_t, p)f(t)]+\inf[\varphi_\sigma(p_t, p)f(t)], \tag{2.22}$$

где

$$\varphi_\sigma(p_t, p)=\begin{cases} 1-\dfrac{\varrho(p_t, p)}{\sigma} & \text{при } \varrho(p_t, p)<\sigma \\ 0 & \text{при } \varrho(p_t, p)\geqslant\sigma, \end{cases}$$

а $\sigma>0$ выбрано так, что колебание функции $f(p_t)$ в σ-окрестности любой точки сегмента $|t|\leqslant N$ на Ω_f не превосходит $\frac{\varepsilon}{8}$.

*) Множества $T_{\mathfrak{M}}$ рассматривались в связи с теорией функций Г. Бора В. Степановым и А. Тихоновым [14].

Нетрудно показать, что $\psi(p)$ — функция непрерывная на T_f, равная нулю вне σ-окрестности интервала $|t| \leqslant N$ и

$$|f(p_t) - \psi(p_t)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{при } |t| \leqslant N. \tag{2.23}$$

Если функция $\psi(p)$ имеет период на T_f, то мы можем несколько подправить ее, взяв

$$\psi_1(p) = \psi(p) + \frac{\varepsilon}{6}\varphi_\sigma(p, p_0),$$

где p_0 — точка максимума функции $\psi(p)$.

Имеем

$$|f(p_t) - \psi_1(p_t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Сходимость последовательности точек τ_n по функции $\psi_1(t) = \psi_1(p_t)$ эквивалентна ее сходимости на группе T_f и значит при достаточно малом $\delta_1 > 0$ всякое δ_1-смещение функции попадает в σ-окрестность нуля группы T_f. Взяв $3\delta = \min\left(\delta_1, \frac{\varepsilon}{8}\right)$, имеем, если τ есть 3δ-смещение функции $\psi_1(t)$,

$$|\psi_1(t+\tau) - \psi_1(t)| < \frac{\varepsilon}{8}$$

$$|f(t+\tau) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{8} \quad \text{при } |t| \leqslant N$$

и, следовательно,

$$|f(t+\tau) - \psi_1(t+\tau)| < \frac{3\varepsilon}{4}. \tag{2.24}$$

Выбрав апроксимирующий почти периодическую функцию $\psi_1(t)$ полином $P(t)$ так, что

$$|\psi_1(t) - P(t)| < \delta, \tag{2.25}$$

мы получим, что всякое δ-смещение полинома есть 3δ-смещение $\psi_1(t)$ и, следовательно,

$$|f(t+\tau) - P(t+\tau)| < \varepsilon \quad \text{при } |t| \leqslant N \tag{2.26}$$

где τ есть δ-смещение полинома $P(t)$.

Показатели полинома $P(t)$ можно выбрать из модуля функции $\psi_1(t)$, т. е. из $\mathfrak{M}_f$. Теорема доказана*).

3°. Рассмотрим теперь различные доопределения L-п. п. функции $f(p_t)$ на группе T_f.

Функцию $f(p)$ мы назовем „пространственным расширением“ функции $f(p_t)$, если

$$\lim_{\varrho \to 0} \left(\inf_{\varrho(p_t,\, p) < \varrho} f(p_t)\right) \leqslant f(p) \leqslant \lim_{\varrho \to 0} \left(\sup_{\varrho(p_t,\, p) < \varrho} f(p_t)\right) \qquad (p \in T_f). \tag{2.30}$$

*) Доказательство необходимости в теореме 5 можно несколько упростить, если сослаться на теорему Урысона о возможности непрерывно продолжить на все регулярное топологическое пространство любую непрерывную функцию, определенную на замкнутом множестве в этом пространстве.

Очевидно, что при таком доопределении функция $f(p)$ остается непрерывной на T_f в точках Ω_f.

В § 1 мы определили инвариантную меру на группе T_f. Для построения рядов Фурье для L-п. п. функций важно знать, какие из этих функций имеют суммируемое пространственное расширение.

Теорема 6. *Для того чтобы L-п. п. функция $f(t)$ имела суммируемое пространственное расширение достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\lim_{T\to\infty}\left(\inf_{\tau}\frac{1}{2T}\int_{-T+\tau}^{T+\tau}|f(t)|\,dt\right)=k<\infty. \tag{2.31}$$

Доказательство. Представим заданную на Ω_f функцию $f(p_t)$ в виде разности

$$f(p_t)=f_+(p_t)-f_-(p_t), \tag{2.32}$$

где

$$f_+(p_t)=\max[f(p_t),0] \text{ и } f_-(p_t)=\max[-f(p_t),0]$$

функции $f_\pm(p_t)$ мы доопределим на всей группе T так, что

$$f_\pm(p)=\lim_{\varrho\to 0}\left(\inf_{\varrho(p,p_t)<0} f_\pm(p_t)\right)\quad (p\in T). \tag{2.33}$$

Эти функции, очевидно, полунепрерывны снизу и непрерывны на Ω_f. По теореме о полунепрерывных функциях, определенных на метрических пространствах, функции $f_+(p)$ и $f_-(p)$ являются пределами возрастающих последовательностей непрерывных функций *) $\varphi_n^+(p)$ и $\varphi_n^-(p)$, причем

$$\int f_\pm(p)\,dp=\lim_{n\to\infty}\int\varphi_n^\pm(p)'dp.$$

Из равенства $|f(p)|=f_+(p)+f_-(p)$ следует, что

$$\int|f(p)|\,dp=\lim_{n\to\infty}\int[\varphi_n^+(p)+\varphi_n^-(p)]\,dp. \tag{2.34}$$

Но для непрерывных функций интеграл совпадает со средним, т. е.

$$\int[\varphi_n^+(p)+\varphi_n^-(p)]\,dp=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T+\tau}^{T+\tau}[\varphi_n^+(t)+\varphi_n^-(t)]\,dt,$$

причем стремление к пределу равномерно относительно параметра τ. Иначе можно написать

$$\int[\varphi_n^+(p)+\varphi_n^-(p)]\,dp=\lim_{T\to\infty}\inf_{\tau}\int_{-T+\tau}^{T+\tau}[\varphi_n^+(t)+\varphi_n^-(t)]\,dt.$$

*) См. [15].

Но так как, с другой стороны, имеем

$$\varphi_n^+(t) \leqslant f_+(t) \text{ и } \varphi_n^-(t) \leqslant f_-(t),$$

то, принимая во внимание (2.31), получаем

$$\int |f(p)|\, dp \leqslant K,$$

т. е. сделанное нами пространственное расширение функции $f(t)$ — суммируемая функция.

Пример 2. L-п. п. функция

$$f(t) = \frac{1}{n + \cos\lambda_1 t + \ldots + \cos\lambda_n t} \qquad (n > 1)$$

при линейно независимых $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ имеет единственное пространственное расширение на n-мерном торе

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\left(\cos\frac{x_1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\cos\frac{x_n}{2}\right)^2}.$$

Эта функция суммируема при $n > 2$ и не суммируема при $n = 2$.

Если L-п. п. функция $f(t)$ имеет суммируемое пространственное расширение, то можно поставить ей в соответствие ряд Фурье, т. е.

$$f(t) \sim \sum a_k e^{i\lambda_k t}, \tag{2.35}$$

где

$$\lambda_k \in \mathfrak{M}_f,$$

а

$$a_k = \int f(p)\overline{\chi_k(p)}\, dp. \tag{2.36}$$

Очевидно, при различных пространственных расширениях, мы будем получать различные ряды Фурье.

Теорема 7. *Если пространственное расширение L-п. п. функции имеет суммируемый квадрат, то верно равенство Парсеваля*

$$\int |f(p)|^2\, dp = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2. \tag{2.37}$$

Доказательство. Из рассмотрения интеграла

$$\int |f(p) - \sum a_k \chi_k(p)|^2\, dp \geqslant 0$$

получаем, как обычно, неравенство Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leqslant \int |f(p)|^2\, dp.$$

Далее, рассматриваем функцию

$$\psi(p) = \int f(s)\overline{f(s+p)}\, ds. \tag{2.38}$$

Эта функция непрерывна, что легко показать, исходя из неравенства Буняковского и того, что

$$\lim_{h\to 0}\int |f(s+h)-f(s)|^2\,ds = 0\,^{*}). \tag{2.39}$$

С другой стороны, из теоремы Фубини и равенства

$$\chi(p+q)=\chi(p)\,\chi(q)$$

можно получить

$$\int \psi(p)\,\overline{\chi_k(p)}\,dp = |a_k|^2.$$

Итак, ряд Фурье для функции $\psi(p)$ равномерно сходится, и разность между $\psi(p)$ и суммой этого ряда есть непрерывная функция, ортогональная ко всем характерам. Отсюда следует

$$\psi(p)=\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2\,\chi_k(p) \tag{2.37'}$$

и при $p=0$ получаем (2.37).

Теорема 8. *Модуль L-п. п. функции $f(t)$ совпадает с наименьшим модулем $\mathfrak{M}_\lambda$, содержащим все показатели какого-нибудь из рядов Фурье функции $f(t)$.*

Доказательство. Пусть

$$f(t)\sim\sum_{k=1}^{\infty}a_k e^{i\lambda_k t}. \tag{2.40}$$

Показатели λ_k относятся к модулю $\mathfrak{M}_f$ по определению. Следует доказать, что из сходимости к нулю любой последовательности $\{\tau_n\}$ на всех показателях λ_k

$$\lim_{n\to\infty}R[\lambda_k\tau_n]=0 \qquad (k=1,\,2,\ldots)$$

вытекает $\tau_n \xrightarrow{f} 0$, т. е. что сходимость по функции эквивалентна сходимости по $\mathfrak{M}_\lambda$.

---

*) Очевидно, достаточно доказать (2.39) лишь для характеристической функции произвольного измеримого множества ξ. Выберем замкнутое множество $F\subset\xi$ и открытое $G\supset F$ так, что

$$m[\xi-F]<\delta \text{ и } m[G-F]<\delta.$$

Пусть расстояние между F и границей G равно $d>0$. Выбрав h так, что $\rho(h,0)<d$, мы получим, что $F+h\subset G$ и, следовательно, из инвариантности меры

$$m[G-(F+h)]<\delta.$$

Отсюда

$$\int |\chi_F(p+h)-\chi_F(p)|\,dp<2\delta,$$

кроме того,

$$\int |\chi_\xi(p)-\chi_F(p)|^2\,dp<2\delta$$

и, следовательно,

$$\int |\chi_\xi(p+h)-\chi_F(p)|^2\,dp<4\delta;$$

отсюда без труда получается (2.39).

В силу теоремы 2 это означает, что $\mathfrak{M}_\lambda = \mathfrak{M}_f$.

Пусть

$$\tau_n \xrightarrow{\mathfrak{M}_\lambda} 0 \tag{2.41}$$

и p_{τ_n} не стремится к нулю на T_f. Тогда выделим подпоследовательность τ'_n так, что $p_{\tau'_n} \to h \neq 0$.

На всех характерах $\chi_k(p)$, отвечающих $e^{i\lambda_k t}$, имеет место в силу (2.41)

$$\chi_k(h) = 1. \tag{2.42}$$

Отсюда следует, что

$$\int f(p+h)\overline{\chi_k(p)}\,dp = \int f(p)\overline{\chi_k(p)}dp,$$

т. е. что функция $f(p+h) - f(p)$ ортогональна ко всем характерам группы T_f и значит к любой непрерывной функции на этой группе.

Покажем, что во всех точках $p_t \in \Omega_f$

$$f(p_t + h) = f(p_{t_0}). \tag{2.43}$$

В самом деле, предположим противное.

Пусть для определенности $f(p_{t_0} + h) - f(p_{t_0}) = 4m > 0$. Функция $f(p)$ непрерывна в точке p_{t_0} и значит в некоторой δ-окрестности этой точки выполняется

$$|f(p) - f(p_{t_0})| < m. \tag{2.44}$$

По определению пространственного расширения функции $f(p_t)$ в δ-окрестности точки $p_{t_0} + h$ существует точка $p_1 + h \in \Omega_f$, в которой

$$f(p_1 + h) - f(p_{t_0}) > 3m. \tag{2.45}$$

Выбрав σ-окрестность точки $p_1 + h$ так, чтобы она оказалась вся в δ-окрестности $p_{t_0} + h$, мы получим из (2.44) и (2.45), что

$$f(p+h) - f(p) > m \text{ при } \varrho(p, p_1) < \sigma. \tag{2.46}$$

Построим непрерывную функцию

$$\varphi_\sigma(p) = \begin{cases} \omega_\sigma\left(1 - \dfrac{\varrho(p, 0)}{\sigma}\right) & \text{при } 0 \leqslant \varrho(p, 0) < \sigma \\ 0 & \text{при } \varrho(p, 0) \geqslant \sigma, \end{cases}$$

где ω_σ выбрано так, что $\int \varphi_\sigma(p)\,dp = 1$. Функции $f(p+h) - f(p)$ и $\varphi_\sigma(p - p_1)$ должны быть ортогональны.

С другой стороны, из (2.46) следует

$$\int [f(s+h) - f(s)]\,\varphi_\sigma(s - p_1)\,ds \geqslant m > 0.$$

Итак, верно (2.43). Но тогда, как легко видеть, точка $p_t + h$ также является точкой непрерывности функции $f(p)$, и значит

$$\lim_{n\to\infty} f(t + \tau'_n) = f(p_t + h) = f(t),$$

т. е. $\tau_n \xrightarrow{f} 0$, что противоречит тому, что $h \neq 0$. Итак, из $\tau_n \xrightarrow{\mathfrak{M}_\lambda} 0$ следует $\tau_n \longrightarrow 0$. Теорема доказана.

Теорема 9 (единственности). *Если какой-нибудь из рядов Фурье функции $f(t)$ совпадает с каким-нибудь из рядов Фурье функции $f_1(t)$, то $f(t) \equiv f_1(t)$.*

Доказательство. По теореме 8 функции $f(t)$ и $f_1(t)$ имеют один и тот же модуль и, следовательно, их общий ряд Фурье отвечает пространственным расширениям $f(p)$ и $f_1(p)$ этих функций на одной и той же группе T.

Разность $f(p) - f_1(p)$ ортогональна ко всем характерам группы T и, следовательно, равна нулю во всех точках непрерывности, а в частности на $\Omega_{\mathfrak{M}}$. Итак, $f(t) = f_1(t)$.

Теорема 10 (суммирование рядов Фурье). *Пусть $f(t)$ — L-п. п. функция, имеющая ряд Фурье*

$$f(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{i\lambda_k t} . \tag{2.50}$$

Существует зависящая от параметра $\sigma > 0$ последовательность чисел $\{c_k^\sigma\}$, такая, что любым $\varepsilon > 0$ и $N > 0$ отвечают $\sigma > 0$, $m_\sigma > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$\left| f(t+\tau) - \sum_{k=1}^{m_\sigma} c_k^\sigma a_k e^{i\lambda_k (t+\tau)} \right| < \varepsilon \quad \text{при } |t| \leqslant N,$$

где τ — любое δ, $\frac{1}{\delta}$ - смещение функции $f(t)$ *).

Доказательство. Пусть $\varphi_\sigma(p)$ определено так же, как в (2.47) и

$$\psi_\sigma(p) = \int \varphi_\sigma(p-s)\varphi_\sigma(s)\, ds. \tag{2.51}$$

Из равенства Парсеваля (2.37) получаем

$$\psi_\sigma(p) = \sum_{k=1}^{\infty} |b_k^\sigma|^2 \chi_k(p), \tag{2.52}$$

где b_k^σ — коэфициент Фурье функции $\varphi_\sigma(p)$.

Далее, если $f(p)$ — суммируемая функция и a_k — ее коэфициенты Фурье, то

$$\int f(s-p)\, \psi_\sigma(s)\, ds = \sum_{k=1}^{\infty} a_k |b_k^\sigma|^2 \chi_k(p). \tag{2.53}$$

В самом деле, в левой части равенства (2.53) стоит непрерывная функция от p, а в правой — ее абсолютно сходящийся ряд Фурье.

С другой стороны, во всех точках непрерывности функции $f(p)$ при $\sigma > 0$ таком, что колебание функции σ-окрестности любой точки $p_t (|t| \leqslant N)$ не превосходит $\frac{\varepsilon}{2}$, имеем

$$\left| f(p_t) - \int f(s-p_t)\, \psi_\sigma(s)\, ds \right| \leqslant \int |f(p_t) - f(u)|\, \psi_\sigma(u-p_t)\, du < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.54}$$

---

*) В формулировке теоремы слова „δ, $\frac{1}{\delta}$-смещение функции $f(t)$“ можно заменить словами „δ, N-смещение апроксимирующего полинома“.

Отсюда, при достаточно большом m_σ получаем

$$\left| f(p_t) - \sum_{k=1}^{m_\sigma} |b_k^\sigma|^2 a_k \chi_k(p_t) \right| < \varepsilon. \tag{2.55}$$

Из непрерывности обоих членов разности в точке p_t, ($|t| \leqslant N$) следует, что неравенство (2.55) выполняется в некоторой окрестности отрезка $|t| \leqslant N$ на Ω, откуда и следует утверждение теоремы.

Метод суммирования, данный при доказательстве теоремы 10, конечно, не единственно возможный.

Вместо функции $\psi_\sigma(p)$ можно взять любую функцию $\theta_\sigma(p)$ с абсолютно сходящимся рядом Фурье, лишь бы

$$\lim_{\sigma \to 0} \int \theta_\sigma(p)\, dp = 1 \tag{2.56}$$

и

$$\theta_\sigma(p) \rightrightarrows 0 \tag{2.57}$$

вне любой окрестности точки нуль *).

Доказательство при замене $\psi_\sigma(p)$ произвольной функцией $\theta_\sigma(p)$ почти не изменяется.

Если основная функция $f(p)$ имеет суммируемый квадрат, то вместо абсолютной сходимости ряда Фурье функции $\theta_\sigma(p)$ достаточно потребовать, чтобы $\theta_\sigma(p)$ имела суммируемый квадрат.

Так, функция

$$\theta_\sigma(p) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega_\sigma} & \text{при } \varrho(p, 0) < \sigma \\ 0 & \text{при } \varrho(p, 0) \geqslant \sigma \end{cases}$$

при

$$\int \theta_\sigma(p)\, dp = 1$$

дает метод суммирования Вейля **).

Теорема 11. *Пусть*

$$f(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{i\lambda_k t}$$

ограниченная L-п. п. *функция с ее рядом Фурье,* $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_s$ — *базис наименьшего числового модуля, содержащего числа* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ *и*

$$\sigma_{n_1, n_2, \ldots, n_p}^{\Delta_1, \ldots, \Delta_p}(t) = \sum \left(1 - \frac{m_1}{n_1}\right)\left(1 - \frac{m_2}{n_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{m_s}{n_s}\right) a_{m_1, \ldots, m_s} e^{i\left(\sum\limits_{j=1}^{s} m_j \Delta_j\right) t}$$

полином Бохнера—Фейера. Тогда при $r \to \infty$ и $n_j \to \infty$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ *последовательность полиномов* $\sigma_{n_1, \ldots, n_p}^{\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_p}(t)$ *сходится к функции* $f(t)$

*) Вообще, к функциям, определенным на T, полностью приложима теория сходимости сингулярных интегралов, развитая автором совместно с С. Г. Крейном и Б. И. Коренблюмом [17], [18], [16].

**) См. [1].

в том же смысле, в каком понимается сходимость в теоремах 5 и 10.

Доказательство. Топология, определяемая на оси окрестностями нуля $U(\delta, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s)$,

$$R[\lambda_k t] < \delta \qquad (k = 1, 2, \ldots, s) \tag{2.58}$$

эквивалентна, как легко получить из теорем 2 и 8, топологии на Ω_f.

При достаточно большом значении s и достаточно малом $\delta > 0$ будем иметь в $U(\delta, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_p)$-окрестности любой точки $p_t(|t| \leqslant N)$

$$|f(p) - f(p_t)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Каждому числу Δ_j отвечает характер $\chi_j(p)$, причем $\chi_j(p_t) = e^{i\Delta_j t}$. Построим ядро

$$\theta_{n_1, \ldots, n_s}^{\Delta_1, \ldots, \Delta_s}(p) = \frac{1}{n_1}\left(\frac{\chi_1^{n_1}(p) - \chi_1^{-n_1}(p)}{\chi_1^{\frac{1}{2}}(p) - \chi_1^{-\frac{1}{2}}(p)}\right)^2 \cdot \frac{1}{n_2}\left(\frac{\chi_2^{n_2}(p) - \chi_2^{-n_2}(p)}{\chi_2^{\frac{1}{2}}(p) - \chi_2^{-\frac{1}{2}}(p)}\right)^2 \cdots$$

$$\cdots \frac{1}{n_s}\left(\frac{\chi_s^{n_s}(p) - \chi_s^{-n_s}(p)}{\chi_s^{\frac{1}{2}}(p) - \chi_s^{-\frac{1}{2}}(p)}\right)^2.$$

Легко видеть, что

$$\int_T \theta_{n_1, \ldots, n_s}^{\Delta_1, \ldots, \Delta_s}(p)\, dp = 1.$$

Обозначив через U_δ окрестность нуля

$$|\chi_j(p) - 1| < \delta \qquad (j = 1, 2, \ldots, s),$$

будем иметь

$$\lim \int_{T - U_\delta} \left|\theta_{n_1, \ldots, n_s}^{\Delta_1, \ldots, \Delta_s}(p)\right| dp \to 0.$$

Таким образом, ядро $\theta_{n_1, \ldots, n_s}^{\Delta_1, \ldots, \Delta_s}(p)$ удовлетворяет условиям (2.56) и (2.57).

Чтобы закончить доказательство, остается лишь заметить, что

$$\sigma_{n_1, \ldots, n_s}^{\Delta_1, \ldots, \Delta_s}(t) = \int \theta_{n_1, \ldots, n_s}^{\Delta_1, \ldots, \Delta_s}(s)\, f(s - p_t)\, ds.$$

Пример L-п. п. функции с неоднозначно определенным рядом Фурье. Пусть множество точек $p(x_1, x_2)$ образует двумерный тор T_2, т. е. $p(x_1', x_2') = p(x_1'', x_2'')$ при $x_1' - x_1'' = 2k\pi$ и $x_2' - x_2'' = 2n\pi$, и $x_1 = \Delta_1 t$, $x_2 = \Delta_2 t$ $\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\right.$ — иррациональное число$\left.\right)$ винтовая линия Ω_2 на T_2.

Множество точек пересечения винтовой линии с меридианом $x_1 = 0$ счетно и, следовательно, может быть заключено в интервалы с суммой длин, меньшей любого наперед данного $\delta > 0$.

Определим функцию $\varphi(p)$ на этом меридиане, равную расстоянию точки p от замкнутого множества, дополнительного к этим интервалам на меридиане $x_1=0$.

На части тора $T_2, 0 \leqslant x_1 \leqslant 2\pi-\delta$ (рис. 1) мы будем считать функцию $\varphi(p)$ постоянной на каждом отрезке винтовой линии:

$$x_1 = \Delta_1 t,\ x_2 = x_2^0 + \Delta_2 t \text{ при } 0 \leqslant \Delta_1 t \leqslant 2\pi - \delta.$$

На оставшейся части тора мы определим $\varphi(p) > 0$ так, чтобы в результате получилась непрерывная функция.

Напр., можно положить при $x_1 = 2\pi - \frac{\delta}{2}$, $\varphi(p)=1$ и определить ее как линейную функцию от x_1 на сегментах $\left\langle 2\pi-\delta, 2\pi-\frac{\delta}{2}\right\rangle$ и $\left\langle 2\pi-\frac{\delta}{2}, 2\pi\right\rangle$.

Если взять δ достаточно малым, то $\varphi(p)=0$ на множестве E mes $E > 1-\varepsilon$ *). Функция $\varphi(t)=\varphi(p_t)>0$ ($p_t \in \Omega_2$) почти периодическая с двойным базисом модуля**).

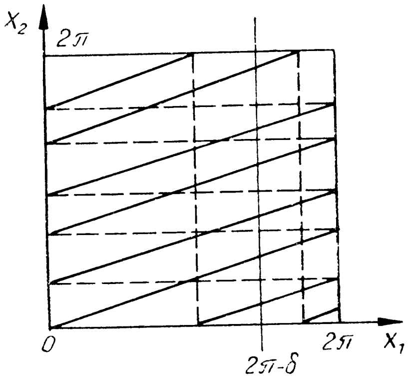

Рис. 1.

Функция

$$f(t) = \sin\left(\frac{1}{\varphi(t)}\right) \tag{2.59}$$

есть L-п. п. функция с тем же модулем, что и $\varphi(t)$. На E функция $f(p_t)$ не определена.

Доопределяя ее на E один раз как $+1$, а другой раз как -1, мы получим два пространственных расширения функции $f(t)$ с различными рядами Фурье. Очевидно, что эта функция имеет бесконечное множество рядов Фурье.

§ 3

1°. В этом параграфе мы покажем, как переносятся основные результаты предыдущих параграфов на функции, определенные на группах.

Пусть $f(x)$ — функция, определенная на некоторой группе G и принимающая на ней числовые значения.

---

*) Мера понимается в том смысле, в каком мы определили в § 1. Мера всего тора T_2 равна 1.

**) Положительная почти периодическая функция $\varphi(t)$ обладает следующим замечательным свойством: при любом $\mu>0$ множество E_μ точек t, в которых $\varphi(t)<\mu$ имеет плотность большую, чем $1-\varepsilon$, т. е.

$$\lim_{T\to\infty} \frac{E_\mu^T}{2T} > 1-\varepsilon,$$

где E_μ^T есть пересечение E_μ и сегмента $<-T, T>$.

Этот вывод следует непосредственно из эргодической теоремы Вейля [13].

Множество элементов группы h, удовлетворяющих тождеству

$$f(xaha^{-1}) = f(x) \quad \text{при } x \in G \text{ и } a \in G, \tag{3.10}$$

образует инвариантную подгруппу H.

Эти элементы мы назовем периодами функции $f(x)$.

Легко видеть, что на каждом классе смежности функция $f(x)$ сохраняет постоянное значение. Поэтому функцию $f(x)$ можно рассматривать, как функцию, определенную на факторгруппе $G_1 = G/H$.

Если группа G топологическая и функция $f(x)$ непрерывна, то она непрерывна также и на группе G.

Определение 7. *Последовательность h_k элементов группы G_1 мы назовем сходящейся к единице e по функции $f(x)$, $h_k \xrightarrow{f} e$, если*

$$\lim_{k\to\infty} \{ \sup_{a \in G_1} | f(xah_ka^{-1}) - f(x) | \} = 0. \tag{3.11}$$

Заметим, что, положив в (3.11) $a = x^{-1}b$, мы получим

$$\lim_{k\to\infty} \{ \sup_{b \in G_1} | f(bh_kb^{-1}x) - f(x) | \} = 0,$$

т. е. „левая“ и „правая“ сходимости совпадают.

Последовательность h_k мы назовем сходящейся к элементу h_0, если $h_kh_0^{-1} \xrightarrow{f} e$ и, наконец, *условно сходящейся, если*

$$h_kh_p^{-1} \xrightarrow{f} e \quad \textit{при } \min(k, p) \to \infty.$$

Предположим, что группа G топологическая, удовлетворяющая требованиям:

α) существует счетная плотная сеть на G;

β) существует последовательность компактных множеств

$$F_1 \subset F_2 \subset \dots \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} F_n = G.$$

Такие группы мы назовем F-группами.

Определение 8. *Непрерывная на G функция называется* L-п. п., *если выполнены следующие условия:*

a$''$) *каждая бесконечная последовательность элементов группы G содержит сходящуюся по функции $f(x)$ подпоследовательность.*

b$''$) *Если $h_k \xrightarrow{f} e$ и $g_k \xrightarrow{f} e$, то*

$$h_k(g_k)^{\pm 1} \xrightarrow{f} e.$$

Условие b$''$) непосредственно содержит, что из $h_k \xrightarrow{f} e$ следует $h_k^{-1} \xrightarrow{f} e$.

Кроме того, если $x_n \longrightarrow x_0$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \{ \sup_{a \in G} | f(xax_nx_0^{-1}a^{-1}) - f(x) | \} = 0,$$

то, положив $x = x_0$ и $a = x_0^{-1}$, получим

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0). \tag{3.12}$$

Заметим также, что если $x_n \to x_0$ и U—произвольная окрестность e, то при $n > n_U$; $ax_nx_0^{-1}a^{-1} \in U$ и, в силу непрерывности функции $f(x)$ на группе G, $x_n \xrightarrow{f} x_0$.

Лемма 8. *Если $h_n \xrightarrow{f} e$ и F компактное на G, то при заданном $\varepsilon > 0$ и $n > n_\varepsilon$*

$$\sup_{a \in G} |f(xah_na^{-1}) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{при } x \in F. \tag{3.13}$$

В самом деле, в противном случае мы имели бы бесконечную подпоследовательность $h'_n \xrightarrow{f} e$ и две такие последовательности $x_n \in F$ и $a_n \in G$, что

$$|f(x_na_nh'a_n^{-1}) - f(x_n)| \geqslant \varepsilon. \tag{3.14}$$

В силу компактности F мы можем, конечно, считать, что $x_n \longrightarrow x_0$ и, следовательно, $x_n \xrightarrow{f} x_0$. Кроме того, из $h'_n \xrightarrow{f} 0$ следует $a_nh'a_n^{-1} \xrightarrow{f} e$ и из b'') имеем $x_na_nh'_na_n^{-1} \xrightarrow{f} x_0$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в (3.14), приходим к противоречию.

Введем теперь новую топологию в группе G. Сначала введем множества E_n, определенные неравенствами

$$\sup_{a \in G} |f(xaha^{-1}) - f(x)| < \frac{1}{n} \quad \text{при } x \in F_n \text{ и } h \in E_n \tag{3.15}$$

и покажем, что для каждого натурального n можно подобрать m так, что

$$E_m (E_m)^{\pm 1} \subset E_n. \tag{3.16}$$

В самом деле, если бы это было не так, то можно было бы подобрать последовательность m_k и пар элементов $h_k \in E_{m_k}$ и $g_k \in E_{m_k}$ так, чтобы, например, $h_kg_k \overline{\in} E_n$, т. е.

$$\sup_{a \in G} |f(x_kah_kg_ka^{-1}) - f(x_k)| \geqslant \frac{1}{n} \text{ при некотором } x_k \in F_n. \tag{3.17}$$

С другой стороны, так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} F_n = G$, то $h_k \xrightarrow{f} e$ и $g_k \xrightarrow{f} e$ и из b'') $h_kg_k \xrightarrow{f} e$. Но тогда (3.17) противоречит лемме 8.

Определим новые окрестности единицы группы

$$U_n = \sum E_m, \tag{3.18}$$

где в теоретико-множественную сумму в правой части равенства (3.18) входят множества E_m, которым отвечают E_{n_m} так, что $E_m (E_{n_m})^{\pm 1} \subset E_n$.

Легко проверить, аналогично тому, как это было сделано в § 1, что окрестности U_n образуют полную систему окрестностей единицы *).

Полученную группу с новой топологией мы будем обозначать Ω_f. Сходимость последовательности элементов на этой группе, очевидно, эквивалентна сходимости по функции $f(x)$.

---

*) Для некоммутативных групп к условиям 1), 2), 3), 4) леммы 2 добавляется еще условие: каждой окрестности единицы U отвечает окрестность V, такая, что $aVa^{-1} \subset U$ при $a \in G$.

Поставим в соответствие каждой условно сходящейся последовательности идеальный элемент группы, считая две последовательности $h_n \xrightarrow{f}$ и $g_n \xrightarrow{f}$ эквивалентными, если

$$h_n g_n^{-1} \xrightarrow{f} e.$$

Из b″) следует, что две последовательности, эквивалентные третьей, эквивалентны между собою.

Легко видеть также, что из $h_n \sim h'_n$ и $g_n \sim g'_n$ следует $h_n g_n \sim h'_n g'_n$.

Таким образом, естественно под произведением идеальных элементов p' и p'', определенных сходящимися последовательностями $x'_n \xrightarrow{f} p'$ и $x''_n \xrightarrow{f} p''$, понимать элемент, определенный сходящейся последовательностью

$$x'_n x''_n, \text{ т. е. } x'_n x''_n \xrightarrow{f} p' p''.$$

В расширенной группе T_f можно ввести окрестности единицы

$$W_n = C_T \overline{C_\Omega U_n} \tag{3.18'}$$

и проверить так же, как это было сделано в § 1, что множества W_n образуют полную систему окрестностей единицы группы T_f. Группа Ω_f плотна в T_f и из α) следует, что в T_f есть плотная счетная сеть. Таким образом, в группе T_f имеет место вторая аксиома счетности.

Из условной компактности группы Ω_f следует, что Ω_f покрывается конечным числом множеств вида $s_i U_n$, $(i = 1, 2, \ldots, p, s_i \in \Omega_f)$ и U_n — произвольная окрестность единицы в Ω_f.

Пусть W_m — произвольная окрестность единицы группы. Существует окрестность U_n, такая, что $\overline{U}_n \subset W_m$, и, следовательно, конечным числом множеств вида $s_i W_m$, $s_i \in \Omega_f$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ можно покрыть всю группу T_f.

Таким образом, T_f есть компактная группа со второй аксиомой счетности.

2°. Матрицы $g^n(x) = \|g_{ij}^{(n)}(x)\|$ полной системы неприводимых унитарных представлений группы T_f — непрерывные матрицы-функции на группе G, причем сходимость в смысле определения 8 последовательности элементов x_n группы G по всем коэфициентам $g_{ij}^{(n)}(x)$ эквивалентна ее сходимости на T_f и, следовательно, сходимости по функции $f(x)$. Таким образом, полная система унитарных представлений играет здесь ту же роль, что числовой модуль $\mathfrak{M}_f$ для L-п. п. функции на числовой оси.

Определение 9. *ε. F-смещением функции $f(x)$ называется такой элемент $h \in G$, что*

$$\sup_{a \in G} |f(xaha^{-1}) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{при } x \in F. \tag{3.20}$$

Докажем теорему, аналогичную теореме 5.

Теорема 12. *Каждому числу $\varepsilon > 0$ и компактному множеству $F \subset G$ отвечают конечная сумма вида*

$$P(x) = \sum_{i, j, k} a_{ij}^{(k)} g_{ij}^{(k)}(x) \tag{3.21}$$

и число $\delta > 0$, *такие, что*

$$\sup_{a \in G} |f(xaha^{-1}) - P(xaha^{-1})| < \varepsilon \quad \text{при } h \in F, \tag{3.22}$$

если h — любое δ, F-смещение суммы $P(x)$.

Для доказательства определим на T_f непрерывную функцию $\psi(x)$, которая на компактном множестве F совпадает с $f(x)$ и имеет в некоторой точке T_f строгий максимум.

При достаточно малом $\sigma > 0$ все σ-смещения функции $\psi(x)$ находятся в некоторой наперед данной U-окрестности единицы группы.

Выберем эту окрестность так, чтобы иметь в U-окрестности множества F

$$|f(x) - \psi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и апроксимируем функцию $\psi(x)$ конечной суммой вида (3.21) так, что

$$|\psi(x) - P(x)| < \mu = \min\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\sigma}{2}\right).$$

Положив $\delta = \frac{\sigma}{2}$, будем иметь (3.22).

Имеет место также обратная теорема, и доказательство ее в существенном не отличается от доказательства соответствующей теоремы § 2.

3°. Если заданная функция $f(x)$ имеет суммируемое (в смысле инвариантной меры Неймана) пространственное расширение $f(p)$, то можно ей сопоставить, вообще говоря, не единственным образом, ряд Фурье.

Введем обозначение

$$A_n = \int f(p)\, g_n(p)\, dp, \tag{3.30}$$

где $g_n(p)$ — унитарное неприводимое представление группы T_f. Ряд Фурье функции $f(x)$ может быть записан в форме

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n} \operatorname{Sp}(A_n g\ (x)), \tag{3.31}$$

где $\operatorname{Sp} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, а r_n — степень представления $g_n(x)$. Если расширение $f(p)$ имеет суммируемый квадрат, то ряд (**3.31**) сходится в среднем квадратичном к $f(p)$.

Теорема 13. *Представления, входящие в любой ряд Фурье* L-п. п. *функции* $f(x)$, *образуют полную систему представлений группы* T_f.

Доказательство. Если для некоторого элемента $h \in T_f$ $g_n(h) = g_n(e)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то из (3.31) получаем, что почти всюду на T_f

$$f(paha^{-1}) = f(p) \quad \text{при } a \in T_f. \tag{3.32}$$

Отсюда легко получается (см. доказательство теоремы 8), что

$$f(xaha^{-1}) = f(x) \quad \text{при } x \in \Omega_f \text{ и } a \in T_f. \tag{3.33}$$

Выбрав последовательность $h_n \xrightarrow{f} h$, мы будем иметь

$$\sup_{a \in G} |f(xah_na^{-1}) - f(xaha^{-1})| \to 0$$

и, в силу (3.33), $h_n \xrightarrow{f} e$. Итак, $h = e$. Теорема доказана.

Из этой теоремы непосредственно следует, что сходимость последовательности элементов $\{x_n\}$ по L-п. п. функции эквивалентна сходимости по всем представлениям, входящим в какой-нибудь ряд Фурье этой функции.

Теорема 14. *Если какой-нибудь ряд Фурье* L-п. п. *функции* $f(x)$ $(x \in G)$ *совпадает с каким-нибудь из рядов Фурье* L-п. п. *функции* $f_1(x)$ $(x \in G)$, *то*

$$f(x) \equiv f_1(x) \qquad (x \in G).$$

В самом деле, из теоремы 13 следует, что ряды Фурье функций $f(x)$ и $f_1(x)$ соответствуют пространственным расширениям этих функций на одной и той же группе T_f.

Разность между этими функциями ортогональна ко всем коэфициентам полной системы представлений и, следовательно, равна нулю во всех точках непрерывности.

Рассматривая свертку пространственного расширения функции $f(x)$ с каким-нибудь ядром $\theta_\sigma(x)$, удовлетворяющим условиям (2.56) и (2.57) § 2*), мы получим метод суммирования ряда Фурье L-п. п. функции и теорему, аналогичную теореме 10.

Определение 10. 4°. *Множество E элементов топологической группы G называется относительно плотным, если, как бы ни была выбрана окрестность U единицы группы e, найдется такое конечное множество элементов* $s_1, s_2, \ldots s_n$, *что*

$$\sum_{i=1}^{n} s_i EU = G. \tag{3.40}$$

С помощью этого понятия мы можем дать определение L-п. п. функции на F-группе, аналогичное определению 1 и, повторяя почти без изменений рассуждения § 1, доказать его эквивалентность определению 8.

Более общим будет следующее определение L-п. п. функции на произвольной группе G.

Определение 11. Функция $f(x)$ $(x \in G)$ *называется* L-п. п., *если существует такое гомоморфное отображение G на бикомпактную группу Γ, что $f(x)$ является однозначной и непрерывной на образе Ω группы G.*

Покажем, что так определенная L-п. п. функция удовлетворяет условиям a″) и b″) определения 8.

Вместо функции $f(x)$ мы будем рассматривать ограниченную функцию $F(x) = th\, f(x)$, сходимость по которой эквивалентна сходимости по $f(x)$.

Доопределим функцию $F(x)$ на T-$\overline{\Omega}$-замыкании группы Ω в Γ.

$$F(p) = \sup_U \{ \inf_{x \in U(p)} (F(x)) \}, \tag{3.41}$$

---

*) Конечно, в условии (2.57) следует слова „окрестность точки нуль“ заменить словами „окрестность единицы группы“.

где supremum берется по всем окрестностям единицы. Это — „нижнее доопределение“.

На бикомпактной группе T существует инвариантный интеграл, с помощью которого можно построить ряд Фурье ограниченной и полунепрерывной снизу функции $F(p)$.

$$F(p) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n} \operatorname{Sp}(A_n g_n(p)). \tag{3.42}$$

Пусть H— замкнутая инвариантная подгруппа элементов, для которых имеют место равенства

$$g_k(h) = g_k(l) \quad (k=1, 2, \ldots).$$

Из (3.42) имеем

$$F(ph) = F(p) \tag{3.43}$$

почти всюду на T.

Отсюда легко получается, что (3.43) имеет место во всех точках непрерывности функции $F(p)$ и, следовательно, при $p \in \Omega$ (см. доказательство теоремы 8).

При любом $p \in T$ и любом $\varepsilon > 0$ можно, в силу полунепрерывности $F(p)$ снизу, подобрать окрестность единицы U так, что

$$F(q) > F(p) - \varepsilon \quad \text{при } q \in Up. \tag{3.44}$$

С другой стороны, в окрестности $ph - Uph$ есть точка $qh \in \Omega$, в которой

$$F(qh) < F(ph) + \varepsilon. \tag{3.45}$$

Так как $h^{-1} \in H$, то $F(gh) = F(q)$ и

$$F(p) < F(ph) + \varepsilon \quad \text{при } p \in T. \tag{3.46}$$

Аналогично получаем

$$F(p) \leqslant F(ph^{-1}),$$

откуда следует, что (4.43) выполнено при всех значениях $p \in T$. Итак, H есть группа периодов функции $F(p)$.

Таким образом, функция $F(p)$ однозначно определена на фактор-группе $T_f = T/H$ и непрерывна на Ω_f-образе группы Ω на T_f.

Представления $g_n(p)$ из (3.42) дают полную систему представлений группы T_f и, следовательно, T_f удовлетворяет второй аксиоме счетности.

Кроме того, $F(p)$ является нижним доопределением и не имеет периодов на T_f.

Отсюда и из леммы 5 (доказательство которой без изменения переносится на случай некоммутативной группы) получаем, что сходимость последовательности $\{x_n\}$ по функции $F(x)$ (а следовательно, и $f(x)$) эквивалентна сходимости последовательности образов этих элементов на T_f.

Отсюда следуют свойства a″) и b″) для функции $f(x)$.

Дополнение 1 к § 1

Покажем, что условия a) и b) Б. Левитана и условия a′) и b′) в определении L-п. п. функции эквивалентны.

Условие b), очевидно, следует из b′). Остается доказать обратное, т. е. что каждой L-п. п. функции $f(t)$ отвечают множества $E'_{\varepsilon, N}$, удовлетворяющие условиям a) и b′).

Обозначим через $\varrho(p_1, p_2)$ инвариантное расстояние на T_f и введем в рассмотрение величину

$$d_N(\varrho) = \sup_{|t| \leq N} \left(\sup_{\varrho(p, p_t) < \varrho} |f(p) - f(p_t)| \right) \qquad (\varrho > 0); \tag{1.88}$$

$d_N(\varrho)$ есть неубывающая функция от ϱ, причем

$$\lim_{\varrho \to 0} d_N(\varrho) = 0.$$

Далее определим непрерывную возрастающую функцию

$$\delta_N(\varrho) = \frac{1}{\varrho} \int_{\varrho}^{2\varrho} d_N(\varrho)\, d\varrho + \varrho.$$

Легко видеть, что

$$\delta_N(\varrho) > d_N(\varrho) \text{ и } \delta_N(0) = 0. \tag{1.89}$$

Разрешая уравнение

$$\delta_N(\varrho) = \varepsilon,$$

мы каждой паре чисел $\varepsilon > 0$ и $N > 0$ поставим в соответствие число ϱ_ε^N. Через $E'_{\varepsilon,N}$ мы обозначим множество значений τ, для которых

$$\varrho(p_\tau, 0) < \varrho_\varepsilon^N.$$

Очевидно, $E'_{\varepsilon, N}$ состоит из относительно плотного множества интервалов, а из (1.88) и (1.89) имеем при $\tau \in E'_{\varepsilon, N}$ и $|t| \leqslant N$

$$|f(t+\tau) - f(t)| \leqslant d_N(\varrho_\varepsilon^N) < \delta_N(\varrho_\varepsilon^N) = \varepsilon,$$

т. е. выполнено условие a).

Далее имеем

$$\varrho(p_{\tau_1+\tau_2}, 0) \leqslant \varrho(p_{\tau_1+\tau_2}, p_{\tau_1}) + \varrho(p_{\tau_1}, 0) = \varrho(p_{\tau_2}, 0) + \varrho(p_{\tau_1}, 0)$$

и при

$$\tau_1 \in E'_{\varepsilon, N} \text{ и } \tau_2 \in E'_{\sigma, N}$$

получаем

$$\varrho(p_{\tau_1+\tau_2}, 0) \leqslant \varrho_\varepsilon^N + \varrho_\sigma^N,$$

отсюда из (1.88) и (1.89) следует

$$|f(t + \tau_1 + \tau_2) - f(t)| \leqslant d_N(\varrho_\varepsilon^N + \varrho_\sigma^N) < \delta_N(\varrho_\varepsilon^N + \varrho_\sigma^N).$$

Обозначив

$$\lambda_\varepsilon^N(\sigma) = \sup_{0 \leq \sigma \leq 1} |\delta_N(\varrho_\varepsilon^N + \varrho_\sigma^N) - \delta_N(\varrho_\varepsilon^N)|$$

мы будем иметь при $|t| \leqslant N$

$$|f(t+\tau_1+\tau_2) - f(t)| < \varepsilon + \lambda_\varepsilon^N(\sigma).$$

Но функция $\delta_N(\varrho)$ непрерывна и $\varrho_\sigma^N \to 0$ при $\sigma \to 0$, а значит

$$\lim_{\sigma\to 0} \lambda_\varepsilon^N(\sigma) = 0.$$

Итак, множества $E'_{\varepsilon, N}$ удовлетворяют такие условия b′).

Дополнение 2 к § 1

Мы покажем, что условие b) в определении L-п. п. функции не является следствием условия a), или, что эквивалентно, что условие 2) в теореме 1 не является следствием условия 1).

Для этого мы построим пример функции, для которой выполнено условие 1) и не выполнено условие 2).

Назовем равномерной нижней (верхней) плотностью $\underline{\varrho}(E)$ множества E

$$\underline{\varrho}(E) = \lim_{u\to\infty}\left\{\inf \frac{1}{2u}\int_{-u+s}^{u+s} \psi_E(t)\,dt\right\},$$

где $\psi_E(t)$ — характеристическая функция пересечения множества E с интервалом $(0, t)$.

Лемма 9. *Если равномерная нижняя плотность некоторого множества E $\underline{\varrho}(E) > \frac{1}{2}$, то при любом $T > 0$ множество точек t, таких, что $t \in E$ и $t + T \in E$ относительно плотно.*

Доказательство. Выберем число $l > 0$ таким, что

$$\frac{1}{l}\int_{s}^{l+s} \psi_E(t)\,dt > \frac{1}{2} \qquad (-\infty < s < \infty).$$

Мера пересечения E с интервалом $(s, s+l)$ больше, чем $\frac{l}{2}$. Мера пересечения множества $E-T$ с этим интервалом также больше, чем $\frac{l}{2}$.

Таким образом, на интервале $(s, s+l)$ у множеств E и $E-T$ есть общая точка. Лемма доказана.

Лемма 10. *Если равномерная нижняя плотность множества $E, \underline{\varrho}(E) > \frac{2}{3}$ и T — произвольное положительное число, то существуют сколь-угодно большие числа τ, такие, что $2\tau \in E, \tau + T \in E$ и $\tau - T \in E$.*

Доказательство. Верхняя плотность любого из трех множеств $2\tau \bar{\in} E$, $\tau + T \bar{\in} E$ и $\tau - T \bar{\in} E$ меньше, чем $\frac{1}{3}$, а значит нижняя плотность дополнительного к их сумме множества положительна. Перейдем к построению примера.

a₁) Выберем произвольно число $T_1 > 0$ и $0 < \delta < T_1$ и определим на интервале $(-T_1 + \delta, T_1 - \delta)$ функцию

$$f(t) = 1 \quad |t| < T_1 - \delta. \tag{1.90}$$

На интервалах $(-T_1, -T_1+\delta)$ и $(T_1-\delta, T_1)$ мы определим $f(t)$ как линейную функцию так, чтобы на концах интервала $(-T_1, T_1)$ $f(\pm T_1)=0$.

b_1) Выберем число $\tau_1 > 2T_1$ и определим функцию $f(t)$ на интервалах $|t \pm \tau_1| < T_1$ равенством

$$f(t \pm \tau_1) = f(t) \quad \text{при } |t| < T_1. \tag{1.91}$$

В промежутках между интервалами, в которых мы определили $f(t)$, положим

$$f(t) = 0 \qquad T_1 \leqslant |t| \leqslant \tau_1 - T_1. \tag{1.92}$$

Итак, функция определена на интервале $|t| < T_1' = \tau_1 + T_1$.

c_1) Выберем число $\omega > 2\tau_1 + T_1$ так, что $\frac{2T_1'}{\omega} < \frac{1}{3}$, и доопределим функцию $f(t)$ на интервалах $|t-k\omega| < T_1'$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ равенством

$$f(t+k\omega) = f(t) \quad \text{при } |t| < T_1'. \tag{1.93}$$

Множество интервалов $|t-k\omega| < T_1'$ мы обозначим I_1', а их центры $\gamma_k^{11} = k\omega$. Множество, дополнительное к I_1', на котором функция $f(t)$ еще не определена, обозначим λ_1. Очевидно, $\underline{\varrho}(\lambda_1) > \frac{2}{3}$.

a_2) Выберем теперь $T_2 > 2\tau_2 > 4T$ так, чтобы точка T_2 совпадала с правым концом какого-нибудь из интервалов I_1' и определим в тех точках интервала $(-T_2, T_2)$, которые принадлежат $\lambda_1 - f(t)=0$. При этом получаем $f(2\tau_1)=0$.

b_2) Согласно лемме 10 существуют насколько угодно большие числа τ, такие, что $2\tau \in \lambda_1$ и $\tau \pm T_2 \in \lambda_1$.

Выберем $\tau_2 > 2T_2$ и переопределим функцию $f(t)$ на интервалах $|t \pm \tau_2| < T_2$ так, чтобы выполнялось

$$f(t \pm \tau_2) = f(t) \quad \text{при } |t| < T_2, \tag{1.94}$$

а в тех точках интервалов $T_2 < |t| < \tau_2 - T_2$, в которых функция $f(t)$ еще не определена, положим $f(t)=0$.

Таким образом, функция определена теперь на интервале $|t| < T_2' = T_2 + \tau_2$.

Одновременно изменим множество I_1', заменив те интервалы, что попали в $|t \pm \tau_2| < T_2$, интервалами, в которые переходят интервалы I_1' из $(-T_2, T_2)$ при их сдвижке на $\pm\tau_2$. В полученном множестве $\overline{I_1'}$ supremum расстояний между соседними интервалами не больше, чем в I_1'.

c_2) Из леммы 9 следует, что при достаточно большом $l>0$ в каждом из интервалов $(pl, \overline{p+1}l)$ можно найти интервал длины $2T_2'$, концы которого принадлежат λ_1. Выбираем в каждом из интервалов $(pl, \overline{p+1}l)$ по одному такому интервалу $|t-\gamma_p^{22}| < T_2'$.

Множество так определенных интервалов мы обозначим I_2^2 и на I_2^2 переопределим функцию $f(t)$ так, чтобы выполнялось

$$f(t+\gamma_p^{22}) = f(t) \quad \text{при } |t| < T_2'. \tag{1.95}$$

Множество, где функция $f(t)$ еще не определена, мы обозначим λ_2. Очевидно, можно выбрать l настолько большим, что будет $\underline{\varrho}(\lambda_2) > \frac{2}{3}$.

З а м е т и м, что на интервале $(-T', T')$ функция $f(t)$ не переопределяется.

Параллельно с переопределением функции преобразуем также множество $\overline{I}_1'$, заменив интервалы, попавшие в I_2^2 теми интервалами, в которые переходят интервалы $\overline{I}_1'$ из $(-T_2', T_2')$ при сдвижке на γ_p^{22}.

Получим новую систему интервалов I_1^2, в которой supremum расстояний между двумя соседними интервалами не больше, чем в $\overline{I}_1'$. Центры γ_p^{12} этих интервалов образуют относительно плотное множество 0, T_1'-смещений для вновь определенной функции, причем включающий интервал для этого множества не больше, чем для γ_p^{11}.

Пусть проделан $(n-1)$-ый шаг в определении функции $f(t)$. И м е е м:

Функция $f(t)$ твердо определена (не должна переопределяться при дальнейших шагах) на интервале $(-T'_{n-1}, T'_{n-1})$.

Функция определена на относительно плотных множествах интервалов $I_1^{n-1}, I_2^{n-1}, \ldots, I_{n-1}^{n-1}$.

Центры этих интервалов $\gamma^{k,\,n-1}$ суть относительно плотные множества $0, T_k'$-смещений функции $f(t)$, причем включающий интервал для $\gamma_p^{k,\,n-1}$ не больше, чем включающий интервал для $\gamma_p^{k,\,k}$.

Числа τ_k, $k = 1, 2, \ldots, n-1$ являются $0, T_k$-смещениями функции $f(t)$, причем $f(2\tau_k) = 0$ при $k = 1, 2, \ldots, n-2$, а $2\tau_{n-1} \in \lambda_{n-1}$ — множеству, на котором функция $f(t)$ еще не определена.

Наконец $\underline{\varrho}(\lambda_{n-1}) > \frac{2}{3}$. Сделаем n-ый шаг.

a$_n$) Определим число $T_n > 2\tau_{n-1} > 4T_{n-1}$ так, что точка T_n совпадает с правым концом какого-нибудь интервала из I_{n-1}^{n-1}, и определим в тех точках интервала $(-T_n, T_n)$, которые принадлежат λ_{n-1} — $f(t) = 0$. При этом получаем $f(2\tau_{n-1}) = 0$.

b$_n$) Выберем существующее, согласно лемме 10, число τ_n, такое, что $2\tau_n \in \lambda_{n-1}$, $\tau_n \pm T_n \in \lambda_{n-1}$ и $\tau_n > 2T_n$, и переопределим функцию $f(t)$ на интервалах $|t \pm \tau_n| < T_n$ так, что

$$f(t \pm \tau_n) = f(t), \tag{1.96}$$

а в точках интервалов $T_n < |t| < \tau_n - T_n$, в которых функция $f(t)$ еще не определена, положим $f(t) = 0$. Таким образом, функция $f(t)$ определена на интервале $|t| < T_n' = T_n + \tau_n$.

Преобразуем также все множества I_k^{n-1} $(k = 1,2,\ldots, n-1)$, заменив те из интервалов I_k^{n-1}, которые попали внутрь $|t \pm \tau_n| < T_n$, интервалами, в которые переходят интервалы I_k^{n-1} из $(-T_n, T_n)$ при сдвижках на $\pm\tau_n$. При этом множества I_k^{n-1} переходят в новые множества $\overline{I_k^{n-1}}$, в которых supremum расстояния между соседними интервалами не больше, чем в множествах I_k^{n-1}. Последнее следует из того, что точка T_n является правым концом интервала из I_k^{n-1}.

c_n) Выберем существующее по лемме 9 относительно плотное множество интервалов I_n^n, $|t \pm \gamma_p^{n,n}| < T_n'$, концы которых принадлежат λ_{n-1}, причем выберем I_n^n так, что

$$\bar{\varrho}(I_n^n) < \frac{2}{3} - \underline{\varrho}(\lambda_{n-1}), \tag{1.97}$$

и так, что

$$2\tau_n \in I_n^n.$$

Переопределим на интервалах I_n^n функцию так, чтобы выполнялось

$$f(t + \gamma_p^{n,n}) = f(t) \qquad \text{при } |t| < T_n'. \tag{1.98}$$

П р и э т о м н а и н т е р в а л е $(-T_n, T_n)$, а з н а ч и т и н а $(-T_{n-1}, T_{n-1})$, ф у н к ц и я н е п е р е о п р е д е л я е т с я.

Изменив параллельно с этим переопределением также множества $\overline{I_k^{n-1}}$, заменив те интервалы этих множеств, которые попали в I_n^n, теми интервалами, в которые переходят интервалы $\overline{I_k^{-1}}$ из $(-T_n', T_n')$ при сдвижках их на $\gamma_p^{n,n}$ $(p = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, мы получим при этом новые системы интервалов I_k^n, причем supremum расстояния между соседними интервалами в I_k^n не больше, чем в I_k^{n-1}.

Ц е н т р ы э т и х и н т е р в а л о в $\gamma_p^{n,n}$ я в л я ю т с я $0, T_k'$-с м е щ е н и я м и д л я n-г о о п р е д е л е н и я ф у н к ц и и $f(t)$, п р и ч е м в к л ю ч а ю щ и й и н т е р в а л д л я $\gamma_p^{k,n}$ н е б о л ь ш е, ч е м д л я $\gamma_p^{k,k}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$.

Если обозначить через λ_n множество тех точек, в которых функция $f(t)$ еще не определена, мы получим из (1.97)

$$\underline{\varrho}(\lambda_n) > \frac{2}{3}.$$

Продолжая этот процесс неограниченно, мы определим функцию $f(t)$ в любой точке числовой оси.

Пусть теперь t_0 — фиксированная точка и l_k — включающий интервал для относительно плотного множества $\gamma_p^{k,k}$ (k фиксировано). После достаточного числа шагов функция $f(t)$ будет окончательно определена на интервале $|t| < T_1' + |t_0| + l_k$.

Так как при $n > k$ включающий интервал для $\gamma_p^{k,n}$ не больше, чем для $\gamma_p^{k,k}$, то при этом окончательном определении интервал $(t_0, t+l)$ должен содержать точку $\gamma_p^{k,n}$, являющуюся $0, T_k'$-смещением функции $f(t)$.

Итак, определенная нами функция $f(t)$ имеет при любом $T>0$ относительно плотное множество $0, T$-смещений.

Принимая во внимание непрерывность функции $f(t)$ мы легко получим, что любым $\varepsilon>0$ и $T>0$ отвечает относительно плотное множество $E_{\varepsilon, T}$ интервалов, состоящих из ε, T-смещений, причем длины этих интервалов ограничены снизу числом, зависящим от ε и T.

Теперь легко показать, что функция $f(t)$ удовлетворяет условию 1).

В самом деле, пусть задана бесконечная последовательность чисел $\{t_n\}$. Конечным числом множеств вида $E_{\frac{1}{m}, m}+h_k$ (m фиксировано, $k=1, 2, \ldots, r$) можно покрыть всю числовую ось. По крайней мере одно из этих множеств должно содержать бесконечное множество членов данной последовательности, которое мы обозначим $\{t_n'\}$.

Имеем

$$|f(t+t_n'-t_p')-f(t)|<\frac{1}{m} \quad \text{при } |t|\leqslant m.$$

Устремив $m\to\infty$ и воспользовавшись диагональным процессом, мы выделим подпоследовательность $\{t_n^n\}$, такую, что $t_n^n \xrightarrow{f} 0$.

С другой стороны, мы имеем по построению функции $f(t)$ $\tau_n \xrightarrow{f} 0$, а $f(2\tau_n)=0$, в то время как $f(0)=1$, т. е. последовательность $2\tau_n$ не сходится к нулю по функции $f(t)$. Условие 2) не выполнено и функция $f(t)$ не есть L-п. п. функция.

Дополнение 1 к § 2

В работе Б. Левитана [5] среднее для L-п. п. функции вводится с помощью обобщенного предела С. Банаха

$$M[f]=\operatorname*{Lim}_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(t)\,dt\right\}, \tag{2.60}$$

и затем строится ряд Фурье для $f(t)$, т. е.

$$f(t)\sim\sum a_k e^{i\lambda_k t}, \tag{2.61}$$

где

$$a_k=M[f(t)\,e^{-i\lambda_k t}].$$

При этом множество отличающихся от нуля коэфициентов Фурье оказывается не более, чем счетным.

Найдем, как связаны эти ряды Фурье с построенными нами в § 2

Пусть $f(t)$ — произвольная (не обязательно L-п. п.) непрерывная функция, у которой

$$\varlimsup_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2\,dt<\infty,$$

и пусть $\mathfrak{M}$—наименьший числовой модуль, содержащий все ее показатели Фурье, определенные заданным обобщенным пределом С. Банаха.

Лемма 10. *Существует пространственное расширение $f(p)$*) функции $f(t)$ на $T_{\mathfrak{M}}$ с тем же рядом Фурье, что и ряд* (2.61), *построенный с помощью обобщенного среднего.*

Доказательство. Определим функцию $\psi_\delta(p)$ на $T_{\mathfrak{M}}$ так же, как в (2.51) и рассмотрим среднее

$$\mathfrak{D}^\delta(p) = \underset{s}{M}[f(s)\psi_\delta(s-p)]. \tag{2.62}$$

Эта функция непрерывна на $T_{\mathfrak{M}}$ в силу равномерной непрерывности $\psi_\delta(p)$ на $T_{\mathfrak{M}}$ и

$$\inf f(s) \leqslant \mathfrak{D}^\delta(p) \leqslant \sup f(s)$$

при

$$\varrho(s, p) \leqslant 2\delta. \tag{2.63}$$

Кроме того, апроксимируя почти периодическую функцию $\psi_\delta(p_t)$ полиномами и переходя к пределу, мы получим

$$\mathfrak{D}^\delta(p_t) = \sum a_k c_k^\delta e^{i\lambda_k t}, \tag{2.64}$$

где c_k^δ — коэфициенты Фурье функции $\psi_\delta(p_t)$.

Отсюда, конечно, следует, что

$$\mathfrak{D}^\delta(p) = \sum a_k c_k^\delta \chi_k(p). \tag{2.65}$$

Ряды (2.64) и (2.65) сходятся в силу неравенства Бесселя для (2.61).

Далее, определив функцию $f(p)$ рядом

$$f(p) \sim \sum a_k \chi_k(p),$$

который сходится в среднем квадратичном, мы будем иметь, в силу равенства Парсеваля (2.37),

$$\int |f(p) - \mathfrak{D}^\delta(p)|^2 dp = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 |c_k^\delta - 1|^2.$$

Но если $\delta \to 0$, то $c_k^\delta \to 1$ и, следовательно,

$$\lim_{\delta\to 0} \mathfrak{D}^\delta(p) = f(p) \tag{2.66}$$

почти всюду на $T_{\mathfrak{M}}$.

Всюду, где равенство (2.66) выполняется, функция $f(p)$ определена как пространственное расширение функции $f(t)$. Это следует непосредственно из (2.63). Определяя ее нужным образом на оставшемся множестве нулевой меры, мы получим требуемое пространственное расширение.

Пусть теперь $f(t)$ — L-п. п. функция с модулем $\mathfrak{M}_f$. Покажем, что $\mathfrak{M}_f \subseteq \mathfrak{M}$. Для этого определим функцию $\psi_\delta(p)$ не на $T_{\mathfrak{M}}$, а на T_f и снова построим, как в лемме 10, функцию

$$\mathfrak{D}^\delta(p_t) = \sum{}' a_k d_k^\delta e^{i\lambda_k t}. \tag{2.67}$$

*) Так как функция $f(t)$ не предполагается непрерывной на $\Omega_{\mathfrak{M}}$, то необязательно $f(p_t) = f(t)$. Это равенство, однако, будет иметь место во всех точках непрерывности функции $f(p)$ на $\Omega_{\mathfrak{M}}$.

Штрих означает, что в сумму входят только те показатели из (2.61), которые являются одновременно показателями Фурье функции $\psi_\delta(p)$, определенной на T_f.

Переходя к пределу так же, как и в лемме 10, мы получим для функции $f(t)$ ряд Фурье (в нашем смысле)

$$f(t) \sim \sum{}' a_k e^{i\lambda_k t}, \tag{2.68}$$

все показатели которого входят в $\mathfrak{M}$. Отсюда и из теоремы 8 следует $\mathfrak{M}_f \subseteq \mathfrak{M}$.

Так как из сходимости последовательности точек τ_n на модуле $\mathfrak{M}$ следует ее сходимость на $\mathfrak{M}_f$, то функция $f(t)$ непрерывна на $\Omega_{\mathfrak{M}}$ и, если $f(p)$ — ее пространственное расширение на $T_{\mathfrak{M}}$, то $f(p_t)=f(t)$ при $p_t \in \Omega_{\mathfrak{M}}$. Итак, имеем теорему:

Теорема 12. *Все ряды Фурье L-п. п. функции $f(t)$, построенные с помощью обобщенного предела С. Банаха, являются рядами Фурье пространственных расширений этих функций на группах $T_{\mathfrak{M}}$, причем $\mathfrak{M} \geqslant \mathfrak{M}_f$ и $\mathfrak{M}$ — наименьший модуль, содержащий все, отвечающие обобщенному пределу, показатели Фурье функции $f(t)$.*

Ряды Фурье пространственных расширений L-п. п. функции на $T_{\mathfrak{M}}$ ($\mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{M}_f$) мы будем называть обобщенными рядами Фурье функции $f(t)$.

Если обобщенные ряды Фурье двух L-п. п. функций совпадают, то они соответствуют пространственным расширениям этих функций на одной и той же группе $T_{\mathfrak{M}}$.

Кроме того, очевидно, что эти пространственные расширения совпадают во всех точках, в которых оба они непрерывны, и в частности на $\Omega_{\mathfrak{M}}$. Отсюда следует теорема о единственности определения L-п. п. функции ее обобщенным рядом Фурье.

Пример. Пусть $f(t)$ есть функция, определенная (2.59) в предыдущем примере. Пусть Δ_3 — число, линейно независимое от Δ_1 и Δ_2, и $\mathfrak{M}$ — модуль с базисом (Δ_1, Δ_2, Δ_3). Этот модуль, очевидно, включает модуль $\mathfrak{M}_f$, имеющий базис (Δ_1, Δ_2).

Очевидно, $T_{\mathfrak{M}}$ — трехмерный тор, а $\Omega_{\mathfrak{M}}$ — винтовая линия на этом торе

$$x_i = \Delta_i t \qquad (i=1,\ 2,\ 3). \tag{2.70}$$

В любой окрестности точки $p(x_1, x_2, x_3)$, проекция которой на T_2 — $p(x_1, x_2, 0)$ принадлежит E (см. предыдущий пример), функция $f(p_t)$ принимает все значения из сегмента $\langle -1, 1 \rangle$.

В этих точках мы положим $f(p)=1$ при $0 \leqslant x_3 < \pi$ и $f(p)=-1$ при $\pi \leqslant x_3 \leqslant 2\pi$. В остальных точках пространственное расширение определено однозначно. В ряд Фурье этого пространственного расширения

$$f(x_1, x_2, x_3) \sim \sum a_{k_1 k_2 k_3} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3)}$$

существенно входит x_3 и для соответствующего ряда Фурье функции $f(t)$

$$f(t) \sim \sum a_{k_1k_2k_3} e^{i(k_1\Delta_1 + k_2\Delta_2 + k_3\Delta_3)t}$$

наименьший модуль $\mathfrak{M}'$, содержащий все показатели Фурье, существенно шире, чем $\mathfrak{M}_f$.

Таким образом, построенный нами обобщенный ряд Фурье функции $f(t)$ не является ее рядом Фурье в определенном нами ранее смысле.

Заметим, что если из всех пространственных расширений выбрать нижнее (см. § 1; 5°) ($f(p) = -1$ во всех точках неопределенности) или верхнее, то пространственное расширение не будет зависеть от x_3 и ему будет соответствовать обычный ряд Фурье.

Это общий факт, ибо, как это следует из 5° § 1, при нижнем (верхнем) доопределении функцию $f(p)$ можно рассматривать как пространственное расширение функции $f(t)$ на факторгруппе $T_f = T/H$.

По любому обобщенному ряду Фурье L-п. п. функции можно восстановить ее обычный ряд Фурье и ее модуль. Сначала по заданному ряду Фурье строим $T_{\mathfrak{M}}$ и определяем функцию $f(t)$ на $\Omega_{\mathfrak{M}}$, переходя к пределу при $\delta \to 0$ в формуле (2.67). Затем строим на $T_{\mathfrak{M}}$ нижнее доопределение функции $f(t)$ и разлагаем его в ряд Фурье.

Это и будет один из рядов Фурье функции $f(t)$, а наименьший модуль, содержащий все показатели Фурье этого ряда, есть $\mathfrak{M}_f$.

Пусть для всех ограниченных функций $\varphi(t)$ заданных на бесконечной оси определено среднее $M[\varphi]$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $M[\varphi(t+h)] = M[\varphi(t)]$.

2) $M[c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2] = c_1 M[\varphi_1] + c_2 M[\varphi_2]$.

3) $\inf \varphi(t) \leqslant M[\varphi] \leqslant \sup \varphi(t) \qquad (-\infty < t < \infty)$.

Из условий 1) и 2) непосредственно следует, что при $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$

$$M\left[\sum_{i=1}^{n} c_i \varphi(t+h_i)\right] = M[\varphi(t)]. \tag{2.71}$$

Используя условие 3), можно сделать предельный переход в (2.71) и получить

$$M\left[\frac{1}{2T}\int_{-T+s}^{T+s} \varphi(t)\,dt\right] = M[\varphi(t)]. \tag{2.72}$$

Отсюда и из 3), имеем

$$\lim_{T\to\infty}\left\{\inf_s \frac{1}{2T}\int_{-T+s}^{T+s} \varphi(t)\,dt\right\} \leqslant M[\varphi(t)] \leqslant \lim_{T\to\infty}\left\{\sup_s \frac{1}{2T}\int_{-T+s}^{T+s} \varphi(t)\,dt.\right\} \tag{2.73}$$

Построим теперь пример ограниченной L-п. п. функции, имеющей ряд Фурье, который не может быть получен с помощью среднего $M[\varphi]$ удовлетворяющего условиям 1), 2) и 3).

Пример. На двумерном торе с винтовой линией $x_i = \Delta_i t$ $(i=1, 2)$ заключим все точки пересечения винтовой линии с меридианом $x_1 = 0$ в интервалы на этом меридиане без общих концов с суммой длин, меньшей заданного числа $\delta > 0$, и перенумеруем эти интервалы так, чтобы в любой окрестности произвольной точки дополнительного совершенного множества E на меридиане $x_1 = 0$ были интервалы как с четными, так и с нечетными номерами.

На отрезках винтовой линии, лежащих в полосе $0 \leqslant x_1 \leqslant 2\pi - \delta$, мы положим: если отрезок имеет конец в четном интервале

$$f(t) = 0 \quad \text{при } \delta \leqslant \Delta_1 t \leqslant \pi - \delta_1 \qquad (\text{mod } 2\pi)$$

и

$$f(t) = 1 \quad \text{при } \pi \leqslant \Delta_1 t \leqslant 2\pi - 2\delta_1 \quad (\text{mod } 2\pi).$$

Если же отрезок имеет конец в нечетном интервале, то, наоборот,

$$f(t) = 1 \quad \text{при } \delta_1 \leqslant \Delta_1 t \leqslant \pi - \delta_1 \qquad (\text{mod } 2\pi)$$

и

$$f(t) = 0 \quad \text{при } \pi \leqslant \Delta_1 t \leqslant 2\pi - 2\delta_1 \quad (\text{mod } 2\pi).$$

Вне полосы $(0 \leqslant x_1 \leqslant 2\pi - \delta_1)$ мы положим $f(t) = 0$, а на оставшихся интервалах $(0, \delta_1)$, $(2\pi - 2\delta_1, 2\pi + \delta_1)$ и $(\pi - \delta_1, \pi)$ определим $f(t)$ как линейную функцию.

Построенная функция $f(t)$ непрерывна на Ω и, следовательно, она есть L-п. п. функция.

Если $f(p)$ — нижнее доопределение функции $f(t)$ на всем торе T_2, то при достаточно малых δ и δ_1 и заданном $\varepsilon > 0$ будем иметь

$$\text{mes}\,\{E[f(p) > 0]\} > \delta\,(2\pi - \delta_1) < \varepsilon.$$

Так как, кроме того, $0 \leqslant f(p) \leqslant 1$, то

$$\int f(p)\,dp < \varepsilon. \tag{2.74}$$

С другой стороны, на каждом витке винтовой линии, длина которого равна $2\pi \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\right)^2}$, есть отрезок длины $(\pi - 2\delta_1)\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\right)^2}$, на котором $f(t) = 1$; отсюда

$$\lim_{T\to\infty}\left\{\inf_s \frac{1}{2T}\int_{-T+s}^{T+s} f(t)\,dt\right\} \geqslant \frac{\pi - 2\delta_1}{2\pi} > \varepsilon. \tag{2.75}$$

Таким образом, никакое среднее от $f(t)$ не может быть равно интегралу от ее нижнего доопределения $f(p)$.

Итак, множество обобщенных рядов Фурье L-п. п. функции шире, и в некоторых случаях существенно шире, чем множество рядов Фурье, построенных с помощью обобщенного среднего.

Дополнение 2 к § 2

Рассмотрим в метрическом пространстве M кривую B с уравнением $q=q(t)$ $(-\infty<t<\infty,\ q\in M)$.

Мы назовем функцию $q(t)$ „движением“, а кривую B — траекторией, если каждым фиксированным t_0, $\varepsilon>0$ и $N>0$ отвечает $\delta>0$ так, что из $\varrho[q(t),\ q(t_0)]<\delta$ следует

$$\varrho[q(t_0+t),\ q(\tau+t)]<\varepsilon \quad \text{при } |t|\leqslant N. \tag{2.80}$$

Функция $q(t)$ называется почти периодической, если каждому $\varepsilon>0$ отвечает относительно плотное множество $\{\tau\}$ ε-смещений функции $q(t)$, т. е.

$$\varrho[q(t+\tau),\ q(t)]<\varepsilon \qquad (-\infty<t<\infty).$$

Это определение, как известно, эквивалентно следующему определению С. Бохнера: каждая бесконечная последовательность $\{h_n\}$ содержит такую подпоследовательность h'_n, что

$$\varrho[q(t+h'_n),\ q(t+h'_m)]\rightrightarrows 0 \text{ при } \min(n,m)\to\infty.$$

Покажем, что всякое почти периодическое „движение“ дает взаимно однозначное и равномерно непрерывное (в одну сторону) отображение группы $\Omega_{\mathfrak{M}}$, где $\mathfrak{M}$ — некоторый числовой модуль на B.

Для доказательства определим сходимость на числовой оси так же, как в § 1. Легко видеть, что из

$$h'_n \overset{q}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{и} \quad h''_n \overset{q}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{следует } h'_n\pm h''_n \overset{q}{\rightrightarrows} 0,$$

а отсюда следует, что определенная нами сходимость превращает числовую ось в одну из топологических групп $\Omega_{\mathfrak{M}}$ ($\mathfrak{M}$ — модуль функции $q(t)$).

Равномерная непрерывность функции $q(t)$ на $\Omega_{\mathfrak{M}}$ следует прямо из определения сходимости точек на $\Omega_{\mathfrak{M}}$.

Если бы двум различным точкам числовой оси t_1 и t_2 отвечала одна точка траектории B, то из (2.80) следовало бы, что $h=t_1-t_2$ — период функции $q(t)$.

В этом случае траектория B замкнута, а $\Omega_{\mathfrak{M}}$ получается отождествлением между собою точек числовой оси, отличающихся на период. Таким образом, во всех случаях соответствие между B и $\Omega_{\mathfrak{M}}$ взаимно однозначно.

Функция $q(t)$ — равномерно непрерывная на $\Omega_{\mathfrak{M}}$ — очевидно однозначно доопределяется на $T_{\mathfrak{M}}$.

Доопределенную функцию обозначим $q(p)$. Покажем, что двум разным точкам на $T_{\mathfrak{M}}$ не может отвечать одна и та же точка на B.

В самом деле, пусть $q(p_{t_0})=q(p)$ $(p\neq p_{t_0})$ и пусть $p_{t_n}\overset{q}{\rightrightarrows} p$. Тогда $q(p_{t_n})\to q(p_{t_0})$ и, так как $q(t)=q(p_{t_0})$ — „движение“, то

$$q(p_{t_n}+p_t)\to q(p_{t_0}+p_t).$$

Отсюда получаем

$$q(p+p_t)=q(p_{t_0}+p_t)$$

или, обозначая

$$p-p_{t_0}=h,\ \ q(p_t+h)=q(p_t), \tag{2.81}$$

и в силу непрерывности $q(t)$ на $T_{\mathfrak{M}}$ имеем $q(p+h)=q(p)$ при $p\in T_{\mathfrak{M}}$. Но тогда из $p_{\tau_n}\overset{q}{\underset{\longrightarrow}{\longrightarrow}} h$ следует

$$q(p_t+p_{\tau_n})\underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} q(p_t+h)=q(p_t)$$

и, следовательно, $p_{\tau_n}\overset{q}{\underset{\longrightarrow}{\longrightarrow}} 0$, т. е. $h=0$ и $p=p_{t_0}$.

Отсюда легко следует, что обратное отображение B на $\Omega_{\mathfrak{M}}$ непрерывно.

В самом деле, пусть $q(t_n)\to q(t_0)$. Если при этом p_{t_n} не стремится к p_{t_0}, то существует другой предел p у некоторой подпоследовательности p_{t_n}. Но тогда $q(p_{t_0})=q(p)$ при $p\neq p_{t_0}$, что невозможно.

Легко видеть, что верна и обратная теорема. Если $q(t)$—непрерывная функция на $T_{\mathfrak{M}}$ и каждая точка $q(t)$ имеет единственный прообраз p_t, то $q(t)$ — почти периодическое „движение".

В самом деле из компактности $T_{\mathfrak{M}}$ следует, что из любой последовательности чисел $\{h_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{h'_n\}$ так, что $p'_{h_n}\to p$ на $T_{\mathfrak{M}}$, и в силу равномерной непрерывности $q(t)$ на $\Omega_{\mathfrak{M}}$

$$q(t+h'_n)\underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} q(t).$$

Итак $q(t)$ — почти периодическая функция. Остается показать, что $q(t)$ — „движение".

Но если $q(t_n)\to q(t_0)$, то (так как точка $q(t_0)$ имеет единственный прообраз p_{t_0}) $p_{t_n}\to p_{t_0}$ и получаем $q(t_n+t)\underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} q(t_0+t)$ *).

Пример. В двумерном торе T_2 с винтовой линией $x_1=\Delta_1 t$, $x_2=\Delta_2 t$ $\left(\dfrac{\Delta_2}{\Delta_1}\text{ — иррациональное число}\right)$ отождествим две точки p_1 и p_2, не принадлежащие винтовой линии, и определим расстояние между любыми двумя точками этой поверхности (с) (склеенный тор), как длину кратчайшей, соединяющей их линии поверхности, с учетом того, что точки p_1 и p_2 отождествлены.

Очевидно, что так определенное расстояние (длина соединяющей геодезической) не больше, чем расстояние между соответствующими точками на торе.

Очевидно, (с) есть непрерывный образ T_2, и каждая точка винтовой линии на (с) имеет единственный прообраз на T_2.

---

*) Очевидно, единственность прообраза эквивалентна непрерывности обратного отображения.

Таким образом, мы имеем почти периодическое „движение“, причем (c) не есть топологический образ T_2.

Определение. *Назовем „движение“ $q(t)$ устойчивым по Ляпунову, если каждому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$ так, что из $\varrho[q(t_1), q(t_2)] < \delta$ следует*

$$\varrho[q(t_1+t), q(t_2+t)] < \varepsilon. \tag{2.82}$$

Мы покажем, что всякое „движение“, устойчивое по Ляпунову, траектория которого находится в компактной части пространства, может быть получено как образ $\Omega_{\mathfrak{M}}$ при топологическом отображении $T_{\mathfrak{M}}$.

В самом деле, из любой последовательности чисел $\{h_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{h'_n\}$ такую, что $\varrho[q(h'_n), q(h'_m)] \to 0$ при $\min(n, m) \to \infty$. Но тогда, в силу определения

$$\varrho[q(t+h'_n), q(t+h'_m)] \rightrightarrows 0 \quad \text{при } \min(n, m) \to \infty,$$

т. е. $q(t)$ — почти периодическое „движение“.

Если $q(p_{t_n}) \to q$, то и последовательность функций $q(t_n+t)$ равномерно сходится, и, следовательно, точке q однозначно отвечает некоторая точка p на $T_{\mathfrak{M}}$ — прообраз q.

Таким образом, функция $q(p)$ дает топологическое отображение $T_{\mathfrak{M}}$ на $\bar{B}$ *).

Мы будем называть „движение“ $q(t)$ L-п. п. если функция $q(t)$ удовлетворяет условиям a) и b) Левитана (см. введение), причем ε, N-смещением мы будем называть число τ, для которого

$$\varrho[q(t+\tau), q(t)] < \varepsilon \quad \text{при } |t| \leqslant N.$$

Мы покажем, что всякое L-п. п. „движение“ дает топологическое отображение некоторой группы $\Omega_{\mathfrak{M}}$ на траекторию „движения“ B.

Для доказательства определим в пространстве M равномерно непрерывную функцию

$$f(q) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\varrho(q, q(0))}{\varrho} & \text{при } \varrho(q, q(0)) \leqslant \delta \\ 0 & \text{при } \varrho(q, q(0)) > \delta \end{cases}$$

и скалярную L-п. п. функцию

$$f(t) = f[q(t)].$$

---

*) Понятия почти периодического „движения“ и „движения“, устойчивого по Ляпунову, совпали бы, если бы в определении „движения“ потребовать, чтобы каждой точке q метрического пространства M и числам $\varepsilon > 0$ и $N > 0$ отвечала такая δ-окрестность точки q, чтобы из $\varrho[q(t_1), q] < \delta$ и $\varrho[q(t_2), q] < \delta$ следовало $\varrho[q(t+t_1), q(t+t_2)] < \varepsilon$ при $|t| \leqslant N$.

Пусть дано, что $q(t_n) \to q(t_0)$. Так как $q(t)$ — „движение", будем иметь $q(t+t_n) \to q(t+t_0)$ при любом значении t, а следовательно, в силу непрерывности функции $f(p)$,

$$t_n \xrightarrow{f} t_0. \tag{2.85}$$

Пусть, наоборот, дано (2.85), или $t_n - t_0 \xrightarrow{f} 0$. Тогда

$$f[q(t_n - t_0)] \to f[q(0)],$$

и из определения функции $f(p)$ имеем $q(t_n - t_0) \to q(0)$, а следовательно, $q(t_n) \to q(t_0)$.

В § 1 мы показали, что сходимость по L-п. п. функции эквивалентна сходимости на некотором модуле $\mathfrak{M}$ или, что то же, на $\Omega_{\mathfrak{M}}$.

Итак, если $t_n \xrightarrow{\mathfrak{M}} t_0$, то $q(t_n) \to q(t_0)$ и наоборот, т. е. функция $q(t)$ дает топологическое отображение $\Omega_{\mathfrak{M}}$ на B.

Наоборот, всякое топологическое отображение $\Omega_{\mathfrak{M}}$ дается L-п. п. „движением" $q(t)$.

В самом деле, если $q(t_n) \to q(t_0)$, то $t_n \xrightarrow{\mathfrak{M}} t_0$, откуда $t_n + t \xrightarrow{\mathfrak{M}} t_0 + t$ и, следовательно, $q(t_n + t) \to q(t_0 + t)$. Это стремление к пределу, как легко показать (см. § 1), равномерно в любом конечном интервале, и, следовательно, $q(t)$ — „движение".

Кроме того, функция $f(t) = f[q(t)]$ — L-п. п., ибо она непрерывна на $\Omega_{\mathfrak{M}}$ (см. теорему 4), а так как сходимость по $f(t)$ эквивалентна сходимости по $q(t)$, то и $q(t)$ — L-п. п. функция.

Итак, имеем теорему.

Теорема 13. a) *Функции $q(t)$, отображающие $\Omega_{\mathfrak{M}}$ при топологических отображениях групп $T_{\mathfrak{M}}$, суть все „движения", устойчивые по Ляпунову.*

b) *Функции $q(t)$, отображающие $\Omega_{\mathfrak{M}}$ при таких непрерывных отображениях $T_{\mathfrak{M}}$, что $q(p) \neq q(p_t)$ при $p_t \in \Omega_{\mathfrak{M}}$* и *$p \in T_{\mathfrak{M}}$ суть все почти периодические „движения".*

c) *Функции $q(t)$, топологически отображающие $\Omega_{\mathfrak{M}}$ суть все L-п. п. „движения".*

Пример. Будем считать точки $A(x_1', x_2', x_3')$ и $B(x_1'', x_2'', x_3'')$ тождественными, если

$$x_1' \equiv x_1'', \; x_2' \equiv x_2'' \pmod{2\pi} \text{ и } x_3' = x_3'',$$

а расстояние между точками определим как

$$\varrho(A, B) = \sqrt{(x_3' - x_3'')^2 + [R(x_2' - x_2')]^2 + [R(x_1' - x_1'')]^2}.$$

Определим „движение"

$$x_1 = \Lambda_1 t, \quad x_2 = \Lambda_2 t \quad \text{и} \quad x_3 = \frac{2}{2 + \cos \Lambda_1 t + \cos \Lambda_2 t} \tag{2.86}$$

$\left(\dfrac{\Lambda_2}{\Lambda_1} \text{ — иррациональное число}\right)$.

Равенства (2.86) определяют, очевидно, L-п. п. „движение", являющееся топологическим образом винтовой линии

$$x_1 = \Delta_1 t,\ \ x_2 = \Delta_2 t,\ \ x_3 = 0.$$

Аналогично, ограниченным L-п. п. „движением" будет

$$x_1 = \Delta_1 t,\ \ x_2 = \Delta_2 t,\ \ x_3 = \sin\left[\frac{2}{2+\cos\Delta_1 t+\cos\Delta_2 t}\right].$$

При этом тор T_2 отображается непрерывно на $\bar{B}$ всюду, кроме точки $(\pi, \pi, 0)$.

Эти „движения", как легко видеть, не являются почти периодическими.

Поступило 22. XI 1948 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Левитан, Некоторые вопросы теории почти периодических функций, I, Успехи математических наук, т. II, № 5.

2. Besicowitch, Almost periodic functions, Cambridge (1932).

3. Neumann J., Almost periodic functions in a group I, Trans. of Am. Math. Soc., t. 36 (1934) 445—492.

4. Bocher et Neumann, Almost periodic functions in a group, Trans. of Am. Math. Soc., t. 37 (1935), 21.

5. Б. Левитан, Записки Харьковского математического общества, т. XV, № 2 (1938).

6. Б. Левитан, Некоторые вопросы теории почти периодических функций, II, Успехи математических наук, т. II, № 6 (22)

7. С. С. Банах, Курс функціонального аналізу, стор. 28.

8. Б. Левин и Б. Левитан, О рядах Фурье обобщенных почти периодических функций, ДАН СССР, т. XXII, № 9 (1939), стр. 543—546.

9. Б. Левин и Б. Левитан, Записки Харьковского института математики и механики и Мат. об-ва, т. XVII (1940), стр. 109.

10. В. А. Марченко, Применение метода суммирования Фейера—Бохнера к обобщенным рядам Фурье, ДАН СССР (1946), т. LIII, № 1, стр. 7—9.

11. Понтрягин, Непрерывные группы, ОНТИ (1938).

12. Favard, Leçons sur les fonctions presque périodiques (Paris, 1933).

13. H. Weyl, Über Gleichverteilung von Zahlen mod. eins, Math. Ann. 77, (1916), 313—352.

14. В. Степанов и А. Тихонов, О пространстве почти периодических функций, Математический сборник, т. 41 (1934), стр. 166.

15. Хаусдорф, Теория множеств, ОНТИ, М.—Л., 1937.

16. С. Крейн и Б. Левин, О сходимости сингулярных интегралов, ДАН СССР, т. LX, № 1 (1948), стр.195—198.

17. С. Крейн и Б. Левин, О сильной представимости функций сингулярными интегралами, ДАН СССР, т. LX, № 2, (1948).

18. Б. Коренблюм, С. Крейн и Б. Левин, О некоторых нелинейных вопросах теории сингулярных интегралов, ДАН СССР, т. 62, № 1 (1948).

СОДЕРЖАНИЕ