Исследование колебаний в нелинейных системах со многими степенями свободы и медленно меняющимися параметрами

Ю. А. Митропольский

Нелинейные колебательные системы со многими степенями свободы и медленно меняющимися параметрами постоянно встречаются при решении ряда актуальных проблем современной техники. Исследование крутильных колебаний коленчатых валов с нелинейными элементами, поперечных колебаний валов, имеющих переменный осевой момент инерции, поперечных колебаний балок, стержней под воздействием продольной силы и ряда других задач приводит нас к решению систем нелинейных диференциальных уравнений с медленно меняющимися параметрами.

Указанным уравнениям в литературе уделено сравнительно мало внимания.

Для нелинейной системы диференциальных уравнений с постоянными параметрами при помощи обычных методов нелинейной механики можно построить приближенные решения. Однако для этого требуется предварительно решить совокупность диференциальных уравнений с числом неизвестных пропорциональным числу степеней свободы. Поэтому возникают значительные затруднения при практическом применении этих методов.

Значительно более эффективным является метод асимптотического интегрирования, разработанный Н. Н. Боголюбовым [1], при помощи которого исследуются одночастотные колебания в нелинейных системах со многими степенями свободы.

Настоящая работа посвящена обобщению этого метода на случай нелинейных систем со многими степенями свободы и медленно меняющимися параметрами.

В исследуемой нами системе переменными могут быть собственные частоты, частоты внешних приложенных сил и другие параметры. Существенно лишь, чтобы они медленно изменялись (медленно по отношению к единице времени порядка периода колебания). Для упрощения выкладок нами исследуется случай, когда „невозмущенная" система соответствует обычной схеме теории малых колебаний с той только разницей, что в нашем случае коэфициенты при скоростях и координатах в формах кинетической и потенциальной энергии не постоянные, а медленно меняющиеся. Однако это не только не уменьшает общности исследуемой схемы, а наоборот даст возможность применить ее к решению большого числа различных задач физики и техники благодаря тому, что конечные результаты можно выразить непосредственно через форму кинетической и потенциальной энергии.

Основное внимание в работе сосредоточено на задаче фактического построения приближенных решений и их применении к конкретным примерам. Математическое обоснование излагаемого метода дано Н. Н. Боголюбовым в работе — „О некоторых статистических методах в математической физике".

В первом параграфе настоящей работы выведены формулы и даны правила построения решения указанной системы в первом и во втором приближении. Во втором дан простой энергетический метод, с помощью которого можно получить приближения первого и второго порядка без предварительного составления точных диференциальных уравнений задачи. В третьем — изложенная методика проиллюстрирована конкретным примером.

§ 1

Рассмотрим колебательную систему с N степенями свободы, для которой кинетическая и потенциальная энергии могут быть представлены в виде:

$$T(q) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(\tau)\, \dot{q}_i \dot{q}_j, \qquad V(q) = \sum_{i,j=1}^{N} b_{ij}(\tau)\, q_i q_j, \tag{1.1}$$

где $q_1, \ldots, q_N$ — обобщенные координаты, $\tau = \varepsilon t$, ε — малый положительный параметр, $a_{ij}(\tau) = a_{ji}(\tau)$, $b_{ij}(\tau) = b_{ji}(\tau)$ и функции $a_{ij}(\tau)$, $b_{ij}(\tau)$ неограниченно диференцируемы по τ на интервале $0 \leqslant \tau \leqslant \infty$.

Предположим, что исследуемая система находится под воздействием малого возмущения, определяемого обобщенными силами:

$$\varepsilon Q_j(\tau, \theta, q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N, \varepsilon) = \varepsilon Q_j^{(1)}(\tau, \theta, q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N) +$$
$$+ \varepsilon^2 Q_j^{(2)}(\tau, \theta, q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N) + \ldots \qquad (j = 1, 2 \ldots N) \tag{1.2}$$

периодическими по θ с периодом 2π, θ — функция τ неограниченно диференцируемая на том же интервале, $\dfrac{d\theta}{dt} = \nu(\tau) \geqslant 0$.

Тогда согласно известным принципам механики получаем систему нелинейных диференциальных уравнений с медленно меняющимися параметрами:

$$\frac{d}{dt}\left\{ \sum_{i=1}^{N} a_{ij}(\tau)\, \dot{q}_i \right\} + \sum_{i=1}^{N} b_{ij}(\tau)\, q_i = \varepsilon Q_j(\tau, \theta, q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N, \varepsilon)$$
$$(j = 1, 2, \ldots, N). \tag{1.3}$$

Одновременно с системой (1.3) рассмотрим систему линейных диференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэфициентами, зависящими от τ как от параметра:

$$\sum_{i=1}^{N} a_{ij}\ddot{q}_i + \sum_{i=1}^{N} b_{ij} q_i = 0 \qquad (j=1, 2, \ldots, N). \tag{1.4}$$

Для получения уравнений **(1.4)** достаточно в (1.3) положить $\varepsilon=0$ и τ постоянной величины.

Системой (1.4) мы воспользуемся как вспомогательной при построении решений уравнений (1.3). В дальнейшем эту систему будем называть системой диференциальных уравнений невозмущенного движения или просто „невозмущенной" системой.

При помощи обычных методов мы можем для системы (1.4) построить решения, соответствующие нормальным колебаниям:

$$q_i^{(k)} = \varphi_i^{(k)} a \cos(\omega_k t + \alpha_k) \qquad (i,\, k=1, 2, \ldots, N), \tag{1.5}$$

$\varphi_i^{(k)}$ и ω_k — собственные частоты и нормальные функции, которые также зависят от τ, как от параметра.

Положим теперь в (1.4) и (1.5) $\tau=\varepsilon t$. Тогда функции (1.5) будут только приближенно (с точностью до ε) удовлетворять уравнениям (1.4) и представлять колебания, в которых как частота, так и форма колебания медленно изменяются.

Будем для упрощения называть медленно изменяющиеся величины $\varphi_i^{(k)}(\tau)$ и $\omega_k(\tau)$ ($\tau = \varepsilon t$) „нормальными" функциями и собственными частотами „невозмущенной" системы, а решения (1.5) при $\tau = \varepsilon t$ будем называть приближенными частными решениями системы (1.4), соответствующими „нормальным" колебаниям.

Переходя к построению асимптотических приближенных формул для частных решений системы (1.3), соответствующих одночастотным колебаниям, близким к одному из „нормальных" колебаний (1.5) для определенности, положим, к первому „нормальному" колебанию, допустим: 1) что единственным решением системы (1.4), соответствующим равновесию, является тривиальное решение $q_1 = q_2 = \ldots = q_N = 0$ и 2) что для любых τ ни „частота" $\omega_1(\tau)$, а также ни один из обертонов $2\omega_1(\tau), \ldots, k\omega_1(\tau) \ldots$, „частоты" $\omega_i(\tau)$ не равен какой-либо „собственной частоте" $\omega_2(\tau), \omega_3(\tau), \ldots \omega_N(\tau)$ „невозмущенной" системы.

При этих допущениях решение системы (1.3) ищем в виде асимптотических рядов:

$$q_i = \varphi_i^{(1)}(\tau)\, a \cos(s\varphi+\psi) + \varepsilon U_i^{(1)}(\tau, a, \theta, s\varphi+\psi)\,^{*)} + \\ + \varepsilon^2 U_i^{(2)}(\tau, a, \theta, s\varphi+\psi) + \ldots \qquad (i=1, 2, \ldots, N) \tag{1.6}$$

---

*) В дальнейшем верхний индекс у q_i будем опускать, однако следует помнить, что мы рассматриваем колебания, близкие к первому нормальному.

в которых $U_i^{(l)}(\tau, a, \theta, s\varphi+\psi)$ $\begin{pmatrix} i=1, 2, \ldots, N \\ l=1, 2, \ldots \end{pmatrix}$ функции периодические по θ и $s\varphi+\psi$ с периодом 2π, а a и ψ — функции времени, определяющиеся диференциальными уравнениями:

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(\tau, a, \psi) + \varepsilon^2 A_2(\tau, a, \psi) + \ldots$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_1(\tau) - \frac{s}{r}\nu(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a, \psi) + \varepsilon^2 B_2(\tau, a, \psi) + \ldots \tag{1.7}$$

$\varphi = \dfrac{\theta}{r}$, s и r взаимно простые небольшие числа, выбор которых зависит от того, какой резонанс мы собираемся исследовать.

Итак, для решения поставленной задачи нам надо найти соответствующие выражения для функций:

$$\begin{gathered} U_i^{(1)}(\tau, a, \theta, s\varphi+\psi), \quad U_i^{(2)}(\tau, a, \theta, s\varphi+\psi), \ldots \\ A_1(\tau, a, \psi), \quad A_2(\tau, a, \psi), \ldots \quad B_1(\tau, a, \psi), \quad B_2(\tau, a, \psi), \ldots \end{gathered} \tag{1.8}$$

таким образом, чтобы асимптотические ряды (1.6) являлись решением системы (1.3) всякий раз, когда за a и ψ мы берем функции времени, определяемые уравнением (1.7).

Как только будут найдены явные выражения для функций (1.8), вопрос интегрирования системы (1.3) сведется к более простому вопросу интегрирования уравнений (1.7).

Так как интеграция уравнений (1.7) вводит только две произвольные постоянные, то с помощью выражений (1.6) мы можем получить приближенное представление не для общего решения уравнений (1.3), которое должно зависеть от $2N$ произвольных постоянных, а только для некоторого двупараметрического семейства частных решений.

В нелинейных системах принцип суперпозиции не имеет места, поэтому мы не можем построить общее решение, исходя из различных частных решений. Однако в ряде важных случаев указанное семейство частных решений обладает свойством сильной устойчивости и тогда исследование его представляет физический интерес.

Приступим к определению функций (1.8.). Для этого, диференцируя выражение (1.6) и принимая во внимание уравнения (1.7), находим $\dfrac{dq_i}{dt}$, $\dfrac{d^2q_i}{dt^2}$; полученные выражения подставляем в левые части уравнений (1.3), правые части после подстановки в них значений q_i, $\dfrac{dq_i}{dt}$ раскладываем в ряды Тейлора. Приравнивая коэфициенты при одинаковых степенях ε, получаем ряд систем, из которых находим функции $U_i^{(1)}(\tau, a, \theta, s\varphi+\psi)$, $U_i^{(2)}(\tau, a, \theta, s\varphi+\psi)$, ... $A_1(\tau, a, \psi)$, $A_2(\tau, a, \psi)$, ... $B_1(\tau, a, \psi)$, $B_2(\tau, a, \psi)$, ... определяем так, чтобы

$U_i^{(1)}(\tau, a, \theta, s\varphi+\psi)$, $U_i^{(2)}(\tau, a, \theta, s\varphi+\varphi)$ не содержали резонансных членов, т. е. не содержали членов, знаменатели в которых могут обратиться в нуль.

После ряда преобразований находим для $U_i^{(1)}(\tau, a, \theta, s\varphi+\psi)$ следующее выражение:

$$U_i^{(1)}(\tau, a, \theta, s\varphi+\psi) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\substack{n,m=-\infty \\ \left(\substack{nr+\nu(m+1)=0 \\ \text{для } k=1}\right)}}^{\infty} \sum_{k=1}^{N} \varphi_i^{(k)}(\tau) \frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \sum\limits_{j=1}^{N} Q_{j_0}^{(1)} \varphi_j^{(k)} e^{-i\{n\theta+m(s\varphi+\psi)\}} d\theta\, d(s\varphi+\psi)}{m_k[\omega_k^2-(\omega_1 m+\nu n)^2]} e^{i\{n\theta+m(s\varphi+\psi)\}} -$$

$$-2\omega_1 a \sum_{k=2}^{N} \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} \frac{d}{d\tau}\left[\frac{\partial T(\dot{q})}{\partial \dot{q}_j}\right]_{\dot{q}_i=\varphi_i^{(k)}(\tau)} \varphi_j^{(k)}(\tau)}{m_k(\omega_k^2-\omega_1^2)} \sin(s\varphi+\psi), \qquad (1.9)$$

где

$$m_k = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(\tau)\varphi_i^{(k)}(\tau)\cdot\varphi_j^{(k)}(\tau) = 2T(\varphi^{(k)}(\tau))$$

$$Q_{j_0}^{(1)} = Q_j^{(1)}(\tau, \theta, \varphi_1^{(1)}(\tau)\, a\cos(s\varphi+\psi) \ldots -\varphi_1^{(1)}(\tau)\, a\omega_1 \sin(s\varphi+\psi), \ldots) \quad (1.10)$$

Сформулируем правило составления выражения для $U_i^{(1)}(\tau, a, \theta, s\varphi+\psi)$. Сумма $\sum\limits_{j=1}^{N} Q_{j_0}^{(1)}\cdot\varphi_j^{(k)}(\tau)$ представляет собой обобщенную силу, действующую на k-ую нормальную координату. Выражение

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{d}{d\tau}\left[\frac{\partial T(\dot{q})}{\partial \dot{q}_j}\right]_{\dot{q}_i=\varphi_i^{(1)}(\tau)} \cdot \varphi_j^{(k)}(\tau)$$

тоже можно интерпретировать как обобщенную силу, действующую на k-ую нормальную координату. Наличие этой силы объясняется появлением „силы“ $\frac{d}{d\tau}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right]_{\dot{q}_i=\varphi_i^{(1)}(\tau)}$ в результате зависимости a_i и b_{ij} от τ.

Таким образом, для того, чтобы составить выражение для $U_j^{(1)}(\tau, a, \theta, s\varphi+\psi)$, надо найти n, m-ый член в разложении Фурье для обобщенной силы, действующей на k-ую нормальную координату (после подстановки в последнюю значений q_i, $\dot{q}_i$), далее надо найти производную по скорости от кинетической энергии, заменить в ней $\dot{q}_i$ на $\varphi_i^{(1)}(\tau)$, после чего полученные выражения остается подставить в фомулу (1.9.). m_k представляет собой удвоенную форму кинетической энергии, в которой скорости $\dot{q}_i$ заменены фундаментальными функциями $\varphi_i^{(k)}(\tau)$.

Перейдем к подбору соответствующих выражений для $A_1(\tau, a, \psi,)$ и $B_1(\tau, a, \psi)$. Как указывалось выше, они должны быть так определены, чтобы выполнялось условие конечности $U_i^{(1)}(\tau, a, \theta, s\varphi + \psi)$. Поэтому в качестве $A_1(\tau, a, \psi)$ и $B_1(\tau, a, \psi)$ можно взять некоторое частное, периодическое по ψ, решение системы уравнений в частных производных:

$$\left(\omega_1 - \frac{s}{r}\nu\right)\frac{\partial A_1}{\partial\psi} - 2a\,\omega_1 B_1 =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2 m_1}\sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} e^{i\sigma r\psi}\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{j=1}^{N} Q_{j_0}^{(1)}\varphi_j^{(1)} e^{-i\sigma r\psi}\cdot\cos(s\varphi+\psi)\,d\theta\,d(s\varphi+\psi); \quad (1.11)$$

$$\left(\omega_1 - \frac{s}{r}\nu\right)\frac{\partial B_1}{\partial\psi}a + 2\omega_1 A_1 = -\frac{a}{m_1}\frac{d(m_1\omega_1)}{d\tau} -$$

$$-\frac{1}{2\pi^2 m_1}\sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} e^{i\sigma r\psi}\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{j=1}^{N} Q_{j_0}^{(1)}\varphi_j^{(1)} e^{-i\sigma r\psi}\cdot\sin(s\varphi+\psi)\,d\theta\,d(s\varphi+\psi).$$

Нахождение такого решения не представляет затруднений. Явные выражения для $A_1(\tau, a, \psi)$ и $B_1(\tau, a, \psi)$ нет смысла здесь выписывать, так как в практических приложениях проще составить систему (1. 11) и найти для нее частные периодические решения, чем пользоваться окончательными формулами.

Чтобы написать уравнения (1. 11), надо найти выражение для обобщенной силы, действующей на первую нормальную координату, и подставить в правую часть системы (1.11)*).

Исходя из условия конечности $U_i^{(2)}(\tau, a, \theta, s\varphi + \psi)$, после ряда выкладок получаем систему уравнений:

$$\left(\omega_1 - \frac{s}{r}\nu\right)\frac{\partial A_2}{\partial\psi} - 2a\omega_1 B_2 =$$

$$= -\left\{\frac{\partial A_1}{\partial a}A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial\psi}B_1 + \frac{\partial A_1}{\partial\tau} - aB_1^2 + \frac{dm_1 A_1}{d\tau\, m_1} - \frac{\gamma(\tau)a}{m_1}\right\} +$$

$$+\frac{1}{2\pi^2 m_1}\sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} e^{i\sigma r\psi}\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{j=1}^{N}\Phi_{j_0}^{(2)}\varphi_j^{(1)} e^{-i\sigma r\psi}\cos(s\varphi+\psi)\,d\theta\,d(s\varphi+\psi); \quad (1.12)$$

$$\left(\omega_1 - \frac{s}{r}\nu\right)\frac{\partial B_2}{\partial\psi}a + 2\omega_1 A_2 = -\left\{a\frac{\partial B_1}{\partial a}A_1 + a\frac{\partial B_1}{\partial\psi}B_1 + a\frac{\partial B_1}{\partial\tau} + 2A_1B_1 +\right.$$

$$\left.+\frac{dm_1}{d\tau}\frac{aB_1}{m_1}\right\} - \frac{1}{2\pi^2 m_1}\sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} e^{i\sigma r\psi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{j=1}^{N}\Phi_{j_0}^{(2)}\varphi_j^{(1)} e^{-i\sigma r\psi}\sin(s\varphi+\psi)\,d\theta\,d(s\varphi+\psi),$$

---

*) Уравнения (1.11) можно также получить, подставляя значения q_i (1.6) в уравнения гармонического баланса:

$$\int_0^{2\pi}\sum_{j=1}^{N}\varphi_j^{(1)}(\tau)\left\{\frac{d}{d\tau}\left[\sum_{i=1}^{N}a_{ij}(\tau)\dot{q}_i\right] + \sum_{i=1}^{N}b_{ij}(\tau)\,q_i - \varepsilon Q_j\right\}\begin{matrix}\sin(s\varphi+\psi)\\ \cos(s\varphi+\psi)\end{matrix}\,d(s\varphi+\psi)=0.$$

где обозначено:

$$\gamma(\tau) = \sum_{j=1}^{N} \frac{d}{d\tau}\left[\frac{\partial T(\dot{q})}{\partial \dot{q}_j}\right]_{\dot{q}_i = \varphi_i^{(1)}(\tau)} \cdot \varphi_j^{(1)}(\tau). \tag{1.13}$$

$\gamma(\tau)$—обобщенная сила, действующая на первую нормальную координату. Появление этой силы объясняется, как указывалось выше, наличием в системе медленно меняющихся параметров. $\Phi_{j0}^{(2)}$ — периодическая по θ и $s\varphi+\psi$ функция с периодом 2π, — известна нам, как только определено $U_i^{(1)}(\tau, a, \theta, s\varphi+\psi)$. Итак, правые части системы (1. 12) — периодические функции по ψ, и мы без затруднений можем найти некоторое частное периодическое решение этой системы, которое и примем в качестве искомых величин $A_2(\tau, a, \psi)$ и $B_2(\tau, a, \psi)$.

Таким образом, найдены функции $U_i^{(1)}(\tau, a, \theta, s\varphi+\psi)$, $A_1(\tau, a, \psi)$, $B_1(\tau, a, \psi)$, $A_2(\tau, a, \psi)$, $B_2(\tau, a, \psi)$, и мы можем построить решение уравнений (1.3) в первом и во втором приближении. Резюмируя изложенное, приведем схему построения первого и второго приближения.

Прежде всего выделяем „невозмущенную" линейную систему (1.4) и проверяем, удовлетворяет ли она указанным условиям — отсутствие статического решения за исключением тривиального $q_1=q_2=\ldots=q_N=0$, ни „частота" $\omega_1(\tau)$, а также ни один из обертонов $2\omega_1(\tau), 3\omega_1(\tau), \ldots k\omega_1(\tau), \ldots$ не равен какой-либо „собственной частоте" $\omega_2(\tau), \omega_3(\tau), \ldots \omega_N(\tau)$ для любых τ; далее находим „собственную частоту" $\omega_1(\tau)$ и „нормальные" функции $\varphi_i^{(k)}(\tau)$.

После этого в качестве первого приближения берем выражение*):

$$q_i = \varphi_i^{(1)}(\tau)\, a \cos(s\varphi+\psi) \quad (i=1, 2, \ldots N), \tag{1.14}$$

в котором функции a и ψ должны быть определены из уравнений:

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(\tau, a, \psi),$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_1(\tau) - \frac{s}{r}\nu(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a, \psi). \tag{1.15}$$

$A_1(\tau, a, \psi)$ и $B_1(\tau, a, \psi)$ — частные периодические по ψ решения системы (1.11).

В качестве второго приближения принимаем выражение:

$$q_i = \varphi_i^{(1)}(\tau)\, a\cos(s\varphi+\psi) + \varepsilon U_i^{(1)}(\tau, a, \theta, s\varphi+\psi), \quad (i=1, 2, \ldots N), \tag{1.16}$$

в котором a и ψ определяются уравнениями:

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(\tau, a, \psi) + \varepsilon^2 A_2(\tau, a, \psi),$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_1(\tau) - \frac{s}{r}\nu(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a, \psi) + \varepsilon^2 B_2(\tau, a, \psi), \tag{1.17}$$

---

*) Известно, что в m-ом приближении нет смысла сохранять в асимптотическом ряде (1.6) член m-го порядка малости ввиду того, что a и ψ определяются из системы m-го приближения с точностью до величин $m-1$-го порядка малости включительно.

$A_1(\tau, a, \psi)$, $A_2(\tau, a, \psi)$, $B_1(\tau, a, \psi)$, $B_2(\tau, a, \psi)$ находим из систем (1.11) и (1.12), $U_i^{(1)}(\tau, a, \theta, s\varphi+\psi)$ — по формуле (1.9).

Полученные уравнения первого (1.15) и второго (1.17) приближения в общем случае не интегрируются в замкнутом виде и поэтому приходится пользоваться численными методами интегрирования или ограничиваться исследованием качественного характера решений с помощью теории Ляпунова-Пуанкаре.

При помощи численных методов можно было бы проинтегрировать непосредственно систему (1.3), однако это чрезвычайно сложная задача (даже при наличии двух степеней свободы), требующая очень много времени.

Численное же интегрирование уравнений первого (или второго) приближения не представляет затруднений. Ввиду того, что в этих уравнениях переменными являются амплитуда и фаза колебаний, для получения полной картины процесса нам надо вычислить небольшое количество точек.

Уравнения первого (или второго) приближения позволяют исследовать поведение системы при медленном прохождении через резонанс.

Как известно, эта задача, имеющая актуальное значение в современной вибротехнике, решена только для систем с одной степенью свободы, описываемых линейными уравнениями.

Следует отметить, что в ряде частных случаев, а также при исследовании стационарных режимов, уравнения (1.15) интегрируются до конца и мы получаем простые выражения для a и ψ.

§ 2

Во многих случаях нам не известны возмущающие обобщенные силы, действующие на систему, но мы можем легко найти виртуальную работу δW, которую совершили бы эти силы на виртуальных перемещениях, соответствующих вариации амплитуды и фазы колебания. В таком случае нет необходимости находить обобщенные силы и составлять уравнения типа (1.3). Достаточно написать уравнения „невозмущенного" движения (1.4) и найти для них частные решения, соответствующие первому „главному" колебанию. После этого нужно написать уравнения первого приближения, определяющие a и ψ. Для второго приближения надо, кроме того, найти $U_i^{(1)}(\tau, a, \theta, s\varphi+\psi)$ и составить уравнения второго приближения.

Уравнения первого и второго приближения, а так же выражение для $U_i^{(1)}(\tau, a, \theta, s\varphi+\psi)$ можно написать, пользуясь непосредственно выражением виртуальной работы. Для этого дадим энергетическую интерпретацию, — особую мнемоническую запись, удобную для запоминания — уравнениям (1.9) и (1.13).

Рассмотрим выражение виртуальной работы, которую совершили бы возмущающие силы εQ_j в режиме синусоидальных колебаний

$$q_i = \varphi_i^{(1)}(\tau) a \cos(s\varphi + \psi), \quad \dot{q}_i = -\varphi_i^{(1)}(\tau)\, a\, \omega_1 \sin(s\varphi + \psi)$$

на виртуальных перемещениях

$$\delta q_j = \varphi_j^{(1)}(\tau) \cos(s\varphi + \psi)\,\delta a - \varphi_j^{(1)}(\tau)\, a \sin(s\varphi + \psi)\,\delta\psi,$$

соответствующих вариациям амплитуды и фазы нормального колебания. Тогда, с точностью до величин первого порядка малости, имеем

$$\delta W = \sum_{j=1}^{N} Q_{j_0}^{(1)} [\, \varphi_j^{(1)}(\tau) \cos(s\varphi + \psi)\,\delta a - \varphi_j^{(1)}(\tau)\, a \sin(s\varphi + \psi)\,\delta\psi\,].$$

Обозначим $\delta\overline{W}$ среднее значение этой работы за полный цикл колебания и разложим $Q_{j_0}^{(1)}$ в двойной ряд Фурье. Вводя символические обозначения $\frac{\delta\overline{W}}{\delta a}$, $\frac{\delta\overline{W}}{\delta\psi}$ для коэфициентов при вариациях δa и $\delta\psi$ в выражении для средней работы за полный цикл колебания, мы можем систему (1.11) написать следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(\omega_1 - \frac{s}{r}\nu\right)\frac{\partial A_1}{\partial\psi} - 2\omega_1 a B_1 &= \frac{2}{m_1}\frac{\delta\overline{W}}{\delta a}, \\ \left(\omega_1 - \frac{s}{r}\nu\right)\frac{\partial B_1}{\partial\psi} a + 2\omega_1 A_1 &= -\frac{a}{m_1}\frac{d(m_1\omega_1)}{d\tau} + \frac{2}{m_1 a}\frac{\delta\overline{W}}{\delta\psi}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Для составления системы (2.1) можно сформулировать правило.

Для того чтобы составить систему уравнений в частных производных, определяющую $A_1(\tau, a, \psi)$ и $B_1(\tau, a, \psi)$, надо найти среднюю величину, за цикл колебания, виртуальной работы, которую совершили бы возмущающие силы, в режиме синусоидальных колебаний на виртуальных перемещениях, соответствующих вариации их амплитуды и фазы. После этого „частные производные“ найденной виртуальной работы надо подставить в уравнения (2.1).

Нетрудно дать энергетическую интерпретацию непосредственно уравнениям первого приближения. Для этого представим среднюю величину виртуальной работы в виде

$$\delta\overline{W} = \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} \delta\overline{W}_\sigma = \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\delta\overline{W}_\sigma}{\delta a}\delta a + \frac{\delta\overline{W}}{\delta\psi}\delta\psi \right\}, \tag{2.2}$$

где $\delta\overline{W}_\sigma$ обозначает среднюю величину, за цикл колебания, виртуальной работы, которую совершил бы σ-член в разложении Фурье для возмущающей силы, в режиме синусоидальных колебаний, на виртуальных перемещениях, соответствующих вариациям амплитуды и фазы колебания. При таком обозначении уравнения первого приближения принимают следующий вид:

$$\frac{da}{dt}=-\frac{\varepsilon a}{2m_1\omega_1}\cdot\frac{d(m_1\omega_1)}{d\tau}+\frac{2\varepsilon}{m_1}\sum_{\sigma=-\infty}^{\infty}\frac{(r\omega_1-s\nu)\,\sigma i\,\frac{\partial\overline{W}_\sigma}{\partial a}+2\omega_1\frac{\partial\overline{W}_\sigma}{\partial\psi}\cdot\frac{1}{a}}{4\omega_1^2-(r\omega_1-s\nu)^2\sigma^2},$$

$$\frac{d\psi}{dt}=\omega_1(\tau)-\frac{s}{r}\nu(\tau)+\frac{2\varepsilon}{m_1 a}\sum_{\sigma=-\infty}^{\infty}\frac{(r\omega_1-s\nu)\,\sigma i\,\frac{\partial\overline{W}_\sigma}{\partial\psi}\cdot\frac{1}{a}-2\omega_1\frac{\partial\overline{W}_\sigma}{\partial a}}{4\omega_1^2-(r\omega_1-s\nu)^2\sigma^2}. \tag{2.3}$$

Итак, составлять уравнения первого приближения мы можем, пользуясь правилом:

Чтобы составить уравнения первого приближения, необходимо подсчитать среднюю величину виртуальной работы за полный цикл колебания, которую совершили бы возмущающие силы в режиме синусоидальных колебаний на виртуальных перемещениях, соответствующих вариациям амплитуды и фазы колебания. Полученное выражение надо разложить в ряд Фурье, после чего „частные производные" σ-го члена подставить в уравнения (2.3).

Для уравнений второго приближения и для $U_l^{(1)}(\tau, a, \theta, s\varphi+\psi)$ также можно на основании энергетической интерпретации сформулировать ряд простых правил, дающих возможность написать формулу (1.11) и уравнения (1.14), исходя непосредственно из выражения виртуальной работы. Эти правила здесь не приведены, так как принципиального значения они не имеют. К тому же практически вторым приближением приходится пользоваться в исключительно редких случаях.

Изложенный энергетический метод дает возможность получить приближения первого (и второго) порядка без предварительного составления точных диференциальных уравнений задач.

Согласно вышеизложенному нам надо составить линейную систему „невозмущенного" движения, проверить удовлетворяет ли она указанным условиям, найти для нее „основные частоты" и „нормальные" функции, после чего составляем уравнения первого (второго) приближения согласно приведенным правилам.

При помощи энергетической интерпретации мы составляем уравнения первого (второго) приближения, пользуясь непосредственно формой работы (или потенциальной энергии) и кинетической энергии. Это дает возможность без дополнительных математических обоснований применить изложенную методику для решения уравнений в частных производных.

§ 3

В качестве иллюстрирующего примера рассмотрим поперечные колебания стержня длиной l, на свободный конец которого действует осевая сила $F(t)=F_0+\varepsilon F_1(t)$, где $F_1(t)=H\sin\nu t$ (см. рис. 1).

Колебания такой системы, имеющей бесконечное число степеней свободы, как известно, описываются диференциальным уравнением в частных производных. Уравнение невозмущенного движения, если пренебречь инерцией вращения и перерезывающей силой, будет

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+F_0\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{\varrho S}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0, \tag{3.1}$$

где обозначено: ϱ — вес единицы объема, S — площадь поперечного сечения, EJ — жесткость стержня.

Граничные условия будут следующие — для закрепленного конца:

$$x=0,\quad y=0,\quad \frac{\partial y}{\partial x}=0, \tag{3.2}$$

для свободного:

$$x=l,\ \ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0,\quad EJ\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=-F_0\frac{\partial y}{\partial x}.$$

Для уравнения „невозмущенного“ движения (3.1) обычным методом находим частоты ω_k и нормальные функции $\varphi_x^{(k)}$ (в данном примере они не зависят от τ).

Для иных граничных условий эта задача решается просто. Так, например, для шарнирно опертых концов сразу составляем уравнение „возмущенного“ движения, которое заменой переменных приводим к уравнению в обычных производных (получаем уравнение Матье).

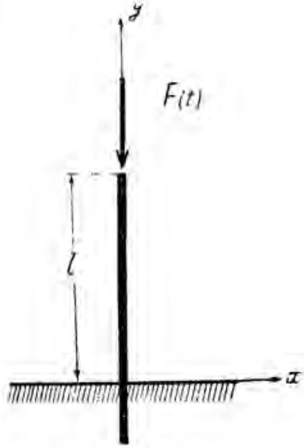

Рис. 1.

В рассматриваемом случае граничные условия (3.2) не дают возможности сделать такую замену переменных и поэтому решить задачу существующими методами нельзя.

На основании вышеизложенной теории решение этой задачи не представляет затруднений. Под воздействием периодической осевой силы с частотой в два раза большей основной собственной частоты, в стержне может возникнуть основной демультипликационный резонанс ($s=1$, $r=2$).

Приступая к исследованию его, решение для „возмущенного“ движения ищем в виде:

$$y=\varphi_x^{(1)}\,a\cos\left(\frac{1}{2}\,\theta+\psi\right), \tag{3.3}$$

где a и ψ должны определяться уравнениями первого приближения, для составления которых пользуемся непосредственно выражениями потенциальной и кинетической энергии.

После ряда выкладок получаем:

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt}&=-\frac{\varepsilon\Phi^{(1)}aH}{2m_1\nu}\cos 2\psi,\\ \frac{d\psi}{dt}&=\omega_1-\frac{\nu}{2}+\frac{\varepsilon\Phi^{(1)}\cdot H}{2m_1\nu}\sin 2\psi,\end{aligned} \tag{3.4}$$

где обозначено

$$\Phi^{(1)} = \frac{J}{S}\int\limits_0 \left(\frac{\partial^2 \varphi_x^{(1)}}{\partial x^2}\right)^2 dx + \int\limits_0^l \left(\frac{\partial \varphi_x^{(1)}}{\partial x}\right)^2 dx. \tag{3.5}$$

Если $\nu = \text{const}$, то уравнения первого приближения (3.4) интегрируются в квадратурах.

При помощи элементарных рассуждений из системы (3.4) можно вывести условие самовозбуждения:

$$\left|\omega_1 - \frac{\nu}{2}\right| < \frac{\varepsilon \Phi^{(1)} \cdot H}{2m_1\nu}. \tag{3.6}$$

Неравенство (3.6) является условием неустойчивости неискривленной формы оси стержня при воздействии синусоидальной осевой нагрузки (с частотой $\nu \cong 2\omega_1$). При помощи него можно определить зону неустойчивости.

Если принять следующие числовые значения для параметров исследуемой системы: $E=2\cdot 10^6$ *кг/см*^{2}, $S=79$ *см*^{2}, $J=5000$ *см*^{4}, $\varrho=0{,}0078$ *кг/см*^{3}, $F_0=4\cdot 10^4$ *кг*, $\varepsilon H=4\cdot 10^3$ *кг*, $l=500$ *см*, то уравнения первого приближения будут:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{62{,}7015\,a}{\nu}\cos 2\psi, \\ \frac{d\psi}{dt} &= 43{,}947 - \frac{\nu}{2} + \frac{62{,}7015}{\nu}\sin 2\psi. \end{aligned} \tag{3.7}$$

С помощью этих уравнений можно исследовать поведение амплитуды и фазы при изменении частоты внешней силы (при прохождении через резонанс).

Пусть $\nu = \nu(\tau)$ $(\nu(0) \cong 2\omega_1)$ изменяется по закону: $\nu(\tau) = 85 + t$. Тогда, численно интегрируя систему (3.7) $\left(\text{интегрирование нами произведено при начальных значениях } t = 0, a = a_0, \psi = \frac{\pi}{4}\right)$, получим для $\frac{a}{a_0}$ и ψ значения, приведенные на рис. 2 и рис. 3.

На графике зависимости $\frac{a}{a_0}$ от времени (рис. 2) мы имеем характерное весьма значительное смещение и снижение максимума амплитуды колебаний сравнительно с тем, которое было бы при установившемся резонансе. [Точка C на оси Ot (см. рис. 2 и рис. 3) обозначает момент времени, соответствующий точному резонансу].

Также имеем хорошо выраженные биения после прохождения первого максимума амплитуды.

В заключение приведем второе приближение. Для

$$U_x^{(1)}\left(a,\ \tau,\ \theta,\ \ \frac{1}{2}\theta+\psi\right),$$

учитывая принятые нами числовые значения и предполагая, что $\nu \cong 2\omega_1$, имеем выражение

$$U_x^{(1)}\left(\tau, a, \theta, \frac{1}{2}\,\theta+\psi\right) =$$

$$=\left\{-4{,}0581\cdot 10^{-6}\cdot \varphi_x^{(1)}+1{,}6269\cdot 10^{-11}\cdot \varphi_x^{(2)}+\ldots\right\} a\sin\left(\frac{3}{2}\,\theta+\psi\right)+$$

$$+\left\{1{,}4053\cdot 10^{-11}\cdot \varphi_x^{(2)}+\ldots\right\} a\sin\left(\frac{1}{2}\,\theta-\psi\right). \qquad (3.8)$$

Уравнения второго приближения $\left(\frac{d\nu}{a\tau}\cong\frac{\omega_1}{5}\right)$ будут:

$$\frac{da}{dt}=-0{,}7134a\cos 2\psi+\left\{5{,}4638\ \cdot\ 10^{-3}+\ \ldots\right\} a\sin 2\psi,$$

$$\frac{d\psi}{dt}=43{,}947-\frac{\nu}{2}+0{,}7134\sin 2\,\psi+\left\{5{,}4638\cdot 10^{-3}+\ldots\right\}\cos 2\,\psi+7{,}640\cdot 10^{-3}.$$

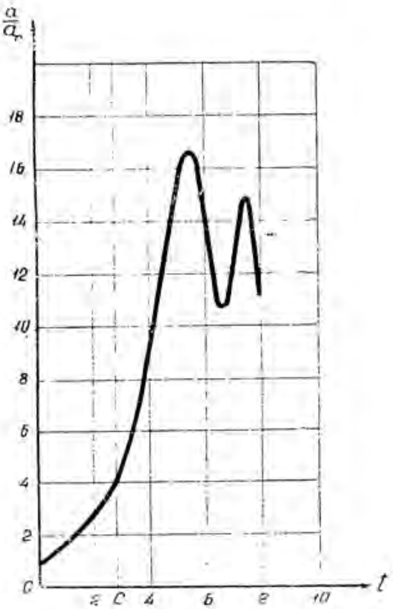

Рис. 2.

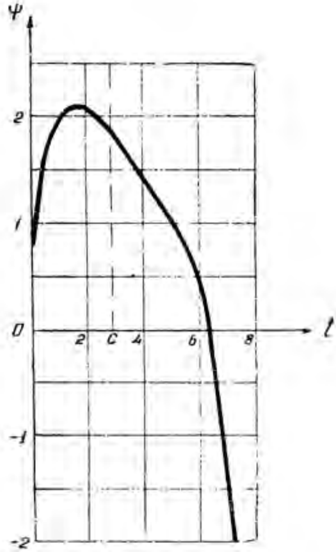

Рис. 3.

Как видно из выражений (3.8) и (3.9), для практических целей вполне достаточно ограничиваться первым приближением (даже для значительно больших возмущений, чем принятые в данном примере). Действительно, дополнительное слагаемое $U_x^{(1)}\left(\tau, a, \theta, \frac{1}{2}\theta+\psi\right)$ вводит в решение высшие гармоники, амплитуды которых составляют не более 0,001% амплитуды основной гармоники. Уравнения второго приближения вводят поправку на собственную частоту и резонансную зону, не превышающую 0,02%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Одночастотные свободные колебания в нелинейных системах со многими степенями свободы, Сборник трудов Института строительной механики АН УССР, № 10, 1949.

Поступило 21.II 1949.

Институт
строительной механики
