№ 2 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ 1949
АКАДЕМИИ НАУК УССР

Об одном доказательстве теоремы о категории проективного пространства

М. А. Красносельский и *С. Г. Крейн*

В настоящей статье устанавливается одна элементарная теорема (теорема 1) комбинаторного характера. Теорема эта, в частности, позволяет просто доказать, что категория n-мерного проективного пространства равна $n+1$.

1. Будем обозначать нечетные числа $2k-1$ через a_k, а четные числа $2k$ — через b_k ($k=1, 2, \ldots$).

Рассмотрим n-мерный симплекс и предположим, что каждой его вершине поставлено в соответствие некоторое натуральное число. Систему из $n+1$ чисел, поставленных в соответствие вершинам симплекса, будем выписывать в неубывающем порядке и называть н у м е р а ц и е й симплекса.

Будем называть нумерацию симплекса д о п у с т и м о й, если в ней из каждой пары чисел a_k, b_k принимает участие не более чем одно число, которое, впрочем, может встретиться несколько раз.

Допустимую нумерацию симплекса типа $a_{i_1}, b_{i_2}, a_{i_3}, b_{i_4}, \ldots$ (в которой четные и нечетные числа чередуются и первым стоит нечетное число) назовем нумерацией п е р в о г о р о д а; допустимую нумерацию $b_{j_1}, a_{j_2}, b_{j_3}, a_{j_4}, \ldots$ назовем нумерацией в т о р о г о р о д а. Остальные допустимые нумерации симплексов назовем нумерациями т р е т ь е г о р о д а.

Одну нумерацию симплекса назовем с о п р я ж е н н о й другой нумерации, если первая получается из второй заменой всех чисел a_k соответствующими числами b_k и, наоборот, всех чисел b_l соответствующими числами a_l. Очевидно, каждая нумерация первого рода сопряжена некоторой нумерации второго рода и наоборот.

Каждая нумерация n-мерного симплекса естественным образом порождает нумерации всех его граней.

Л е м м а 1. *Среди нумераций n-1-мерных граней n-мерного симплекса Σ, порожденных допустимой нумерацией симплекса Σ, число нумераций первого рода не более двух; оно равно единице тогда и только тогда, когда нумерация симплекса Σ первого или второго рода.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение леммы проверяется непосредственным подсчетом. Рассмотрим отдельно возможные случаи.

Пусть нумерация симплекса Σ первого (второго) рода. Тогда из $n-1$-мерных граней только грань, лежащая против вершины с наибольшим (наименьшим) номером, будет иметь нумерацию первого рода.

Пусть теперь нумерация симплекса Σ третьего рода. Если хотя бы одна из $n-1$-мерных граней симплекса Σ имеет нумерацию первого рода, то в нумерации симплекса Σ имеется одна и только одна пара номеров одинаковой четности, расположенных рядом. Очевидно, в этом случае из $n-1$-мерных граней симплекса Σ только две грани, лежащие против вершин с номерами из этой пары, будут иметь нумерации первого рода.

Лемма доказана.

2. Пусть K — симплициальный комплекс. Если каждой его вершине поставлено в соответствие натуральное число, то скажем, что осуществлена **нумерация** комплекса K. Эту нумерацию назовем **допустимой**, если на каждом симплексе комплекса K она индуцирует допустимую нумерацию.

Пусть K_1 — некоторое симплициальное подразделение комплекса K. Скажем, что нумерация N_1 комплекса K_1 является продолжением нумерации N комплекса K, если в ней каждой вершине комплекса K_1 приписан номер одной из вершин ее носителя в комплексе K при нумерации N. Легко видеть, что продолжение допустимой нумерации есть допустимая нумерация.

Лемма II. *При продолжении допустимой нумерации n-мерного комплекса четность числа n-мерных симплексов с нумерациями первого (второго) рода не меняется.*

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать утверждение леммы для продолжений нумераций n-мерных симплексов. Если нумерация симплекса первого рода, то доказываемое утверждение для продолжений его нумераций фактически совпадает с утверждением известной леммы Шпернера (см., например [1]). Если нумерация симплекса второго или третьего рода, то при продолжении ее вообще не могут появиться симплексы с нумерацией первого рода.

Лемма доказана.

3. Пусть K — некоторая симметричная триангуляция n-мерной сферы, т. е. такая триангуляция, в которую вместе с каждым симплексом Σ входит симплекс Σ^*, расположенный симметрично относительно центра сферы симплексу Σ. Допустимую нумерацию комплекса K назовем **симметричной**, если в ней симметричные относительно центра сферы симплексы имеют сопряженные нумерации.

Теорема 1. *При всякой симметричной нумерации симметричной триангуляции n-мерной сферы нечетное число n-мерных симплексов будут иметь нумерации первого рода.*

Доказательство. Для нульмерной сферы, т. е. пары точек, утверждение теоремы очевидно, так как в силу симметрии только одна из этих точек может иметь нечетный номер. Доказательство проводим по индукции. Пусть утверждение теоремы справедливо для $n-1$-мерной сферы.

Пусть дана n-мерная сфера S_n, ее симметричная триангуляция K и симметричная нумерация N комплекса K. Рассмотрим некоторый $n-1$-мерный экватор S_{n-1} сферы S_n. В силу леммы II можно считать, без ограничения общности, что экватор S_{n-1} состоит весь из $n-1$-мерных симплексов комплекса K (в противном случае нужно было бы рассматреть соответствующее симметричное продолжение нумерации N).

Число симплексов с нумерациями первого рода на сфере S_n совпадает, в силу симметрии нумерации, с числом симплексов с нумерациями первого и второго родов на каждой из полусфер, на которые делит сферу S_n экватор S_{n-1}. Рассмотрим одну из этих замкнутых полусфер и подсчитаем на ней число $n-1$-мерных симплексов с нумерациями первого рода, считая каждый симплекс столько раз, гранью скольких n-мерных симплексов он является. При этом каждый $n-1$-мерный симплекс с нумерацией первого рода на полусфере считается два раза, если он не лежит на S_{n-1} и один раз, если он лежит на S_{n-1}. Следовательно, искомое число, в силу предположения индукции, будет нечетным. С другой стороны, в силу леммы I это число совпадает с суммой удвоенного числа n-мерных симплексов с нумерациями третьего рода, имеющих $n-1$-мерные грани с нумерациями первого рода, и числа n-мерных симплексов с нумерациями первого или второго рода (n-мерные симплексы рассматриваются на полусфере).

Таким образом, число n-мерных симплексов на полусфере с нумерациями первого или второго рода нечетно, следовательно, нечетно и число n-мерных симплексов на всей сфере с нумерациями первого рода.

Теорема доказана.

В частности, из доказанной теоремы следует существование в каждой симметричной триангуляции с симметричной нумерацией хотя бы одного симплекса с нумерацией первого рода.

4. Теорема II. *Пусть n-мерная сфера покрыта системой пар замкнутых множеств F_i, G_i ($i=1, 2, \ldots, r$), обладающих свойствами:*

1) *Множество F_i ($i=1, 2, \ldots, r$) симметрично относительно центра сферы соответствующему множеству G_i.*

2) *Пересечение каждой пары соответствующих множеств F_i и G_i ($i=1, 2, \ldots, r$) — пусто.*

Тогда кратность рассматриваемого покрытия не меньше, чем $n+1$.

Доказательство. В предположении противного обозначим через δ число такое, что

а) δ меньше минимального расстояния между множествами F_i и G_i ($i=1, 2, \ldots, r$).

б) На рассматриваемой сфере в каждой окрестности диаметра δ есть точки не более чем n различных множеств F_i, G_j.

Построим симметричную триангуляцию сферы так, чтобы диаметр каждого симплекса был меньше δ. Каждой вершине триангуляции припишем один из номеров a_k, где k — номера тех множеств F_i, которым принадлежит вершина, или один из номеров b_l, где l — номера тех множеств G_j, которым принадлежит эта же вершина. При этом симметричным вершинам припишем сопряженные номера.

Так как в силу а) нумерация будет допустима, то мы получим симметричную нумерацию симметричной триангуляции сферы, причем в силу б) на каждом n-мерном симплексе будет индуцирована нумерация третьего рода, а это противоречит теореме I.

Теорема доказана.

5. Замкнутое множество, расположенное в компактном пространстве R, называется множеством первой категории относительно R, если оно может быть стянуто в точку при помощи непрерывной деформации внутри R (см. например [2]).

Теорема III. *Кратность покрытия n-мерного проективного пространства Π_n множествами первой категории относительно Π_n не меньше, чем $n+1$.*

Для доказательства достаточно заметить, что множество первой категории в проективном пространстве, полученном отождествлением диаметрально противоположных точек сферы, порождает на этой сфере пару замкнутых множеств, удовлетворяющую условиям 1) и 2) теоремы II.

Из доказанной теоремы, в частности, следует, что покрытие n-мерного проективного пространства множествами первой категории состоит не менее чем из $n+1$ множества. Утверждение это усилено быть не может, так как легко построить покрытия из $n+1$ множества первой категории. Таким образом, мы получили известную теорему Л. А. Люстерника и Л. Г. Шнирельмана о категории проективного пространства (см., например, [2]).

Отметим, что и наоборот, из теоремы о категории проективного пространства и того, что кратность покрытия связного многообразия множествами первой категории не меньше категории многообразия следует утверждение теоремы III.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. С. Александров, Комбинаторная топология, ГТИ, 1947, стр. 192.
2. Л. А. Люстерник и Л. Г. Шнирельман, Топологические методы в вариационных задачах М. 1930.

Поступило 4.III 1949.