СВЕТЛОЙ ПАМЯТИ ДОРОГОГО УЧИТЕЛЯ
НИКОЛАЯ ГРИГОРЬЕВИЧА ЧЕБОТАРЕВА

Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m)

М. Г. Крейн

При исследовании спектральных свойств самосопряженных расширений эрмитовых операторов можно всегда ограничиться тем случаем, когда оператор п р о с т (см. § 1, п. 3).

В основе настоящего исследования лежит то обстоятельство, что всякий действующий в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ простой эрмитов оператор A с индексом дефекта (m, m) (m — натуральное число) порождает некоторое линейное изоморфное отображение $f \to \mathfrak{f}(z)$ пространства $\mathfrak{H}$ в линейное множество m-мерных вектор-функций $\mathfrak{f}(z) = (f_1(z), \ldots, f_m(z))$ невещественного аргумента z, мероморфных внутри верхней и нижней полуплоскостей, — причем это отображение обладает тем свойством, что если элемент f принадлежит области определения A, а $g = Af$, то $\mathfrak{g}(z) = z\mathfrak{f}(z)$.

Это отображение не определяется однозначно оператором A, если только не заданы некоторые дополнительные н о р м и р у ю щ и е условия, которые дальше будут указаны. В частности, заметим, что отображение $f \to \mathfrak{f}(z)$ можно всегда так реализовать, чтобы все вектор-функции $\mathfrak{f}(z)$ были голоморфными внутри верхней и нижней полуплоскостей.

Если, например, $\mathfrak{H}$ есть $\mathfrak{L}^{(2)}(a, b)$ $(-\infty \leqslant a, b \leqslant \infty)$, т. е. пространство комплексно-значных измеримых и интегрируемых вместе со своим квадратом функций $f(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ с естественным определением скалярного произведения, а A — некоторый эрмитов оператор с индексом дефекта (m, m), порожденный некоторым линейным диференциальным выражением m-го порядка $L(f)$ *), то требуемое отображение $f \to \mathfrak{f}(z) = (f^{(1)}(z), \ldots, f^{(m)}(z))$ можно осуществить, полагая

$$f^{(j)}(z) = \int_a^b f(t)\, \varphi(t, z)\, dt \qquad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

---

*) „Порожденный" следует понимать в том смысле, что область определения A состоит из функций f, обращающихся в нуль в окрестности точек a, b, абсолютно непрерывных вместе со своими производными $f', f'', \ldots, f^{(m-1)}$ и таких, что $L(f) \in \mathfrak{L}^{(2)}$; при этом $Af = L(f)$ (допускается, что концы интервала (a, b) могут быть сингулярными точками для $L(f)$).

где $\varphi_1(t, z), \ldots, \varphi_m(t, z)$ ($a < t < b$; z — комплексное число) — система линейно независимых решений уравнения

$$L(\varphi) - z\varphi = 0,$$

нормируемых в какой-либо внутренней точке $t_0 \in (a, b)$ условиями

$$\left. \frac{d^k \varphi_j(t, z)}{dt^k} \right|_{t=t_0} = \delta_{jk} \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, m).$$

В этом случае все вектор-функции $\mathfrak{f}(z)$ оказываются целыми*).

Заметим, что обычное преобразование Фурье можно трактовать как отображение $f \to \mathfrak{f}(z)$, соответствующее случаю $m=1$ и $L(f) = i\dfrac{df}{dx}$.

При исследовании конкретных эрмитовых операторов отображение $f \to \mathfrak{f}(z)$ обычно подсказывается самой постановкой проблемы.

Но, повидимому, здесь впервые развита *общая теория* таких отображений, названная нами *теорией представления эрмитовых операторов*.

Для ее построения нам пришлось мобилизовать методы (а иногда и новые средства) теории аналитических функций, которые доселе не применялись при исследовании спектральных свойств операторов.

Наиболее тонкие методы потребовались в § 5, 6 для установления того факта, что тот или иной характер поведения вектор-функций $\mathfrak{f}(z)$ в окрестности данной вещественной точки определяет поведение спектра самосопряженных расширений оператора A в этой окрестности этой точки.

Исследование определенным образом нормированного отображения $f \to \mathfrak{f}(z)$ позволяет классифицировать эрмитовы операторы, исходя из принадлежности вектор-функций $\mathfrak{f}(z)$ к тому или иному классу функций. На этом пути обнаруживается замечательный класс *целых* операторов (§ 8, 10). Целые операторы бывают двух типов: *минимального* и *нормального*.

Простейший пример целого оператора *нормального* типа с индексом дефекта (1,1) можно получить, рассматривая эрмитовы операторы порождаемые операцией $i\dfrac{d}{dx}$ в применении к функциям, для которых скалярное произведение определяется *особым образом* (§ 10, II). Это впервые было обнаружено автором в связи с исследованием так называемой *проблемы продолжения эрмитово-положительной функции* [1а, б, к].

К целому оператору *минимального* типа приводит так называемый неопределенный случай классической степенной проблемы моментов.

С момента зарождения спектральной теории операторов ее идеи находились в непрерывном взаимном действии с идеями проблемы моментов.

---

*) Согласно теореме (13), § 9 в таком случае спектр любого самосопряженного расширения $\tilde{A}$ оператора A дискретен.

Нам кажется, что в этом исследовании достигается единство идей одной и другой области в такой степени, в какой раньше оно не наблюдалось.

В общей теории целых операторов удается найти аналоги всем основным предложениям неопределенного случая классической проблемы моментов вплоть до знаменитых неравенств Чебышева (см. [1б]). С другой стороны, построение общей теории целых операторов позволяет просто решить различные задачи типа проблемы моментов, решение которых методами классического анализа представило бы большие трудности, ввиду отсутствия каких-либо общих ориентирующих идей. В качестве двух таких примеров мы приводим матричную степенную проблему моментов (§ 10, I) и проблему продолжения эрмитово-положительной матрицы-функции (§ 10, II).

Из-за недостатка места мы не могли изложить результаты исследований об обобщенных резольвентах эрмитова оператора с индексом дефекта (m, m). В связи с этим опущен и вывод соотношений, из которых находится общий вид матриц распределения $T(\lambda) = \|(E_\lambda u_j,\ u_k)\|_1^m$ соответствующих данному эрмитову оператору A, о которых идет речь во многих параграфах.

По той же причине мы не излагаем здесь приложений развитой теории к различным интерполяционным задачам теории функций типа проблемы Неванлинна-Пика, к проблемам продолжения в гильбертовом пространстве винтовых дуг (см. [1г, д]) и многим другим вопросам.

Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта (1,1) и ряд их приложений были сообщены нами без доказательства в журнале „Доклады Академии наук СССР“ еще в 1943—1944 гг. Здесь можно найти доказательства большинства этих положений и притом для более общего случая.

Все связанное со специфическими особенностями случая $m = 1$ мы предполагаем изложить в отдельной статье.

Первыми интересами к различным проблемам продолжения и к проблеме моментов автор обязан своему незабвенному учителю Николаю Григорьевичу Чеботареву, светлой памяти которого посвящается эта статья.

§ 1. Основные понятия

1. В дальнейшем $\mathfrak{H}$ означает некоторое гильбертово пространство. Однопараметрическое семейство $E_\lambda(-\infty < \lambda < \infty)$ ограниченных самосопряженных операторов в $\mathfrak{H}$ будем называть *дистрибутивной оператор-функцией*, если для любого $f \in \mathfrak{H}$:

1°. $(E_\lambda f, f)$ не убывает при возрастании λ.

2°. $E_\lambda f$ — непрерывная слева функция λ.

3°. $E_\lambda f \to 0$ при $\lambda \to -\infty$.

4°. $E_\lambda f \to f$ при $\lambda \to \infty$.

Дистрибутивная оператор-функция называется ортогональной, если

$$E_\lambda E_\mu = E_{\min(\lambda,\mu)} \qquad (-\infty < \lambda,\ \mu < \infty).$$

Согласно классической лемме М. А. Наймарка [2а, б] всякой дистрибутивной оператор-функции E_λ можно сопоставить гильбертово пространство $\tilde{\mathfrak{H}}$, содержащее в себе $\mathfrak{H}$, и ортогональную в нем дистрибутивную оператор-функцию $\tilde{E}_\lambda$ так, что

$$E_\lambda = P\tilde{E}_\lambda \qquad (-\infty < \lambda < \infty), \tag{1.1}$$

где P — оператор ортогонального проектирования в $\tilde{\mathfrak{H}}$ на $\mathfrak{H}$.

Представление (1.1) можно всегда выбрать так, чтобы оно было неприводимым, т. е. чтобы в $\tilde{\mathfrak{H}} \ominus \mathfrak{H}$ не существовало подпространства инвариантного по отношению ко всем $\tilde{E}_\lambda$. Оказывается, что неприводимое представление (1.1) определяется однозначно до унитарной эквивалентности. Это значит, что для всякого такого представления

$$E_\lambda = P'\tilde{E}_\lambda \qquad (-\infty < \lambda < \infty),$$

где P' — оператор проектирования пространства $\tilde{\mathfrak{H}}' \supset \mathfrak{H}$ (в котором действует неприводимая ортогональная оператор-функция $\tilde{E}'_\lambda$) на пространство $\mathfrak{H}$, найдется унитарное отображение U пространства $\tilde{\mathfrak{H}}$ на $\tilde{\mathfrak{H}}'$, оставляющее на месте $\mathfrak{H}$ и такое, что $\tilde{E}_\lambda = U\tilde{E}'_\lambda U^{-1}$.

Из представления (1.1) вытекает, что если для некоторого вектора $f \in \mathfrak{H}$:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(E_\lambda f, f) < \infty, \tag{1.2}$$

то будут сильно сходиться интегралы, фигурирующие в равенстве

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d\tilde{E}_\lambda f = P \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d\tilde{E}_\lambda f, \tag{1.3}$$

ибо согласно (1.1) также

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(\tilde{E}_\lambda f, f) = J < \infty,$$

а для ортогональной оператор-функции конечность этого интеграла влечет сильную сходимость интеграла, стоящего в (1,3) под знаком P.

Пусть теперь A — некоторый, действующий в $\mathfrak{H}$ замкнутый эрмитов оператор с областью определения $\mathfrak{D}_A$ $(\overline{\mathfrak{D}}_A = \mathfrak{H})$.

Дистрибутивную оператор-функцию E_λ $(-\infty < \lambda < \infty)$ будем называть спектральной функцией оператора A, если для любого $f \in \mathfrak{D}_A$

$$\|Af\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(E_\lambda f, f) \ \text{ и } \ Af = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE_\lambda f. \tag{1.4}$$

Воспользуемся представлением (1.1) для спектральной функции E_λ Ортогональная оператор-функция $\tilde{E}_\lambda$ определяет в $\tilde{\mathfrak{H}}$ некоторый самосопряженный оператор $\tilde{A}$ с областью определения $\mathfrak{D}_{\tilde{A}}$, состоящей из всех тех $f \in \tilde{\mathfrak{H}}$, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(\tilde{E}_\lambda f, f) < \infty,$$

и при этом для любого такого f

$$\tilde{A}f = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\tilde{E}_\lambda f.$$

В частности, мы заключаем, что $\mathfrak{D}_A \subset \mathfrak{D}_{\tilde{A}}$.

Кроме того, в силу (1.4) для любого $f \in \mathfrak{D}_A$:

$$\|Af\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(E_\lambda f, f) = \int_{\infty}^{\infty} \lambda^2 d(\tilde{E}_\lambda f, f) = \|\tilde{A}f\|^2$$

и

$$Af = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_\lambda f = P\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\tilde{E}_\lambda f = P\tilde{A}f.$$

Из этих двух равенств вытекает $Af = \tilde{A}f$ при $f \in \mathfrak{D}_A$, т. е. $\tilde{A}$ есть некоторое самосопряженное расширение оператора A с выходом из $\mathfrak{H}$ в некоторое $\tilde{\mathfrak{H}} \supset \mathfrak{H}$.

Совсем просто проверяется предложение, обратное доказанному, т. е. если $\tilde{A}$ есть некоторое самосопряженное расширение оператора A с выходом из $\mathfrak{H}$ в некоторое $\tilde{\mathfrak{H}} \supset \mathfrak{H}$, а $\tilde{E}_\lambda$ обычная спектральная функция оператора $\tilde{A}$, то равенством

$$E_\lambda = P\tilde{E}_\lambda \qquad (-\infty < \lambda < \infty)$$

определяется некоторая спектральная функция E_λ оператора A.

Представление будет неприводимым в том и только том случае, когда расширение $\tilde{A}$ неприводимо, т. е. в $\tilde{\mathfrak{H}} \ominus \mathfrak{H}$ нет инвариантного для $\tilde{A}$ подпространства, в котором оператор $\tilde{A}$ был бы самосопряженным.

Мы описали способ получения всех спектральных функций эрмитова оператора, который был указан М. А. Наймарком [2a] при ином исходном определении спектральной функции эрмитова оператора, а именно, определении, данном Карлеманом-Стоном; оно оказывается эквивалентным нашему и мы его приводить не будем.

Нетрудно видеть, что всякий эрмитов оператор A имеет самосопряженные расширения $\tilde{A}$ с выходом (см. [2a]), а следовательно, у него всегда имеется по крайней мере одна спектральная функция.

Замкнутый эрмитов оператор имеет единственную спектральную функцию в том и только том случае, когда он максимален [2a].

2. Пусть $\tilde{A}$ — некоторое самосопряженное расширение замкнутого эрмитова оператора A с выходом в $\tilde{\mathfrak{H}} \supset \mathfrak{H}$ (в частном случае $\tilde{\mathfrak{H}}$ может совпадать с $\mathfrak{H}$). Положим для любых невещественных z и ζ:

$$\tilde{R}_z = (\tilde{A} - zI)^{-1}, \quad \tilde{U}_{\zeta z} = I + (z - \zeta)\tilde{R}_z = (\tilde{A} - \zeta I)(\tilde{A} - zI)^{-1}.$$

Нетрудно видеть, что:

1°. $\tilde{U}_{\zeta z} = \tilde{U}_{\zeta z}^{-1}$.

2°. $\tilde{U}_{\zeta z}^{*} = \tilde{U}_{\bar{\zeta}\bar{z}}$.

3°. $\tilde{U}_{\zeta z}\tilde{U}_{z\xi} = \tilde{U}_{\zeta\xi}$.

Для замкнутого эрмитова оператора A при любом невещественном z линейное множество

$$\mathfrak{M}_z = (A - zI)\mathfrak{D}_A$$

замкнуто.

Положим

$$\tilde{\mathfrak{N}}_{\bar{z}} = \tilde{\mathfrak{H}} \ominus \mathfrak{M}_{\bar{z}} \qquad (\operatorname{Im} z \neq 0).$$

Покажем, что:

4°. Для любых невещественных ζ, z оператор $\tilde{U}_{\zeta z}$ отображает одно-однозначно $\tilde{\mathfrak{N}}_{\zeta}$ на $\tilde{\mathfrak{N}}_{z}$.

В самом деле, если $\varphi \in \tilde{\mathfrak{N}}_{\zeta}$, т. е. $\varphi \perp \mathfrak{M}_{\bar{\zeta}}$, то при любом $f \in \mathfrak{D}_A$:

$$(\tilde{U}_{\zeta z}\varphi, (A - \bar{z}I)f) = (\varphi, \tilde{U}_{\bar{\zeta}\bar{z}}(\tilde{A} - \bar{z}I)f) = (\varphi, (\tilde{A} - \bar{\zeta}I)f) = 0.$$

Таким образом, $\tilde{U}_{\zeta z}\tilde{\mathfrak{N}}_{\zeta} \subset \tilde{\mathfrak{N}}_z$. Аналогично $\tilde{U}_{z\zeta}\tilde{\mathfrak{N}}_z \subset \tilde{\mathfrak{N}}_{\zeta}$. Принимая во внимание свойство 1° оператора $U_{\zeta z}$, убеждаемся в 4°.

3. Покажем теперь, что пересечение $\mathfrak{H}_0$ всех подпространств $\mathfrak{M}_z$:

$$\mathfrak{H}_0 = \bigcap_{\operatorname{Im} z \neq 0} \mathfrak{M}_z$$

является максимальным инвариантным подпространством оператора A, в котором оператор самосопряжен.

В самом деле, если $\mathfrak{L}$ некоторое инвариантное для A подпространство, т. е. $A\mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{L}$, где $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_A \cap \mathfrak{L}$, и в $\mathfrak{L}$ оператор A самосопряжен, то при любом невещественном z

$$\mathfrak{L} = (A - zI)\mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{M}_z,$$

т. е. $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{H}_0$.

С другой стороны, принадлежность f к $\mathfrak{H}_0$ означает ортогональность f ко всем $\tilde{\mathfrak{N}}_z$ ($\operatorname{Im} z \neq 0$). Но если $\varphi \in \tilde{\mathfrak{N}}_{\zeta}$, то согласно 4°

$$\psi = \varphi + (z - \zeta)\tilde{R}_z\varphi \in \tilde{\mathfrak{N}}_z,$$

и следовательно, из ортогональности f к $\tilde{\mathfrak{N}}_{\zeta}$ и $\tilde{\mathfrak{N}}_z$ вытекает ортогональность f к $\tilde{R}_z\varphi$. Откуда $\tilde{R}_{\bar{z}}f \perp \varphi$, т. е. $\tilde{R}_{\bar{z}}f \perp \mathfrak{N}_{\zeta}$. В силу произвольности ζ и z ($\operatorname{Im} z, \operatorname{Im} \zeta \neq 0$), заключаем, что $\tilde{R}_z f \in \mathfrak{H}_0$, т. е. $\tilde{R}_z\mathfrak{H}_0 \subset \mathfrak{H}_0$ при любом z ($\operatorname{Im} z \neq 0$).

Заметим теперь, что если $f \in \mathfrak{H}_0$, то $f \in \mathfrak{M}_z$ и, следовательно, найдется $g \in \mathfrak{D}_A$ такое, что $(A - zI)g = (\tilde{A} - zI)g = f$. Откуда $\tilde{R}_z f = g$, т. е. $\mathfrak{D}_1 = \tilde{R}_z \mathfrak{H}_0 \subset \mathfrak{D}_A \cap \mathfrak{H}_0$.

Пусть теперь g произвольный элемент из пересечения $\mathfrak{D}_A \cap \mathfrak{H}_0$ и следовательно, $f = (A - zI)g$. Тогда $\tilde{R}_\zeta f = g + (\zeta - z)\tilde{R}_\zeta g \in \mathfrak{D}_A \cap \mathfrak{H}_0$ и следовательно, $f = (A - \zeta I)\tilde{R}_\zeta f \in \mathfrak{M}_\zeta$ $(\operatorname{Im} \zeta \neq 0)$, т. е. $f \in \mathfrak{H}_0$. Таким образом, $\mathfrak{H}_0$ инвариантно по отношению к A, и так как $(A - zI)\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{H}_0$, то A в $\mathfrak{H}_0$ является самосопряженным оператором.

Утверждение доказано.

Его можно было бы доказать без привлечения факта существования у эрмитова оператора самосопряженных расширений $\tilde{A}$ (вообще говоря, с выходом) и использования свойств операторов $\tilde{U}_{\zeta z}$, но так как последние нужны будут нам и в других целях, то мы выбрали этот путь доказательства.

В силу доказанного изучение интересующих нас свойств оператора A сводится к изучению соответствующих свойств оператора A_1 (с тем же индексом дефекта, что у A), индуцируемого оператором A в инвариантном подпространстве $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_0$ — ортогональном дополнении $\mathfrak{H}_0$.

Поэтому без ограничения общности мы будем рассматривать только *простые* эрмитовы операторы, для которых

$$\bigcap_{\operatorname{Im} z \neq 0} \mathfrak{M}_z = 0. \tag{1.5}$$

§ 2. Изображение простого эрмитова оператора с конечными равными дефектными числами

1. Всюду в дальнейшем предполагается, что A *простой замкнутый эрмитов оператор с индексом дефекта* (m, m), где m — некоторое натуральное число.

Последнее условие означает, что при любом невещественном z ортогональное к $\mathfrak{M}_z$ дополнение, которое будет обозначаться через $\mathfrak{N}_{\bar{z}}$, имеет размерность, равную m.

Как известно, $\mathfrak{N}_z$ состоит из всех решений φ уравнения

$$A^* \varphi - z\varphi = 0,$$

где A^* — сопряженный с A оператор.

Пусть A^0 некоторое самосопряженное расширение в $\mathfrak{H}$ оператора A, а $R_z = (A^0 - zI)^{-1}$ соответствующая ему резольвента.

На операторы

$$U_{\zeta z} = I + (z - \zeta) R_z$$

распространяются те свойства, которые мы установили для более общего класса операторов $\tilde{U}_{\zeta z}$ (см. § 1, п. 2).

Используем эти операторы для построения аналитического базиса $\{\varphi_1(z), \ldots, \varphi_m(z)\}$ пространства $\mathfrak{N}_z$.

Для этого, отправляясь от кого-либо (не обязательно ортонормированного) базиса $\varphi_1^0, \ldots, \varphi_m^0$ подпространства $\mathfrak{N}_{z_0}$ (z_0 — произвольно выбранная невещественная точка), положим

$$\varphi_j(z) = \varphi_j^0 + (z - z_0)\ R_z\varphi_j^0 \qquad (j = 1,\ 2, \ldots, m).$$

В силу того, что оператор $U_{\zeta z}$ одно-однозначно и линейно отображает $\mathfrak{N}_\zeta$ на $\mathfrak{N}_z$, векторы $\varphi_1(z), \ldots, \varphi_m(z)$ будут образовывать базис $\mathfrak{N}_z$ при любом невещественном z. Этот базис интересен тем, что его элементы суть голоморфные вектор-функции внутри верхней и нижней полуплоскостей и, вообще, в каждой области, состоящей из регулярных точек резольвенты R_z.

В силу соотношения

$$U_{z_0 z} = U_{\zeta z}\, U_{z_0\zeta}$$

можно утверждать, что для любых двух регулярных точек z, ζ резольвенты R_z

$$\varphi_j(z) = \varphi_j(\zeta) + (z - \zeta)\, R_z\varphi_j(\zeta) \quad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Покажем теперь, что

Простота оператора A влечет сепарабельность пространства $\mathfrak{H}$.

В самом деле, пусть $\{z_j\}_1^\infty$ — последовательность невещественных точек, имеющих одну точку сгущения внутри верхней полуплоскости и одну точку внутри нижней полуплоскости.

В этом случае в силу аналитичности вектор-функций $\varphi_j(z)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ для любого $f \in \mathfrak{H}$ равенства

$$(f, \varphi_1(z_k)) = (f, \varphi_2(z_k)) = \ldots = (f, \varphi_m(z_k)) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

влекут за собой тождества

$$(f, \varphi_1(z)) \equiv (f, \varphi_2(z)) \equiv \ldots \equiv (f, \varphi_m(z)) \equiv 0 \quad (\operatorname{Im} z \neq 0),$$

т. е. принадлежность f ко всем $\mathfrak{M}_z$ $(\operatorname{Im} z \neq 0)$, а значит, равенство $f = 0$.

Таким образом, $\mathfrak{H}$ есть линейная замкнутая оболочка системы векторов $\varphi_j(z_k)$ $(j = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots)$.

Между прочим, доказанное утверждение легко может быть обобщено и на случай операторов с любым индексом дефекта (m, n), где кардинальные числа m, $n \leqslant$ мощности счетного множества.

2. Покажем, что всякий простой эрмитов оператор A с индексом дефекта (m, m) $(m < \infty)$ порождает некоторое представление пространства $\mathfrak{H}$, в котором каждый вектор $f \in \mathfrak{H}$ изображается некоторой аналитической вектор-функцией в m-мерном пространстве.

С этой целью выберем в $\mathfrak{H}$ какое-либо m-мерное пространство $M \subset \mathfrak{H}$ (называемое в дальнейшем модулем представления), которое хотя бы при одном $z = z_+$ из верхней полуплоскости и одном $z = z_-$ нижней полуплоскости в пересечении с $\mathfrak{M}_z$ дает вектор 0.

Условие

$$M \cap \mathfrak{M}_z = (0) \tag{2.1}$$

означает, что в M нет вектора ($\neq 0$), ортогонального к $\mathfrak{N}_{\bar{z}}$. Если $u_1, u_2, \ldots, u_m$ — некоторый базис M, то это условие будет выполнено, если детерминант

$$\Delta_u(z) = |(u_j, \varphi_k(\bar{z}))|_1^m$$

отличен от нуля.

Легко видеть, что модуль M, удовлетворяющий условию (2.1) при $z = z_+ (\operatorname{Im} z_+ > 0)$ и $z = z_- (\operatorname{Im} z_- < 0)$, может быть всегда выбран хотя бы в линейной оболочке векторов $\varphi_1(\bar{z}_+), \ldots, \varphi_m(\bar{z}_+)$; $\varphi_1(\bar{z}_-), \ldots, \varphi_m(\bar{z}_-)$.

Обозначим через S_M счетную совокупность всех невещественных нулей детерминанта $\Delta_u(z)$.

Таким образом, для невещественного z условие (2.1) выполняется в том и только том случае, если $z \,\bar{\in}\, S_M$.

В дальнейшем (см. § 5) будет показано, что детерминант $\Delta_u(z)$ в каждой из двух полуплоскостей $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$, есть функция класса (N) (определение этого класса см. в § 4).

Отсюда будет вытекать, что если каждую точку $\alpha \in S_M$ считать столько раз, какова ее кратность, как нуля $\Delta_u(z)$, то

$$\sum_{\alpha \in S_M} \frac{|\operatorname{Im} \alpha|}{1 + |\alpha|^2} < \infty.$$

Если невещественное $z \,\bar{\in}\, S_M$, т. е. выполняется условие (2.1), то $\mathfrak{H}$ разлагается в прямую сумму $\mathfrak{M}_z$ и M:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{M}_z + M,$$

и каждому $f \in \mathfrak{H}$ будет однозначно отвечать его компонента в M. Эту компоненту мы будем обозначать через $\mathfrak{f}_M(z)$; она, таким образом, определяется двумя условиями:

1°. $\mathfrak{f}_M(z) \in M$.

2°. $f - \mathfrak{f}_M(z) \in \mathfrak{M}_z$.

Если $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ — некоторый базис M, то $\mathfrak{f}_M(z)$ можно представить в виде

$$\mathfrak{f}_M(z) = \sum_{j=1}^{m} f_u^{(j)}(z)\, u_j. \tag{2.2}$$

Условие 2° эквивалентно тому, что

$$(f - \mathfrak{f}_M(z),\ \varphi_k(\bar{z})) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Таким образом, скалярные функции $f_u^{(j)}(z)$ ($j=1, 2,\ldots, m$) определяются из системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{m} f_u^{(j)}(z)\,(u_j,\ \varphi_k(\bar z)) = (f,\ \varphi_k(\bar z)) \qquad (k=1, 2,\ldots, m). \tag{2.3}$$

Из этих уравнений явствует, что для всякого $f \in \mathfrak{H}$ вектор-функция $\mathfrak{f}_M(z)$ есть мероморфная функция внутри каждой из двух полуплоскостей $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$ с полюсами, лежащими в S_M.

Обозначим через $\mathfrak{H}_M$ линейное множество всех вектор-функций $\mathfrak{f}_M(z)$ ($\operatorname{Im} z \neq 0$), отвечающих всевозможным $f \in \mathfrak{H}$.

Очевидно, что отображение $f \to \mathfrak{f}_M(z)$ пространства $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}_M$ линейно: кроме того, оно одно-однозначно.

В самом деле, если $\mathfrak{f}_M(z) \equiv 0$ тождественно, то f входит в пересечение всех $\mathfrak{M}_z$ ($\operatorname{Im} z \neq 0$), т. е. $f = 0$.

Нам осталось немного добавить, чтобы установить следующее предложение.

Теорема 1. *Отображение $f \to \mathfrak{f}_M(z)$ является линейным изоморфизмом между $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}_M$. При этом изоморфизме исходный оператор A переходит в оператор умножения на z. Отображение $f \to \mathfrak{f}_M(z)$ оставляет M неподвижным, т. е. если $f \in M$, то $\mathfrak{f}_M(z) \equiv f$.*

Доказательство. Последнее утверждение теоремы очевидно, и поэтому остается доказать, что если $f \in \mathfrak{D}_A$ и $g = Af$, то

$$\mathfrak{g}_M(z) = z\mathfrak{f}_M(z).$$

Но если $g = Af$, то $h = g - zf = (A - zI) f \in \mathfrak{M}_z$ и, следовательно, $\mathfrak{h}_M(z) = \mathfrak{g}_M(z) - z\mathfrak{f}_M(z) = 0$, что и требовалось доказать.

Отметим еще следующее свойство множества вектор-функций $\mathfrak{H}_M$.

Теорема 2. *Вместе с каждой вектор-функцией $\mathfrak{f}(z)$ в $\mathfrak{H}_M$ содержится и вектор-функция*

$$\frac{\mathfrak{f}(z) - \mathfrak{f}(a)}{z - a}, \tag{2.4}$$

где a — произвольное невещественное число, не являющееся полюсом $\mathfrak{f}(z)$.

Доказательство. Пусть f элемент из $\mathfrak{H}$, соответствующий $\mathfrak{f}(z)$, т. е. $\mathfrak{f}_M(z) = \mathfrak{f}(z)$. Положим $h = f - \mathfrak{f}_M(a)$. Так как отображение $g \to \mathfrak{g}_M(z)$ пространства $\mathfrak{H}$ на M оставляет элементы M неподвижными, то $\mathfrak{h}_M(z) = \mathfrak{f}(z) - \mathfrak{f}_M(a)$. В частности, $\mathfrak{h}_M(a) = 0$. Следовательно, $h \in \mathfrak{M}_a$. Обозначим через g элемент из $\mathfrak{D}_A$ такой, что $(A - aI)g = h$. Тогда $(z - a)\,\mathfrak{g}_M(z) = \mathfrak{h}_M(z)$, и мы убеждаемся, что функция (2.4) совпадает с функцией $\mathfrak{g}_M(z)$.

Нам понадобится следующая лемма, позаимствованная из кандидатской диссертации М. С. Лившица [3б].

Лемма 2.1. *Пусть* $\tau(\lambda) = \dfrac{1}{2}(\tau(\lambda+0) + \tau(\lambda-0))$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ *— некоторая* *функция ограниченной вариации на каждом конечном интервале, такая, что интеграл*

$$F(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau(\lambda)}{\lambda-z}\qquad (\operatorname{Im} z\neq 0) \tag{2.5}$$

абсолютно сходится).*

Пусть, далее, $\varphi(\lambda)$ — *некоторая аналитическая функция в замкнутом интервале* $\Delta=(a,\ b)$.

Обозначим через Δ_ε $(\varepsilon>0)$ *разорванный путь интегрирования, состоящий из направленного отрезка* $(a-i\varepsilon,\ b-i\varepsilon)$ *и антипараллельного отрезка* $(b+i\varepsilon,\ a+i\varepsilon)$.

Тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Delta_\varepsilon}\varphi(z)\,F(z)\,dz=-\int\limits_a^b\varphi(\lambda)\,d\tau(\lambda). \tag{2.6}$$

Эта лемма есть непосредственное обобщение известного правила Стильтьеса обращения интеграла (2.5).

Приведем доказательство этой леммы для случая, когда a и b суть точки непрерывности функции $\tau(\lambda)$ (только этот случай нам и понадобится).

Доказательство. Положим

$$F_1(z)=\int\limits_a^b\frac{d\tau(\lambda)}{\lambda-z},\quad F_2(z)=\Big(\int\limits_{-\infty}^{a}+\int\limits_b^{\infty}\Big)\frac{d\tau(\lambda)}{\lambda-z}.$$

Лемма будет доказана, если мы докажем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Delta_\varepsilon}\varphi(z)\,F_1(z)\,dz=-\int\limits_a^b\varphi(\lambda)\,d\tau(\lambda), \tag{I}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Delta_\varepsilon}\varphi(z)\,F_2(z)\,dz=0. \tag{II}$$

Обозначим через Γ_ε контур, составленный из отрезков $(a-i\varepsilon,\ b-i\varepsilon)$, $(b+i\varepsilon,\ a+i\varepsilon)$ и двух полуокружностей $K_{1\varepsilon}$ и $K_{2\varepsilon}$, имеющих соответственно уравнения:

$$z-a=\varepsilon e^{i\varphi}\left(\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{3\pi}{2}\right)\ \text{ и }\ z-b=\varepsilon e^{i\varphi}\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

---

*) Условие абсолютной сходимости эквивалентно тому, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|\,d\tau(\lambda)\,|}{1+|\lambda|}<\infty.$$

Так как контур Γ_ε охватывает отрезок $\Delta=(a, b)$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_\varepsilon} \varphi(z)\, F_1(z)\, dz = \int\limits_a^b \left\{\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\varphi(z)}{\lambda - z}\, dz\right\} d\tau(\lambda) = -\int\limits_a^b \varphi(\lambda)\, d\tau(\lambda).$$

С другой стороны, имеем

$$\oint\limits_{\Gamma_\varepsilon} \varphi(z)\, F_1(z)\, dz = \int\limits_{\Delta_\varepsilon} \varphi(z)\, F_1(z)\, dz + \int\limits_{K_{1\varepsilon}} \varphi(z)\, F_1(z)\, dz + \int\limits_{K_{2\varepsilon}} \varphi(z)\, F_1(z)\, dz.$$

Поэтому для доказательства (1) остается показать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{K_{1\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{K_{2\varepsilon}} = 0.$$

А так как длина каждой полуокружности K_ε равна $\pi\varepsilon$, то для этого достаточно показать, что

$$|F_1(z)| = \frac{1}{\varepsilon}\, 0(\varepsilon) \text{ при } z \in K_\varepsilon. \tag{2.7}$$

Покажем это, например, для $z \in K_{1\varepsilon}$. Для $z = a + \varepsilon e^{i\varphi}$ $(\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant 3\pi/2)$ будем иметь

$$|F_1(a + \varepsilon e^{i\varphi})| \leqslant \int\limits_a^b \frac{|d\tau(\lambda)|}{\sqrt{\varepsilon^2 + \lambda^2}} = \int\limits_a^{a+(n-1)\varepsilon} + \int\limits_{a+(n-1)\varepsilon}^b \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_a^{a+(n-1)\varepsilon} |d\tau(\lambda)| + \frac{1}{n\varepsilon}\int\limits_{a+(n-1)\varepsilon}^b |d\tau(\lambda)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\left[\int\limits_a^{a+(n-1)\varepsilon} |d\tau(\lambda)| + \frac{1}{n}\int\limits_a^b |d\tau(\lambda)|\right].$$

Так как выражение, стоящее в квадратных скобках, при выборе достаточно большого n и любого положительного $\varepsilon < \frac{1}{n^2}$ становится сколь угодно малым, то (2.7) доказано.

Таким образом, соотношение (I) доказано.

Аналогично доказывается соотношение (II), для чего уже следует, вместо контура Γ_ε, использовать контур Γ'_ε, получающийся из Γ_ε заменой полуокружностей $K_{1\varepsilon}$ и $K_{2\varepsilon}$ их дополнениями $K'_{1\varepsilon}$ и $K'_{2\varepsilon}$ до полных окружностей.

Лемма доказана.

3. Рассматривая $\mathfrak{f}_M(z)$ отдельно в верхней и нижней полуплоскости, мы получаем, вообще говоря, две различные аналитические вектор-функции (верхнюю и нижнюю), которые могут не быть одна аналитическим продолжением другой.

Точку a вещественной оси мы будем называть **регулярной** точкой функции $\mathfrak{f}_M(z)$, если обе соответствующие ей функции (верхняя и нижняя) продолжаемы через некоторый интервал $(a-\delta, a+\delta)$ и при этом переходят одна в другую.

Будем говорить, что вектор-функция $\mathfrak{f}_M(z)$ регулярна на некотором множестве, если каждая точка последнего является регулярной точкой функции $\mathfrak{f}_M(z)$.

Теорема 3. *Если для некоторого $\mathfrak{f} \in \mathfrak{H}$ вектор-функция $\mathfrak{f}_M(z)$ регулярна на замкнутом интервале $\Delta=(a, b)$, то для любой спектральной функции E_λ оператора A справедливо равенство*

$$E_\Delta f = \sum_{k=1}^{m} \int_a^b f_u^{(k)}(\lambda)\, dE_\lambda u_k. \tag{2.8}$$

Доказательство. Как мы уже знаем, спектральную функцию E_λ можно представить в виде

$$E_\lambda = P\tilde{E}_\lambda \qquad (-\infty < \lambda < \infty), \tag{2.9}$$

где $\tilde{E}_\lambda$ — спектральная функция некоторого самосопряженного расширения $\tilde{A}$ оператора A с выходом в $\tilde{\mathfrak{H}} \supset \mathfrak{H}$, а P — оператор проектирования $\tilde{\mathfrak{H}}$ на $\mathfrak{H}$.

Положим

$$\tilde{R}_z = (\tilde{A} - zI)^{-1}, \quad \tilde{\mathfrak{N}}_z = \tilde{\mathfrak{H}} \ominus \mathfrak{M}_z \qquad (\operatorname{Im} z \neq 0).$$

Произвольно зафиксировав невещественное ζ и выбрав произвольный вектор $\psi_0 \in \mathfrak{N}_\zeta \subset \tilde{\mathfrak{N}}_\zeta$, образуем вектор

$$\psi(z) = \psi_0 + (z-\zeta)\tilde{R}_z\psi_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda-\zeta}{\lambda-z}\, d\tilde{E}_\lambda\psi_0 \qquad (\operatorname{Im} z \neq 0). \tag{2.10}$$

Так как оператор $\tilde{U}_{\zeta z} = I + (z-\zeta)\tilde{R}_z$ отображает $\tilde{\mathfrak{N}}_\zeta$ на $\tilde{\mathfrak{N}}_z$ и, следовательно, $\mathfrak{N}_\zeta$ в $\tilde{\mathfrak{N}}_z$, то $\psi(\bar{z}) \perp \mathfrak{M}_z$ при любом z ($\operatorname{Im} z \neq 0$). Откуда для любого $f \in \mathfrak{H}$

$$(f - \mathfrak{f}_M(z),\ \psi(\bar{z})) = 0 \qquad (\operatorname{Im} z \neq 0).$$

Таким образом, для любого $f \in \mathfrak{H}$:

$$(f, \psi(\bar{z})) = \sum_{k=1}^{m} f_u^{(k)}(z)\,(u_k,\ \psi(\bar{z})) \qquad (\operatorname{Im} z \neq 0). \tag{2.11}$$

В силу (2.9) и (2.10)

$$(f, \psi(\bar{z})) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda-\zeta}{\lambda-z}\, d(\tilde{E}_\lambda f, \psi_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda-\zeta}{\lambda-z}\, d(E_\lambda f, \psi_0).$$

Аналогичным образом выражаются и скалярные произведения $(u_k, \psi(\bar{z}))$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$.

Предположим сперва, что точки a и b суть точки „непрерывности“ спектральной функции E_λ. Применяя тогда лемму М.С. Лившица к случаям, когда

$$d\tau(\lambda) = (\lambda - \zeta)\, d(E_\lambda f, \psi_0), \quad \varphi(\lambda) = (\lambda - \zeta)^{-1}$$

и

$$d\tau(\lambda) = (\lambda - \zeta)\, d(E_\lambda u_k, \psi_0), \quad \varphi(\lambda) = f_u^{(k)}(\lambda)(\lambda - \zeta)^{-1} \quad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

найдем, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Delta_\varepsilon} \frac{(f, \psi(\bar{z}))}{z - \zeta}\, dz = \int_a^b d(E_\lambda f, \psi_0) = (E_\Delta f, \psi_0)$$

и соответственно

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Delta_\varepsilon} \frac{f_u^{(k)}(z)}{z - \zeta} (u_k, \psi(\bar{z}))\, dz = \int_a^b f_u^{(k)}(\lambda)\, d(E_\lambda u_k, \psi_0) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Таким образом, согласно (2.11)

$$(E_\Delta f, \psi_0) = \sum_{k=1}^{m} \int_a^b f_u^{(k)}(z)\, d(E_\lambda u, \psi_0). \tag{2.12}$$

Здесь ψ_0 — произвольный вектор из $\mathfrak{N}_\zeta$, а ζ произвольное невещественное число. Так как линейная замкнутая оболочка всех $\mathfrak{N}_\zeta$ $(\operatorname{Im} \zeta \neq 0)$ совпадает с $\mathfrak{H}$ (A — простой оператор), то (2.12) влечет (2.8).

Таким образом, равенство (2.8) доказано для случая, когда a и b суть точки непрерывности спектральной функции E_λ. В общем случае всегда найдется сколь угодно малое $\varepsilon > 0$ такое, что $a + \varepsilon$ и $b + \varepsilon$ будут точками непрерывности функции E_λ и, следовательно, (2.8) будет иметь место с заменой a и b соответственно на $a + \varepsilon$ и $b + \varepsilon$.

Переходя к пределу по подходяще выбранным $\varepsilon_n \to 0$, получим (2.8) и для общего случая.

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть E_λ — некоторая спектральная функция оператора A, а*

$$\tau_{jk}(\lambda) = (E_\lambda u_j, u_k) \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, m).$$

Если для некоторых $g, f \in \mathfrak{H}$ вектор-функции $\mathfrak{g}_M(z)$ и $\mathfrak{f}_M(z)$ регулярны на замкнутом интервале $\Delta = (a, b)$, то

$$(E_\Delta f, g) = \sum_{j, k=1}^{m} \int_a^b f^{(j)}(\lambda)\, \overline{g^{(k)}(\lambda)}\, d\tau_{jk}(\lambda). \tag{2.13}$$

В самом деле, согласно (2.8)

$$(E_\Delta f, g) = \sum_{j=1}^{m} \int_a^b f^{(j)}(\lambda)\, d(E_\lambda u_j, g) = \sum_{j=1}^{m} \int_a^b f^{(j)}(\lambda)\, d(u_j, E_\lambda g). \tag{2.14}$$

С другой стороны, записывая (2.8) применительно к интервалу $\Delta_\lambda=(a, \lambda)$ и $f=g$, найдем

$$(u_j, E_\lambda g)-(u_j, E_a g)=\sum_{k=1}^{m}\int_a^\lambda \overline{g^{(k)}(\lambda)}\, d(u_j, E_\lambda u_k) =$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\int_a^\lambda \overline{g^{(k)}(\lambda)}\, d\tau_{jk}(\lambda). \tag{2.15}$$

Сопоставление (2.14) и (2.15) дает (2.13).

§ 3. Квазирегулярный базис

1. Ограниченную эрмитову матрицу-функцию $T(\lambda)=\|\tau_{jk}(\lambda)\|_1^m$ будем называть **матрицей распределения**, если:

1) для любых комплексных $\xi_1, \ldots, \xi_m$ форма

$$\sum_{j,\,k=1}^{m}\tau_{jk}(\lambda)\,\xi_j\overline{\xi}_k$$

есть неубывающая функция λ,

2) $T(\lambda-0)=T(\lambda) \qquad (-\infty<\lambda<\infty)$

и

3) $T(-\infty)=\lim\limits_{\lambda\to-\infty}T(\lambda)=0$.

Заметим, что из свойства 1) вытекает, что каждая из функций $\tau_{jk}(\lambda)$ $(j, k=1, 2, \ldots, m)$ имеет ограниченную вариацию и, следовательно пределы $\tau_{jk}(\lambda-0)$ и $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\tau_{jk}(\lambda)$ $(j, k=1, 2, \ldots, m)$ всегда существуют.

Мы используем результаты И. Каца*) для построения гильбертова пространства, определяемого матрицей распределения $T(\lambda)$.

Положим

$$\sigma(\lambda)=\sum_{j=1}^{m}\tau_{jj}(\lambda) \qquad (-\infty<\lambda<\infty).$$

Из 1) вытекает, что для приращений $\Delta\tau_{jk}$ на любом интервале $(\lambda, \lambda+\Delta\lambda)$ выполняется неравенство

$$|\Delta\tau_{jk}|^2\leqslant\Delta\tau_{jj}\Delta\tau_{kk} \qquad (j, k=1, 2, \ldots, m)$$

и, следовательно,

$$|\Delta\tau_{jk}|\leqslant\Delta\sigma \qquad (j, k=1, 2, \ldots, m).$$

Поэтому найдутся σ-измеримые и σ-интегрируемые (суммируемые) функции $\varrho_{jk}(\lambda)$ $(j, k=1, 2, \ldots, m)$ такие, что

$$\tau_{jk}(\lambda)-\tau_{jk}(0)=\int_0^\lambda \varrho_{jk}(\mu)\,d\sigma(\mu) \qquad (-\infty<\lambda<\infty;\ j, k=1, 2, \ldots, m),$$

---

*) И. Кац, О гильбертовых пространствах, порождаемых монотонными эрмитовыми матрицами-функциями (1949) (статья передана в печать).

при этом без ограничения общности можно предполагать, что все $\varrho_{jk}(\lambda) = 0$ $(j, k = 1, 2, \ldots, m)$ в каждой точке λ, в которой хотя бы одна из производных $d\sigma_{jk}/d\sigma$ не существует. Тогда в силу **1)** для любых комплексных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$

$$\sum_{j,k=1}^{m} \varrho_{jk}(\lambda)\xi_j\overline{\xi}_k \geqslant 0 \qquad (-\infty < \lambda < \infty). \tag{3.1}$$

Для любых двух вектор-функций $\mathfrak{f}(\lambda) = (f_1(\lambda), \ldots, f_m(\lambda))$ и $\mathfrak{g}(\lambda) = (g_1(\lambda), \ldots, g_m(\lambda))$ аргумента λ $(-\infty < \lambda < \infty)$ положим

$$\varrho(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}; \lambda) = \sum \varrho_{jk}(\lambda) f_j(\lambda)\overline{g_k(\lambda)}.$$

В силу (3.1)

$$\varrho(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}; \lambda) \geqslant 0 \qquad (-\infty < \lambda < \infty) \tag{3.2}$$

и, следовательно,

$$|\varrho(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}; \lambda)| \leqslant \varrho^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}; \lambda)\varrho^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}; \lambda) \qquad (-\infty < \lambda < \infty). \tag{3.3}$$

Обозначим через $\mathfrak{L}_T$ совокупность всех σ-измеримых вектор-функций $\mathfrak{f}(\lambda) = (f_1(\lambda), \ldots, f_m(\lambda))$ *), таких, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varrho(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}; \lambda)\, d\sigma(\lambda) < \infty.$$

В силу неравенства (3.3) для всяких двух вектор-функций $\mathfrak{f}(\lambda)$ и $\mathfrak{g}(\lambda)$ из $\mathfrak{L}_T$ будет иметь смысл выражение

$$(\mathfrak{f}, \mathfrak{g})_T = \int_{-\infty}^{\infty} \varrho(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}; \lambda)\, d\sigma(\lambda),$$

которое мы и назовем скалярным произведением элементов $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$.

Это название оправдывается тем, что, как легко показывается, $\mathfrak{L}_T$ есть линейное множество вектор-функций и выражение $(\mathfrak{f}, \mathfrak{g})_T$ в нем обладает всеми свойствами обычного скалярного произведения за исключением, может быть, того, что в неравенстве

$$(\mathfrak{f}, \mathfrak{f})_T \geqslant 0$$

знак = возможен и при $\mathfrak{f} \neq 0$.

Основной результат И. Каца гласит, что отождествление в $\mathfrak{L}_T$ всяких двух элементов $\mathfrak{f}_1$ и $\mathfrak{f}_2$ таких, что $(\mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_2)_T = 0$ обращает $\mathfrak{L}_T$ в полное гильбертово пространство.

Для всяких двух элементов $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$ из $\mathfrak{L}_T$ условимся чисто символически писать

$$(\mathfrak{f}, \mathfrak{g})_T = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,k=1}^{m} f_j(\lambda)\overline{g_k(\lambda)}\, d\tau_{jk}(\lambda).$$

---

*) Вектор-функция $\mathfrak{f}(\lambda) = (f_1(\lambda), \ldots, f_m(\lambda))$ называется σ-измеримой, если все ее координаты $f_k(\lambda)$ $(k=0, 1, \ldots, m)$ суть σ-измеримые функции.

В оправдание этой символической записи заметим, что не для всякой пары $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \in \mathfrak{L}_T$ будут существовать интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_j(\lambda) \overline{g_k(\lambda)}\, d\tau_{jk}(\lambda) \qquad (j, k=1, 2, \ldots, m). \tag{3.4}$$

Однако, если для некоторых σ-измеримых вектор-функций существуют и абсолютно сходятся несобственные интегралы (3.4), то $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \in \mathfrak{L}_T$ и сумма этих интегралов даст $(\mathfrak{f}, \mathfrak{g})_T$.

Это утверждение вытекает еще из такой характеристики пространства $\mathfrak{L}_T$, доказанной И. Кацом.

Если $\mathfrak{f}(\lambda) = (f_1(\lambda), \ldots, f_m(\lambda))$ — некоторая вектор-функция, а $N > 0$, то через $\mathfrak{f}_N(\lambda) = (f_{N1}(\lambda), \ldots, f_{Nm}(\lambda))$ обозначим вектор-функцию, определяемую условиями: $\mathfrak{f}_N(\lambda) = \mathfrak{f}(\lambda)$ в каждой точке λ, где все $|f_j(\lambda)| \leqslant N$ $(j=1, 2, \ldots, m)$ и $\mathfrak{f}_N(\lambda) = (0, 0, \ldots, 0)$ в каждой точке λ, где хотя бы одна из функций $f_j(\lambda)$ имеет модуль $> N$.

Пусть теперь $\mathfrak{f}(\lambda)$ и $\mathfrak{g}(\lambda)$ — две измеримые вектор-функции λ $(-\infty < \lambda < \infty)$. Положим

$$(\mathfrak{f}, \mathfrak{g})_{T;\,N} = \sum_{j,\,k=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} f_{N_j}(\lambda) \overline{g_{N_k}(\lambda)}\, d\tau_{jk}.$$

Оказывается, для любой σ-измеримой вектор-функции $\mathfrak{f}(\lambda)$ существует конечный или бесконечный неотрицательный предел

$$\lim_{N\to\infty} (\mathfrak{f}, \mathfrak{f})_{T;\,N}.$$

Если этот предел конечен, то в этом и только в этом случае $f \in \mathfrak{L}_T$.

Кроме того, для любых $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \in \mathfrak{L}_T$

$$(\mathfrak{f}, \mathfrak{g})_T = \lim_{N\to\infty} (\mathfrak{f}, \mathfrak{g})_{T;\,N}. \tag{3.5}$$

Сделаем еще такое замечание, которое нам в дальнейшем понадобится. Если каждая координата $f_j(\lambda)$ $(j=1, 2, \ldots, m)$ вектор-функции $\mathfrak{f}(\lambda) \in \mathfrak{L}_T$ почти всюду (в смысле соответствующей ей τ_{jj}-меры) равна нулю, то $\mathfrak{f}(\lambda)$, как элемент $\mathfrak{L}_T$, эквивалентен нулю.

В самом деле, если $f_j(\lambda)$ $(j=1, 2, \ldots, m)$ почти всюду в смысле соответствующей τ_{jj}-меры $(j=1, 2, \ldots, m)$ равно нулю, то это же подавно имеет место и для $f_{N_j}(\lambda)$ $(j=1, 2, \ldots, m)$. Поэтому вектор-функции $(f_{N_1}, 0, 0, \ldots, 0)$, $(0, f_{N_2}, 0, \ldots, 0)$ и т. д. $(0, 0, \ldots, f_{N_m})$ эквивалентны нулю в $\mathfrak{L}_T$, ибо квадрат нормы j-й из этих вектор-функций равен

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_{N_j}(\lambda)|^2\, d\tau_{jj}(\lambda) = 0 \qquad (j=1, 2, \ldots, m).$$

Следовательно, и вектор-функция $\mathfrak{f}_N(\lambda)$, равная сумме этих вектор-функций, равна нулю. Но тогда и $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}) = \lim_{N\to\infty} (\mathfrak{f}_N, \mathfrak{f}_N) = 0$, что и требовалось доказать.

С пространством $\mathfrak{L}_T$ мы будем ассоциировать действующий в нем самосопряженный оператор $\mathcal{A} = \mathcal{A}_T$ (оператор умножения на аргумент). Его областью определения будет множество $\mathfrak{D}_T$ всех $\mathfrak{f} \in \mathfrak{L}_T$, для которых также $\lambda\mathfrak{f} \in \mathfrak{L}_T$ и $\mathcal{A}\mathfrak{f} = \lambda\mathfrak{f}$. Легко видеть, что оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен, нетрудно также показать, что его спектр имеет кратность $\leqslant m$.

Обозначим через E_μ $(-\infty < \mu < \infty)$ спектральную функцию оператора $\mathcal{A}$. Ее действие на элементы $\mathfrak{f} \in \mathfrak{L}_T$ заключается в следующем: если $\mathfrak{g} = E_\mu \mathfrak{f}$, то $\mathfrak{g}(\lambda) = \mathfrak{f}(\lambda)$ при $\lambda \leqslant \mu$ и $\mathfrak{g}(\lambda) = 0$ при $\lambda \geqslant \mu$.

2. Возвращаясь к изучению отображения $f \to \mathfrak{f}_M(z)$, порождаемого эрмитовым оператором A, обозначим через $\mathfrak{R}$ множество тех $f \in \mathfrak{H}$, которым отвечают вектор-функции $\mathfrak{f}_M(z)$, регулярные на всей вещественной оси.

Согласно следствию теоремы 4 для любых $f, g \in \mathfrak{R}$

$$(f, g) = \sum_{j,k=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} f_u^{(j)}(\lambda)\, \overline{g_u^{(k)}(\lambda)}\, d\tau_{jk}(\lambda),$$

где

$$\tau_{jk}(\lambda) = (E_\lambda u_j, u_k), \quad (-\infty < \lambda < \infty), \quad (j, k = 1, 2, \ldots, m), \tag{3.4'}$$

а E_λ — какая-либо спектральная функция оператора A.

Обозначим через V_u множество всех матриц-функций $T(\lambda) = \| \tau_{jk}(\lambda) \|_1^m$ с элементами, получаемыми по формулам (3.4'). Очевидно, каждая матрица $T(\lambda) \in V_u$ удовлетворяет условиям 1), 2), 3), указанным в предыдущей рубрике.

Мы будем говорить, что базис $\{u_1, \ldots, u_m\}$ к в а з и р е г у л я р е н, если множество $\mathfrak{R}$ плотно в $\mathfrak{H}$.

Для квазирегулярного базиса $\{u_1, \ldots, u_m\}$ имеет место

Т е о р е м а 4. *Множество V_u состоит из тех и только тех ограниченных матриц-функций $T(\lambda) = \| \tau_{jk}(\lambda) \|_1^m$, для которых*

$$(f, g) = \sum_{j,k=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} f_u^{(j)}(\lambda)\, \overline{g_u^{(k)}(\lambda)}\, d\tau_{jk}(\lambda) \tag{3.5'}$$

при любых $f, g \in \mathfrak{R}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость условия была пояснена выше. Докажем его достаточность.

Итак, пусть $T_{(\lambda)}$ — некоторая ограниченная неубывающая матрица-функция, для которой имеет место (3.5') при любых $f, g \in \mathfrak{R}$.

Образуем пространство $\mathfrak{L}_T$.

Пусть z_0 — какая-либо невещественная u-регулярная точка. Элемент $f \in \mathfrak{H}$ принадлежит $\mathfrak{M}_{z_0}$ в том и только том случае, если $\mathfrak{f}_M(z_0) = 0$. Всякому элементу $f \in \mathfrak{M}_{z_0}$ отвечает элемент $g \in \mathfrak{D}_A$ такой, что $(A - z_0 I) g = f$ и, следовательно,

$$\mathfrak{g}_M(z) = \frac{\mathfrak{f}_M(z)}{z - z_0}.$$

Последнее соотношение показывает, что если $f \in \mathfrak{R}$, то также $g \in \mathfrak{R}$.

Обозначим через $\mathfrak{D}_0$ пересечение $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{R}$, а через A_0 оператор, имеющий $\mathfrak{D}_0$ своей областью определения и совпадающий на $\mathfrak{D}_0$ с A. Покажем, что замыкание $\bar{A}_0$ оператора A_0 дает A. При замыкании оператора A_0 замыкается и множество $\mathfrak{R}_0 = (A_0 - z_0 I)\mathfrak{D}_0 \subset \mathfrak{M}_{z_0}$. Поэтому равенство $\bar{A}_0 = A$ будет доказано, если мы докажем, что замыкание множества $\mathfrak{R}_0$ совпадает с $\mathfrak{M}_{z_0}$, а это эквивалентно тому, что ортогональное дополнение к $\mathfrak{R}_0$ имеет m измерений. Допустим, что последнее не выполняется. Тогда найдется ортонормированная система векторов $f_1, \ldots, f_{m+1}$, ортогональных к $\mathfrak{R}_0$, и любой вектор f вида

$$f = \sum_1^{m+1} c_j f_j, \quad \left(\sum_1^{m+1} |c_j|^2 = 1\right)$$

будет удален от $\mathfrak{R}_0$ на расстояние, равное 1. Так как $\mathfrak{R}$ по условию плотно в $\mathfrak{H}$, то можно будет выбрать в $\mathfrak{R}$ векторы f_j' $(j = 1, 2, \ldots, m)$ так, чтобы $|f_j - f_j'| < 1/\sqrt{(2m+1)}$, и тогда любой вектор

$$f' = \sum_1^{m+1} c_j f_j', \qquad \left(\sum_1^{m+1} |c_j|^2 = 1\right)$$

будет удален от $\mathfrak{R}_0$ на расстояние $> {}^1/_2$.

С другой стороны, константы c_j $(j = 1, 2, \ldots, m+1)$ могут быть всегда выбраны так, что

$$\mathfrak{f}_M'(z_0) = \sum_1^{m+1} c_j \mathfrak{f}_{jM}'(z_0) = 0,$$

и, следовательно, $f' \in \mathfrak{R}_0$. Мы пришли к противоречию. Итак, $\bar{A}_0 = A$.

Пусть теперь $T(\lambda)$ — какая-либо ограниченная неубывающая матрица-функция, для которой имеет место (3.5′) при любых $f, g \in \mathfrak{R}$.

Для доказательства того, что $T(\lambda) \in V_u$, образуем $\mathfrak{L}_T$. В силу (3.5′) отображение Φ: $f \to (f_u^{(1)}(\lambda), \ldots, f_u^{(n)}(\lambda))$, определенное на всех элементах $f \in \mathfrak{R}$, отображает унитарно*) $\mathfrak{R}$ в некоторую часть $\mathfrak{L}_T$, и так как $\bar{\mathfrak{R}} = \mathfrak{H}$, то его можно расширить с сохранением унитарности на все $\mathfrak{H}$. При отображении Φ оператор A_0 переходит в суженный оператор умножения на λ, определенный на $\Phi\mathfrak{D}_0$. Отождествляя f с Φf и, следовательно, рассматривая $\mathfrak{H}$ как часть $\mathfrak{L}_T$, мы сможем утверждать, что самосопряженный оператор $\varLambda$ (оператор умножения на аргумент) есть расширение оператора A_0 и, следовательно, оператора $A = \bar{A}_0$.

Используем теперь спектральную функцию $\mathbf{E}_\lambda$ оператора $\varLambda$; если P — оператор проектирования $\mathfrak{L}_T$ на $\mathfrak{H}$, то $E_\lambda = P\mathbf{E}_\lambda$ будет обобщенной спектральной функцией оператора A и для нее (см. п. 1)

$$(E_\lambda u_j, u_k) = (P\mathbf{E}_\lambda u_j, u_k) = (\mathbf{E}_\lambda u_j, u_k) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\lambda} d\tau_{jk}(u) = \tau_{jk}(\lambda) \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, m; \quad -\infty < \lambda < \infty),$$

*) То есть с сохранением скалярного произведения.

т. е. матрица-функция $T(\lambda)$ порождается спектральной функцией E_λ оператора A.

Теорема доказана.

Матрицу распределения $T(\lambda) \in V_u$ условимся называть **канонической**, если она порождается по формуле (3.4′) некоторой **ортогональной** спектральной функцией E_λ оператора A.

Имеет место

Теорема 5. *Пусть $T(\lambda)$ — некоторая матрица-функция из V_u. Отображение $f \to (f^{(1)}(\lambda), \ldots, f^{(m)}(\lambda))$ множества $\mathfrak{R}$ в $\mathfrak{L}_T$ порождает унитарное отображение Φ всего $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{L}_T$. Это отображение будет изоморфизмом между $\mathfrak{H}$ и всем $\mathfrak{L}_T$ в том и только том случае, когда $T(\lambda)$ — каноническая матрица распределения.*

Доказательство. Условие необходимо. В самом деле, если $\Phi\mathfrak{H} = \mathfrak{L}_T$, то, отождествляя f и Φf, мы сможем рассматривать оператор $\varLambda$, как самосопряженное расширение оператора A в $\mathfrak{H}$, а $E_\lambda = \boldsymbol{E}_\lambda$, как ортогональную спектральную функцию оператора A в (данном случае $P = I$) и, следовательно, матрица распределения $T(\lambda)$ будет канонической.

Сложней доказывается достаточность условия.

Итак, пусть элементы $T(\lambda) = \|\tau_{jk}(\lambda)\|$ образованы по формулам

$$\tau_{jk}(\lambda) = (E_\lambda u_j, u_k) \quad (j, k = 1, 2, \ldots, m),$$

где E_λ — спектральная функция некоторого самосопряженного расширения $\tilde{A}$ оператора A в $\mathfrak{H}$.

Нам надлежит показать, что множество $\Phi\mathfrak{R}$ плотно в $\mathfrak{L}_T$, ибо в этом и только этом случае $\Phi\mathfrak{H} = \mathfrak{L}_T$. Если $f \in \mathfrak{H}$, то через $\mathfrak{f}(\lambda)$ (без индекса M) будем обозначать вектор-функцию Φf.

Введем в рассмотрение резольвенту R_z ($\operatorname{Im} z \neq 0$) оператора $\tilde{A}: R_z = (\tilde{A} - zI)^{-1}$.

На основании (2.8) для любых $f, g \in \mathfrak{R}$:

$$(R_z f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(E_\lambda f, g)}{\lambda - z} = \sum_{j,k=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_u^{(j)}(\lambda)\overline{g_u^{(k)}(\lambda)}}{\lambda - z}\, d\tau_{jk}(\lambda). \tag{3.6}$$

А так как при невещественных z и ζ

$$R_z = R_\zeta + (z - \zeta) R_\zeta R_z,$$

то из (3.6) вытекает, что

$$(R_z f, R_z f) = (R_{\bar z} R_z f, f) = \frac{1}{z - \bar z}[(R_z f, f) - (R_{\bar z} f, f)] =$$

$$= \sum_{j,k=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^{(j)}(\lambda)\overline{g^{(k)}(\lambda)}}{|\lambda - z|^2}\, d\tau_{jk}(\lambda). \tag{3.7}$$

Соотношение (3.6) и (3.7) сокращенно можно записать в виде:

$$(R_z f, g) = \left(\frac{\mathfrak{f}(\lambda)}{\lambda - z}, \mathfrak{g}(\lambda) \right)_T, \ (R_z f, R_z f) = \left(\frac{\mathfrak{f}(\lambda)}{\lambda - z}, \frac{\mathfrak{f}(\lambda)}{\lambda - z} \right)_T^{(f, g \in \mathfrak{R})}.$$

Из них вытекает, что*)

$$\| R_z f - g \|^2 = \left\| \frac{\mathfrak{f}(\lambda)}{\lambda - z} - \mathfrak{g}(\lambda) \right\|_T^2 \qquad (f, g \in \mathfrak{R}). \tag{3.8}$$

Так как $\mathfrak{R}$ плотно в $\mathfrak{H}$, то для любого $f \in \mathfrak{R}$, невещественного z и $\varepsilon > 0$ найдется такое $g \in \mathfrak{R}$, что $\| R_z f - g \| < \varepsilon$. В силу (3.8) это означает, что замыкание множества $\Phi\mathfrak{R}$ в $\mathfrak{L}_T$ содержат все вектор-функции вида $\frac{\mathfrak{f}(\lambda)}{\lambda - z}$, где $\mathfrak{f}(\lambda) = \Phi f (f \in \mathfrak{H})$.

Пусть теперь $\mathfrak{h}(\lambda) = (h_1(\lambda), \ldots, h_m(\lambda))$ вектор-функция из $\mathfrak{L}_T$, ортогональная к $\Phi\mathfrak{R}$. Наша теорема будет доказана, если мы докажем, что $\mathfrak{h}(\lambda)$ эквивалентно нулю. Из ортогональности $\mathfrak{h}(\lambda)$ к $\Phi\mathfrak{R}$ вытекает ортогональность $\mathfrak{h}(\lambda)$ и любой вектор-функции $\frac{\mathfrak{f}(\lambda)}{\lambda - z}$, где $\mathfrak{f}(\lambda) = \Phi f (f \in \mathfrak{R})$. Таким образом,

$$\left(\frac{\mathfrak{f}(\lambda)}{\lambda - z}, \mathfrak{h}(\lambda) \right)_T = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varrho(\mathfrak{f}, \mathfrak{h})}{\lambda - z} \, d\sigma(\lambda) = 0 \quad (\operatorname{Im} z \neq 0).$$

Отсюда с помощью известной формулы обращения Стильтьеса находим, что при любых $\lambda' < \lambda''$

$$\int_{\lambda'}^{\lambda''} \varrho(\mathfrak{f}, \mathfrak{h}) \, d\sigma(\lambda) = 0.$$

Полагая здесь $\mathfrak{f} = u_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$, найдем, что

$$\int_{\lambda'}^{\lambda''} \overline{h_j(\lambda)} \, d\tau_{jj}(\lambda) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Отсюда $h_j(\lambda)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ почти всюду (в смысле τ_{jj}-меры) равно нулю. А это, как было показано в п. 1, влечет эквивалентность $\mathfrak{h}$ нулю в $\mathfrak{L}_T$.

Теорема доказана.

§ 4. Вспомогательные предложения теории функций

1. Пусть G — некоторая односвязная область комплексно кости. Условимся говорить, что функция $f(z)$ $(z \in G)$ есть ф класса (N) в G, если она голоморфна внутри G и $\overset{+}{\log} |f(z)|$ имс гармоническую мажоранту. Последнее условие означает, что на по крайней мере, одна гармоническая в G функция $u(z)$, для к

$$\overset{+}{\log} f(z) \leqslant u(z) \quad (z \in G).$$

---

*) Через $\|\mathfrak{f}\|_T$ мы обозначаем $\sqrt{(\mathfrak{f}, \mathfrak{f})_T}$.

Очевидно, что при конформном отображении области G на некоторую область G_1 всякая функция класса (N) в G перейдет в некоторую функцию класса (N) в G_1.

Как показал Р. Неванлинна [5] (см. также [6а, б]), для того чтобы некоторая функция $F(z)$ $(|z|<1)$ была класса (N) в единичном круге, необходимо и достаточно, чтобы она допускала следующее представление:

$$F(z)=\varepsilon B(z)\exp\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\omega(t)\right) \qquad (|z|<1),$$

где $|\varepsilon|=1$, $\omega(t)$ $(-\pi\leqslant t\leqslant\pi)$ — некоторая вещественная функция ограниченной вариации, а $B(z)$ — функция Бляшке, т. е. конечное или бесконечное сходящееся произведение вида

$$B(z)=z^{\nu}\prod\frac{\alpha_k-z}{1-\bar\alpha_k z}\,\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k} \qquad (|z|<1), \tag{4.1}$$

где ν — целое число $\geqslant 0$, а $|\alpha_k|<1$ $\quad (k=1, 2\ldots)$.

Как известно, условием сходимости бесконечного произведения (4.1) является неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\alpha_k|)<\infty. \tag{4.2}$$

Другим условием того, чтобы голоморфная функция $F(z)$ $(|z|<1)$ была класса (N), в единичном круге является неравенство

$$\sup_{0\leqslant r<1}\int_0^{2\pi}\overset{+}{\log}|F(re^{i\varphi})|\,d\varphi<\infty. \tag{4.3}$$

Из приведенных характеристических свойств функций класса (N) в единичном круге следует, что они образуют линейное кольцо; при этом, если две функции входят в это кольцо и их частное голоморфно в G, то и это частное входит в кольцо.

В силу известной формулы Иенсена (4.3) влечет неравенство:

$$\sup_{0\leqslant r<1}\int_0^{2\pi}|\log|F(re^{i\varphi})||\,d\varphi<\infty,$$

а следовательно, и неравенство

$$\mathfrak{J}(F)=\int_0^1\int_0^{2\pi}\log|F(re^{i\varphi})|\,r\,d\varphi\,dr<\infty. \tag{4.4}$$

Стоящий слева интеграл представляет собой интеграл от $|\log|F(z)||$, распространенный по площади единичного круга.

2. Сформулируем в качестве лемм некоторые простые следствия изложенных фактов.

Лемма 4.1. *Если функция $f(z)$ принадлежит классу (N) в верхней полуплоскости* $\operatorname{Im} z > 0$, *то*

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{|\log|f(z)||}{(1+|z|)^4}\,dx\,dy < \infty. \tag{4.5}$$

Доказательство. Функции $f(z)$ отвечает функция $F(\zeta)$ ($|\zeta|<1$) класса (N) в единичном круге, получающаяся при помощи преобразования

$$f(z)=F(\zeta), \quad \text{где } \zeta=\frac{z-i}{z+i}. \tag{4.6}$$

Записав для функции $F(\zeta)$ неравенство (4.4) и проделав в нем преобразование (4.6), найдем, что

$$\mathfrak{J}(F)=\frac{1}{4}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{|\log|f(z)||}{|z+i|^4}\,dx\,dy < \infty.$$

Так как $|z+i| \leqslant 1+|z|$, то отсюда заключаем (4.5).

3. В дальнейшем нам часто придется пользоваться тем фактом, (см. [4, 6б]), что всякий интеграл $J(z)$ вида

$$J(z)=\int_{-\infty}^\infty \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda-z} \qquad (\operatorname{Im} z \neq 0),$$

а значит, и интеграл

$$f(z)=\int_{-\infty}^\infty \frac{\lambda-i}{\lambda-z}\,d\sigma(\lambda) \qquad (\operatorname{Im} z \neq 0), \tag{4.7}$$

где $\sigma(\lambda)$ $(-\infty<\lambda<\infty)$ — функция ограниченной вариации на всей оси, есть функция класса (N) в каждой из двух полуплоскостей $\operatorname{Im} z>0$ и $\operatorname{Im} z<0$.

Нам понадобится также

Лемма 4.2. *Если функция $f(z)$ допускает представление* (4.7), *то*

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{\overset{+}{\log}|f(z)|}{(1+|z|)^4}\,dx\,dy \leqslant \overset{+}{\log}\operatorname{var}\sigma + 2. \tag{4.8}$$

Доказательство. Если в интеграле (4.7) перейти к новым переменным

$$\zeta=\frac{z-i}{z+i}, \quad e^{it}=\frac{\lambda-i}{\lambda+i},$$

то мы найдем, что

$$f(z)=F(\zeta)=\zeta\int^{\pi}\frac{1-e^{it}}{e^{it}-\zeta}\,d\omega(t),$$

где $\omega(t)=\sigma(\lambda)$.

Таким образом

$$|F(\zeta)| \leqslant \frac{2|\zeta|}{1-|\zeta|}\operatorname{var}\omega < \frac{2 \operatorname{var}\sigma}{1-|\zeta|} \qquad (|\zeta|<1)$$

и, следовательно,

$$\overset{+}{\log}|F(z)| < \overset{+}{\log}\operatorname{var}\sigma + \log 2 + \log(1-|\zeta|).$$

Откуда после простых вычислений получаем

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\overset{+}{\log}|F(re^{i\varphi})|\,r\,d\varphi\,dr \leqslant \pi\overset{+}{\log}\operatorname{var}\sigma + \pi\left(\log 2+\frac{3}{4}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \pi\overset{+}{\log}\operatorname{var}\sigma + 2\pi.$$

Переходя в двойном интеграле от переменной $\zeta = re^{i\varphi}$ к переменной z, придем к неравенству (4.8), в котором вместо $(1+|z|)^4$ будет стоять $|z+i|^4 \leqslant (1+|z|)^4$.

4. Важную роль в дальнейшем будет играть следующая теорема, доказанная автором в другом месте [1и].

Теорема 6. *Для того чтобы целая функция $f(z)$ была класса (N) в каждой из полуплоскостей* $\operatorname{Im} z>0$ *и* $\operatorname{Im} z<0$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия:*

1°. $$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\overset{+}{\log}|f(x)|}{1+x^2}\,dx < \infty;$$

2°. *Функция $f(z)$ — типа не выше экспоненциального, т. е.*

$$\varlimsup_{|z|\to\infty}\frac{\log|f(z)|}{|z|} < \infty. \tag{4.9}$$

Условия 1°, 2° для целой функции имеют следствием ряд интересных свойств.

В частности, напомним, что если для целой функции $f(z)$ выполняется условие (4.9), то, как показал Г. Полиа (см. [7], [10]), индикатрисса роста f

$$h(\varphi) = \varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log|f(re^{i\varphi})|}{r} \qquad (0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi) \tag{4.10}$$

является опорной функцией к некоторому ограниченному выпуклому замкнутому множеству K, граница которого называется индикаторной диаграммой функции $f(z)$

$$h(\varphi) = \max_{x+iy\in K}(x\cos\varphi + y\sin\varphi) \qquad (0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi).$$

Кроме того, верхний предел в (4.10) достигается равномерно, т.е. для любого $\varepsilon>0$ найдется R_ε такое, что при всех φ

$$\log|f(re^{i\varphi})| \leqslant (h(\varphi)+\varepsilon)\,r \qquad \text{при } r>R_\varepsilon.$$

Если же для функции $f(z)$ выполняется еще условие 1°, то легко показывается, что K вырождается в отрезок мнимой оси *) и, следовательно,

$$h(\varphi)=\begin{cases} h\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\varphi & (0\leqslant\varphi<\pi) \\ -h\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sin\varphi & (-\pi\leqslant\varphi\leqslant 0). \end{cases}$$

Для таких функций можно утверждать существование и равенство пределов (см. [11]):

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n_1(r)}{r}=\lim_{r\to\infty}\frac{n_2(r)}{r}=\frac{l}{2\pi},$$

где $n_1(r)$ и $n_2(r)$ — числа нулей функции $f(z)$, не превосходящих по модулю r и лежащих, соответственно, в правой и левой полуплоскостях, а l — длина отрезка K, т. е.

$$l=h\left(\frac{\pi}{2}\right)+h\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

В дальнейшем будет играть важную роль то обстоятельство, что для целых функций $f(z)$, удовлетворяющих условиям 1°, 2°:

$$h\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{r\to\infty}\frac{2}{\pi r}\int_0^{\pi}\log|f(re^{\pm i\varphi})|\sin\varphi\,d\varphi. \tag{4.11}$$

5. Если $f(z)$ — целая функция, то функция $u(z)=\log|f(z)|$ субгармонична во всей плоскости.

Теорема Полиа легко обобщается на любые логарифмически субгармоничные функции $u(z)$, для которых

$$H=\lim_{|z|\to\infty}\frac{\log u(z)}{|z|}<\infty,$$

именно для них также справедливо утверждение, что

$$h(\varphi)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log u(re^{i\varphi})}{r}\qquad(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi) \tag{4.12}$$

есть опорная функция некоторого ограниченного выпуклого замкнутого множества; при этом верхний предел в (4.12) достигается равномерно относительно φ. В частности,

$$H=\max_{0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi}h(\varphi).$$

§ 5. Основная теорема о регулярных точках вектор-функций $\mathfrak{f}_M(z)$

1. Если решить систему уравнений (2.3) относительно функций $f_u^{(k)}(z)$ и внести их выражения в (2.1), то мы найдем, что

$$\mathfrak{f}_M(z)=\sum_{j,k=1}^{m}\frac{\Delta_{jk}(z)}{\Delta(z)}(f,\varphi_j(\bar z))u_k, \tag{5.1}$$

где $\Delta_{jk}(z)$ $(j=1, 2, \ldots, m)$ суть алгебраические дополнения элемента $(u_k, \varphi_j(\bar{z}))$ в детерминанте

$$\Delta(z) = |(u_k, \varphi_j(\bar{z}))|_{j,\,k=1}^{m}.$$

Если в некоторой точке a $(\operatorname{Im} a \neq 0)$ детерминант $\Delta(z)$ отличен от нуля, то найдется некоторый круг $K(a; r)$ $(|z-a| \leqslant r)$, в котором $|\Delta(z)|$ будет отлично от нуля и, следовательно, ограничено снизу положительным числом. В силу голоморфности функций $(f, \varphi_j(\bar{z}))$, $\Delta(z)$ и $\Delta_{jk}(z)$ внутри каждой из двух полуплоскостей найдется константа $C = C(a, r)$, зависящая только от a и r, но не от f, такая, что при любом $f \in \mathfrak{H}$

$$\|\mathfrak{f}_{\mathfrak{M}}(z)\| \leqslant C(a, r) \|f\| \quad \text{при} \quad z \in K(a; r). \tag{5.2}$$

Ниже мы покажем, что для любого a (вещественного или невещественного) и любого $r > 0$ найдется константа $C = C(a; r)$ такая, что неравенство (5.2) будет выполняться всякий раз, когда функция $\mathfrak{f}_{\mathfrak{M}}(z)$ регулярна в круге $K(a; 2r)$.

При построении системы вектор-функций $\varphi_j(z)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ мы могли за „начальное" значение z_0 (см. § 2, п. 1) выбрать $z_0 = i$ и за „начальную" систему φ_j^0 $(j = 1, 2, \ldots, m)$ выбрать некоторую ортонормированную систему, так что

$$(\varphi_j(i),\ \varphi_k(i)) = \delta_{jk}\ (j, k = 1, 2, \ldots, m). \tag{5.3}$$

Так как оператор $U_{i,-i} = (A^0 - iI)(A^0 + iI)^{-1}$ унитарен, то также

$$(\varphi_j(-i), \varphi_k(-i)) = \delta_{jk} \quad (j, k = 1, 2, \ldots, m).$$

Из соотношения

$$\varphi_j(z) = \varphi_j(i) + (z-i) R_z \varphi_j(i) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda - i}{\lambda - z} dE_\lambda \varphi_j(i) \qquad (j=1, 2, \ldots, m),$$

где E_λ — спектральная функция оператора A°, находим, что для любого $f \in \mathfrak{H}$

$$(f, \varphi_j(\bar{z})) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda - i}{\lambda - z} d(E_\lambda f, \varphi_j(i)) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda - i}{\lambda - z} d\sigma_j(\lambda; f) \qquad (j=1, 2, \ldots, m).$$

Для любого интервала $\Delta = (a, b)$ имеем

$$|\sigma_j(b; f) - \sigma_j(a; f)| = |(E_\Delta f, \varphi_j(i))| = |(E_\Delta f, E_\Delta \varphi_j(i))| \leqslant$$
$$\leqslant \|E_\Delta f\| \cdot \|E_\Delta \varphi_j(i)\| \leqslant \frac{1}{2} (\|E_\Delta f\|^2 + \|E_\Delta \varphi_j(i)\|^2) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2} [(E_\Delta f, f) + (E_\Delta \varphi_j(i), \varphi_j(i)],$$

а поэтому, принимая во внимание (5.3), находим

$$\operatorname{var} \sigma_j(\lambda; f) = \int_{-\infty}^{\infty} |d\sigma_j(\lambda; f)| \leqslant \frac{1}{2} (\|f\|^2 + 1). \tag{5.4}$$

Таким образом, согласно изложенному в § 4 при любом $f \in \mathfrak{H}$ функция $(f, \varphi_j(\bar{z}))$ принадлежит классу (N) в каждой из двух полуплоскостей $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$ *). А так как эти классы суть кольца, то к ним принадлежат и функции $\Delta(z), \Delta_{jk}(z)$ $(j, k = 1, 2, \ldots, m)$, выражающиеся в виде многочленов через функции $(u_k, \varphi_j(\bar{z}))$ $(j, k = 1, 2, \ldots, m)$.

При $\|f\| = 1$, согласно (5.4): $\operatorname{var} \sigma_j(\lambda; f) \leqslant 1$, а поэтому по лемме **4.2**

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overset{+}{\log} |f, \varphi_j(\bar{z}))|}{(1+|z|)^4} \, dx \, dy \leqslant 8\pi.$$

Так как такое же неравенство можно будет написать и для интеграла по нижней полуплоскости *), то заключаем, что для любого $f \in \mathfrak{H}$ с $\|f\| = 1$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overset{+}{\log} |(f, \varphi_j(\bar{z}))|}{(1+|z|)^4} \, dx \, dy \leqslant 16\pi. \tag{5.5}$$

Положим

$$\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overset{-}{\log} |\Delta(z)|}{(1+|z|)^4} \, dx \, dy$$

и

$$\gamma_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overset{+}{\log} |\Delta_{jk}(z)|}{(1+|z|)^4} \, dx \, dy. \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, m).$$

Согласно лемме все величины γ, γ_{jk} $(j, k = 1, 2, \ldots, m)$ конечны.

Воспользовавшись известным неравенством

$$\overset{+}{\log} \sum_1^m \alpha_\nu \leqslant \sum_1^m \overset{+}{\log} \alpha_\nu + \log m,$$

мы из (5.1) находим, что

$$\begin{aligned} \overset{+}{\log} \|\mathfrak{f}_M(z)\| &\leqslant \overset{+}{\log} \Big| \sum_{j,k=1}^{m} \Delta_{jk}(z) (f, \varphi_j(\bar{z})) u_k \Big| + \overset{-}{\log} |\Delta(z)| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{j,k=1}^{m} \overset{+}{\log} |\Delta_{jk}(z)| + \sum_{j,k=1}^{m} \overset{+}{\log} |u_k| + \\ &+ \sum_{j=1}^{m} \overset{+}{\log} |(f, \varphi_j(\bar{z}))| + \overset{-}{\log} |\Delta(z)| + \log m. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Лемма 5.1. *Оператору A и модулю M можно сопоставить константу Γ, так что для любого $f \in \mathfrak{H}$, для которого $\|f\| = 1$:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overset{+}{\log} \|\mathfrak{f}_M(z)\|}{(1+|z|)^4} \, dx \, dy \leqslant \Gamma. \tag{5.7}$$

---

*) Для полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$ можно повторить все предыдущие рассуждения, отправляясь уже от системы $\varphi(-i)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$.

В самом деле, согласно (5.7) и (5.6) написанное неравенство будет выполняться при

$$\Gamma = 16m\pi + \gamma + \sum_{j,k=1}^{m} \gamma_{jk} + \frac{\pi}{3} \sum_{k=1}^{m} \overset{+}{\log} |u_k| + \frac{\pi}{3} \log m .$$

2. Нам понадобится частный случай следующей общей леммы.

Лемма 5.2. *Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторое банахово пространство, а $\mathfrak{f}(z)$ — некоторая голоморфная в области G комплексной плоскости вектор-функция со значениями из $\mathfrak{L}$. Тогда функция $\overset{+}{\log}\|\mathfrak{f}(z)\|$ субгармонична в G.*

Доказательство. Для любого $\mathfrak{g} \in \mathfrak{L}$ имеем

$$\|\mathfrak{g}\| = \sup_{\|\Phi\|=1} |\Phi(\mathfrak{g})|,$$

где через Φ обозначен линейный непрерывный функционал на $\mathfrak{L}$.

Отсюда

$$\overset{+}{\log}\|\mathfrak{f}(z)\| = \sup_{\|\Phi\|=1} \overset{+}{\log} |\Phi(\mathfrak{f}(z))| . \quad (z \in G).$$

Так как функция $\Phi(\mathfrak{f}(z))$ является скалярной, голоморфной в G функцией, то по известной теореме ее $\overset{+}{\log} |\Phi(\mathfrak{f}(z))|$ будет субгармоничной в G функцией.

С другой стороны, как известно, верхняя огибающая любого множества субгармоничных функций есть снова субгармоничная функция.

Лемма доказана.

Теперь уже не представляет труда доказательство основной теоремы этого параграфа.

Теорема 7. *Каждой точке a комплексной плоскости и положительному $r>0$ отвечает константа $C=C(a, r)$, такая, что коль скоро для некоторого $f \in \mathfrak{H}$ вектор-функция $\mathfrak{f}_M(z)$ голоморфна в круге $|z-a| \leqslant 2r$*), то*

$$\|\mathfrak{f}_M(z)\| \leqslant C(a; r) \cdot \|f\| \quad \text{при } |z-a| < r. \tag{5.8}$$

Доказательство. Так как оператор, относящий f вектор-функцию $\mathfrak{f}_M(z)$ однороден, то достаточно доказать неравенство (5.8) для $f \in \mathfrak{H}$ с $\|f\| = 1$.

Если некоторому f ($\|f\| = 1$) отвечает вектор-функция $\mathfrak{f}_M(z)$, голоморфная в круге $K(a; 2r)$ ($|z-a| \leqslant 2r$), то в этом круге функция $\overset{+}{\log}\|\mathfrak{f}_M(z)\|$ будет субгармоничной и, следовательно, для любого $\zeta \in K(a; r)$

$$\overset{+}{\log}\|\mathfrak{f}_M(\zeta)\| \leqslant \frac{1}{\pi r^2} \int\int_{K(\zeta; r)} \overset{+}{\log}\|\mathfrak{f}_M(z)\| \, dx\, dy$$

(круг $K(\zeta; r)$ целиком входит в круг $K(a; 2r)$).

---

*) Коэфициент 2 можно заменить на любой другой $q > 1$ и тогда, конечно, C будет зависеть не только от a и r, но и от q: $C = C(a, r; q)$.

С другой стороны, очевидно, что

$$\iint\limits_{K(\zeta;r)} \overset{+}{\log}\|\mathfrak{f}_M(z)\|\,dx\,dy \leqslant (1+a+2r)^4 \iint\limits_{K(\zeta;r)} \frac{\overset{+}{\log}\|\mathfrak{f}_M(z)\|\,dx\,dy}{(1+|z|)^4} \leqslant \Gamma(1+a+2r)^4.$$

Таким образом,

$$\|\mathfrak{f}_M(\zeta)\| \leqslant \exp\frac{\Gamma(1+a+2r)^4}{\pi r^2} \quad (|\zeta-a|<r).$$

Теорема доказана.

§ 6. *M*-регулярные точки оператора *A*

1. Точка a комплексной плоскости называется точкой регулярного типа линейного оператора A *), если ей отвечает число $\varkappa_a>0$ такое, что

$$\|Af-af\| \geqslant \varkappa_a\|f\| \quad \text{при } f\in\mathfrak{D}_A. \tag{6.1}$$

Легко видеть, что если оператор A замкнут, то из условия (6.1) вытекает замкнутость множества

$$\mathfrak{M}_a=(A-aI)\,\mathfrak{D}_A.$$

Покажем, что для замкнутого оператора A, не имеющего точку a собственным числом, замкнутость $\mathfrak{M}_a$ является не только необходимым, но и достаточным условием того, чтобы точка a была регулярного типа.

В самом деле, если линейный оператор A замкнут, то $\mathfrak{D}_A$ является полным нормированным пространством по норме $\|f\|_A$, где

$$\|f\|_A=\|f\|+\|(A-aI)f\|.$$

Линейный оператор $A-aI$ отображает одно-однозначно и непрерывно банахово пространство $\mathfrak{D}_A$ на полное гильбертово пространство $\mathfrak{M}_a$. Но тогда по известной теореме Банаха это отображение взаимно непрерывно, и, следовательно, найдется такое $\varkappa>0$, что

$$\|(A-aI)f\| \geqslant \varkappa\|f\|_A \quad (f\in\mathfrak{D}_A).$$

Так как $\|f\|_A \geqslant \|f\|$, то предложение доказано.

Как известно, для эрмитова оператора A всегда

$$\|(A-aI)f\| \geqslant |\operatorname{Im} a|\cdot\|f\| \quad (f\in\mathfrak{D}_A);$$

поэтому всякое невещественное a будет точкой регулярного типа эрмитова оператора.

Если a точка вещественной оси, то неравенство (6.1) для эрмитова оператора A будет означать, что интервал $I_a=(a-\varkappa_a, a+\varkappa_a)$ является спектральным люком оператора A, и в этом случае у оператора A существует по крайней мере одно самосопряженное расширение $\tilde{A}$, не содержащее точек спектра в интервале I_a (см. [1ж]).

---

*) В п. 1 этого параграфа мы рассматриваем произвольный линейный оператор A с любой областью определения.

В этом утверждении ничего не предполагается относительно индекса дефекта оператора A. Если же этот индекс имеет вид (m, m), где m — целое число, то всякое самосопряженное расширение оператора не будет иметь внутри интервала J_a иных точек спектра, кроме собственных чисел, сумма кратностей которых не превосходит m. Можно также показать (см. [1ж] и [12]), что в этом случае каковы бы ни были числа λ_j ($j = 1, 2, \ldots, p$; $p \leqslant m$), взятые внутри J_a, и натуральные числа k_j ($j = 1, 2, \ldots, p$), где $k_1 + \ldots + k_p \leqslant m$, всегда найдется одно и только одно самосопряженное расширение $\tilde{A}$, для которого λ_j ($j = 1, 2, \ldots, p$) будут собственными числами соответственно кратностей k_j ($j = 1, 2, \ldots, p$) и у которого не будет никаких других точек спектра внутри J_a.

2. Возвращаясь к изучению простого замкнутого эрмитова оператора A с индексом дефекта (m, m), где $m < \infty$, можно высказать также следующее предложение (см. [1ж]).

1°. Для того чтобы точка a была точкой регулярного типа для A, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы одно самосопряженное расширение $\tilde{A}$ оператора A в некоторой окрестности точки a не имело иных точек спектра, кроме конечного числа собственных чисел конечной кратности.

Если B — некоторый самосопряженный оператор, то его спектр называется дискретным, если в каждом конечном интервале он состоит из конечного числа собственных чисел конечной кратности.

Сопоставляя 1° со сказанным в п.1, мы убеждаемся в следующем:

2°. Если хотя бы одно самосопряженное расширение $\tilde{A}$ оператора A имеет дискретный спектр, то и любое его другое самосопряженное расширение будет обладать этим свойством. Для того чтобы этот случай имел место, необходимо и достаточно, чтобы все точки вещественной оси были регулярного типа для оператора A.

Оператор A, удовлетворяющий условиям предложения 2°, назовем регулярным.

3°. Точку a условимся называть M-регулярной, если при некотором $\varrho > 0$ всякая вектор-функция $\mathfrak{f}_M(z)$ ($f \in \mathfrak{H}$) регулярна в круге $K(a, \varrho)$.

Теорема 8. *Для того, чтобы некоторая точка a была M-регулярной, необходимо и достаточно, чтобы она была регулярного типа и чтобы*

$$\mathfrak{M}_a \cap M = (0). \tag{6.2}$$

Доказательство. Если $\operatorname{Im} a \neq 0$, то первое условие всегда выполнено. Второе же условие в этом случае означает, что

$$\Delta(a) = \left| (u_k, \varphi_j(\bar{a})) \right|_1^n \neq 0. \tag{6.3}$$

При его выполнении согласно формуле

$$\mathfrak{f}_M(z) = \sum_{j,k=1}^{m} \frac{\Delta_{jk}(z)}{\Delta(z)} (f, \varphi_j(\bar{z}))\, u_k = \sum_{k=1}^{m} f_u^{(k)}(z)\, u_k \tag{6.4}$$

вектор-функция $\mathfrak{f}_M(z)$ будет голоморфной в каждом круге $K(a, \varrho)$, в котором $\Delta(z) \neq 0$.

Если же $\Delta(a) = 0$, то по крайней мере одна из функций $\frac{\Delta_{jk}(z)}{\Delta(z)}$ имеет полюс в точке a. Пусть $\frac{\Delta_{pq}}{\Delta(z)}$ та из них, которая имеет в точке a полюс максимального порядка. Выберем затем $f \in \mathfrak{H}$ так, чтобы

$$(f, \varphi_j(\bar{a})) = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq p \\ 1 & \text{при } j = p. \end{cases}$$

Тогда, легко видеть, функция

$$f_u^{(q)}(z) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\Delta_{jq}(z)}{\Delta(z)} (f, \varphi_j(\bar{z})),$$

а следовательно, и вектор-функция $\mathfrak{f}_M(z)$ будет иметь полюс в точке a.

Таким образом, для случая невещественного a теорема доказывается очень просто.

Пусть теперь a вещественно. Достаточность условий и в этом случае доказывается просто.

В самом деле, если точка a регулярного типа, то всегда найдется самосопряженное расширение $\tilde{A}$ оператора A, которое в некотором круге $K(a, \varrho)$ не будет иметь точек спектра. Выберем в качестве A^0 именно это расширение и с помощью его резольвенты построим вектор-функции $\varphi_j(z; \lambda)$ $(j=1, 2, \ldots, m)$. Тогда эти вектор-функции, а с ними и функции $\Delta(z)$, $\Delta_{jk}(z)$ $(j, k=1, 2, \ldots, m)$ будут голоморфны в круге $K(a, \varrho)$ и, следовательно, формула (5.1) будет иметь место в некоторой окрестности точки a. Попрежнему условия (6.2) и (6.3) будут эквивалентны и всякая вектор-функция $\mathfrak{f}_M(z)$ будет голоморфна в круге $K(a; \varrho)$, в котором $\Delta(z) \neq 0$.

Перейдем к доказательству необходимости условий для случая вещественного a. Эта часть доказательства теоремы является наиболее тонкой.

Прежде всего напомним, что согласно теореме 7 существует константа $C = C(a, r)$ $(r = \varrho/2)$, такая что каждая вектор-функция $\mathfrak{f}_M(z)$, регулярная в $K(a; \varrho)$, удовлетворяет неравенству

$$\|\mathfrak{f}_M(z)\| \leqslant C \|f\|. \tag{6.5}$$

Поэтому, если вектор-функции $\mathfrak{f}_M(z)$ $(f \in \mathfrak{H})$ регулярны в $K(a; \varrho)$, то вектор-функции $\mathfrak{f}_M(z)$, отвечающие всевозможным элементам f единичного гипершара $S(\|f\| \leqslant 1)$ в $\mathfrak{H}$, равномерно ограничены в круге $K(a; r)$ и, следовательно, по теореме Стильтьеса образуют компактное семейство S_M в смысле равномерной сходимости в каждом внутреннем круге $K(a; r_1)$ $(0 < r_1 < r)$.

С другой стороны, фиксируя какой-либо интервал $\Delta=(a-r_1, a+r_1)$, где $0<r_1<r$, для любой спектральной функции E_λ оператора A будем иметь

$$(E_\Delta f, g) = \int\limits_\Delta \sum_{j,\, k=1}^{m} f^{(j)}(\lambda)\overline{g^{(k)}(\lambda)}\, d\tau_{jk}(\lambda), \tag{6.6}$$

где

$$\tau_{jk}(\lambda) = (E_\lambda u_j, u_k) \qquad (j, k=1, 2, \ldots, m). \tag{6.7}$$

Пусть E_λ — некоторая ортогональная спектральная функция оператора (т. е. спектральная функция некоторого самосопряженного расширения $\tilde{A}$ оператора A в $\mathfrak{H}$).

Как мы знаем, для доказательства регулярности точки a достаточно показать, что, кроме конечного числа собственных чисел конечной кратности, оператор $\tilde{A}$ иных точек спектра на интервале Δ не имеет, или, что то же — что $E_\Delta\mathfrak{H}$ есть конечномерное пространство.

Последнее же обнаруживается из того, что единичный гипершар S_Δ подпространства $E_\Delta\mathfrak{H}$ компактен. В самом деле, если $f, g \in S_\Delta$, то для $(f, g)=(E_\Delta f, g)$ имеет место равенство (6.6), и компактность S_Δ следует из компактности на Δ в смысле равномерной сходимости множества функций $\mathfrak{f}_M(z)$, соответствующих $f \in S_\Delta \subset S$.

Коль скоро доказано, что точка a регулярного типа, то доказательство необходимости второго условия (6.2) можно вести так же, как и для случая невещественного a, если предварительно построить систему вектор-функций $\varphi_j(z)$ $(j=1, 2, \ldots, m)$ с помощью резольвенты R_z самосопряженного расширения A^0 оператора A, не имеющего точек спектра в некоторой окрестности точки a.

Теорема доказана.

Отметим следующее ее непосредственное

Следствие. *Если все точки вещественной оси М-регулярны, то любое самосопряженное расширение $\tilde{A}$ в $\mathfrak{H}$ оператора A имеет дискретный спектр.*

Если дефектное число $m = 1$, то, как нам удалось показать, предложение допускает обращение, т. е. можно утверждать, что *если хотя бы одно (а значит, и любое) самосопряженное расширение $\tilde{A}$ оператора A имеет дискретный спектр, то при соответствующем выборе масштабного вектора и все точки вещественной оси будут М-регулярны.*

Так как доказательство этого предложения требует специальных рассмотрений из теории целых функций, то его доказательство мы опускаем.

3. При определении является ли данная точка M-регулярной, удобно пользоваться следующим предложением.

Теорема 9. *Если точке a можно сопоставить круг $K(a; \varrho)$ и плотное в $\mathfrak{H}$ линейное множество $\mathfrak{D}$ так, что каждому $f \in \mathfrak{D}$ отвечает рег* *лярная в $K(a; \varrho)$ функция $\mathfrak{f}_M(z)$, то точка a M-регулярна, а следовательно, есть точка регулярного типа.*

Доказательство. При $r=\varrho/2$ для каждого $f\in\mathfrak{D}$ выполняется неравенство (5.5).

С другой стороны, каждому $g\in\mathfrak{H}$ отвечает сходящаяся к нему последовательность $\{f^{(n)}\}\subset\mathfrak{D}$. Так как для нее

$$\|\mathfrak{f}_M^{(n)}(z)-\mathfrak{f}_M^{(m)}(z)\|\leqslant C\|f^{(n)}-f^{(m)}\| \qquad \text{при } z\in K(a;r),$$

то внутри круга $K(a;r)$ вектор-функции $\mathfrak{f}_M^{(n)}(z)$ сходятся к некоторой голоморфной внутри того же круга вектор-функции $\mathfrak{h}(z)$. С другой стороны, в каждой невещественной точке $z\in K(a;r)$, в которой $\Delta(z)\neq 0$ вектор-функции $\mathfrak{f}_M^{(n)}(z)$ согласно формуле (5.4) будут сходиться к $\mathfrak{g}_M(z)$. Откуда $\mathfrak{g}_M(z)=\mathfrak{h}(z)$.

Таким, образом для каждого $g\in\mathfrak{H}$ вектор-функция $\mathfrak{g}_M(z)$ регулярна внутри круга $K(a;r)$.

Теорема доказана.

Теорема 9. *Для того чтобы некоторая точка a была точкой регулярного типа для оператора A, необходимо и достаточно, чтобы ей отвечала некоторая окрестность K и целое число $p\geqslant 0$ такое, что для любого $f\in\mathfrak{H}$ функция $(z-a)^p\mathfrak{f}_M(z)$ регулярна в окрестности K. Для того чтобы окрестность K точки a и целое $p\geqslant 0$ обладали указанным свойством, достаточно, чтобы они обладали этим свойством по отношению к элементам f некоторого линейного множества $\mathfrak{L}$ плотного в $\mathfrak{H}$.*

Доказательство. В самом деле, если точка a регулярного типа для A, то, как неоднократно отмечалось, можно построить базис $\{\varphi_1(z),\ldots,\varphi_m(z)\}$, голоморфный в некоторой окрестности K точки a, и тогда в силу формулы (6.4) эта окрестность K и число p, равное порядку $\Delta(z)$ в точке a, будут удовлетворять указанным в теореме требованиям.

Пусть теперь, обратно, известно, что точке a соответствует некоторая окрестность K и целое $p\geqslant 0$ такие, что для элементов f некоторого линейного множества $\mathfrak{L}$, плотного в $\mathfrak{H}$, функция $(z-a)^p\mathfrak{f}_M(z)$ регулярна в окрестности K. Докажем, что a есть точка регулярного типа для оператора A.

Для $f\in\mathfrak{L}$ в окрестности K имеет место разложение

$$\mathfrak{f}_M(z)=\sum_{k=-p}^{\infty}C_k(f)\,(z-a)^k,$$

где $C_k(f)$ $(k=-p,\ -p+1,\ldots)$ — некоторые линейные функционалы, определенные на $\mathfrak{L}$.

Обозначим через $\mathfrak{T}$ множество тех $f\in\mathfrak{L}$, для которых

$$C_{-1}(f)=C_{-2}(f)=\ldots=C_{-p}(f)=0. \tag{6.8}$$

Элементам $f\in\mathfrak{T}$ отвечают вектор-функции $\mathfrak{f}_M(z)$, регулярные в K. В силу рассуждений, приведенных при доказательстве теоремы 9, найдется окрестность $K_1 \subset K$ точки a, в которой будут регулярны также все функции $\mathfrak{f}_M(z)$ для $\mathfrak{f} \in \overline{\mathfrak{T}}$ (замыкания $\mathfrak{T}$). Обозначим через P оператор ортогонального проектирования $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{R} = \mathfrak{H} \ominus \overline{\mathfrak{T}}$.

Линейное множество $P\mathfrak{L}$ имеет не более, чем p измерений. В самом деле, если $g_i = Pf_i$, где $f_i \in \mathfrak{L}$ $(i = 1, 2, \ldots p+1)$, то найдутся $\xi_i\,(i = 1, 2, \ldots, p+1,\ \Sigma|\xi_i|^2 > 0)$ такие, что $f = \Sigma \xi_i f_i$ будет удовлетворять уравнениям (6.8) и, следовательно, будет принадлежать $\mathfrak{T}$. Но тогда $Pf = \Sigma \xi_i g_i = 0$.

Из того, что $P\mathfrak{L}$ не более чем p-мерно, вытекает, что $P\overline{\mathfrak{L}} = P\mathfrak{H} = \mathfrak{R}$ не более чем p-мерно.

Пусть теперь $\Delta = (a-h,\ a+h)$ некоторый интервал, лежащий внутри K_1, а E_λ — некоторая ортогональная спектральная функция оператора A. Наша теорема будет доказана, если мы докажем, что подпространство $E_\Delta \mathfrak{H} = E_\Delta \overline{\mathfrak{T}} \oplus E_\Delta \mathfrak{R}$ конечномерно, что эквивалентно тому, что $E_\Delta \overline{\mathfrak{T}}$ конечномерно. А так как для всякой пары элементов $f, g \in \overline{\mathfrak{T}}$ функции $\mathfrak{f}_M(z)$, $\mathfrak{g}_M(z)$ регулярны на Δ и, следовательно, имеет место (5.6), то конечномерность $E_\Delta \overline{\mathfrak{T}}$ вытекает из рассуждений, приведенных при доказательстве теоремы 8.

Теорема доказана.

§ 7. Базис $\{e_1(z), \ldots, e_m(z)\}$ и функция $\nabla_M(z)$

1. В каждой M-регулярной точке z линейный оператор, относящий $f \in \mathfrak{H}$ вектор

$$\mathfrak{f}_M(z) = \sum_{j=1}^{m} f_u^{(j)}(z)\, u_j$$

непрерывен и, следовательно, $f_u^{(j)}(z)$ $(j=1, 2, \ldots, m)$ суть непрерывные линейные функционалы от $f \in \mathfrak{H}$.

По теореме Рисса будем иметь

$$f_u^{(j)}(z) = (f,\ e_j(\overline{z})) \qquad (f \in \mathfrak{H};\ j=1, 2, \ldots, m).$$

Пусть G — некоторая область M-регулярных точек. По определению, в этой области для любого $f \in \mathfrak{H}$ функции $f_u^{(j)}(z)$ $(j=1, 2, \ldots, m)$ голоморфны, и, следовательно, вектор-функции $e_j(z)$ $(j=1, 2, \ldots, m)$ голоморфны в области $\overline{G}$ (зеркальном отражении G относительно вещественной оси).

В этом можно и непосредственно убедиться, выписав для $e_j(\overline{z})$ $(j=1, 2, \ldots, m)$ их выражение, получающееся из формулы (6.4), которая имеет место в достаточно малой окрестности любой M-регулярной точки z при надлежащем выборе базиса $\varphi_1(\overline{z}), \ldots, \varphi_m(\overline{z})$.

Векторы $e_j(\overline{z})$ $(j=1, 2, \ldots, m)$, будучи линейными комбинациями векторов $\varphi_j(\overline{z})$ $(j=1, 2, \ldots, m)$, принадлежат $\mathfrak{N}_{\overline{z}}$. А так как $f - \mathfrak{f}_M(z) \in \mathfrak{M}_z$, то $f - \mathfrak{f}_M(z) \perp e_j(\overline{z})$ $(j=1, 2, \ldots, m)$, т. е.

$$\left(f - \sum_{k=1}^{m} (f,\ e_k(\overline{z}))\, u_k,\ e_j(\overline{z})\right) = 0 \quad (j=1, 2, \ldots, m).$$

Ввиду произвольности $f \in \mathfrak{H}$ заключаем отсюда, что

$$(u_k,\ e_j(\bar{z})) = \delta_{jk} \qquad (j,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Эти условия биортогональности, вместе с условиями

$$e_j(\bar{z}) \in \mathfrak{N}_{\bar{z}} \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

вполне определяют систему $(e_1(\bar{z}),\ \ldots,\ e_m(\bar{z}))$, соответствующую M-регулярной точке z.

2. Положим в M-регулярной точке z

$$\nabla_M(z) = \sup_{f \in \mathfrak{H}} \frac{\| \mathfrak{f}_M(z) \|}{\| f \|}. \tag{7.1}$$

Величина

$$\nabla_M^{-1}(z) = \min_{f \in \mathfrak{H}} \frac{\| f \|}{\| \mathfrak{f}_M(z) \|}\ ^{*)}$$

имеет простой геометрический смысл.

В самом деле, когда f пробегает $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{f}_M(z)$ пробегает все M; с другой стороны, если $g \in M$, то $g = \mathfrak{f}_M(z)$ для тех и только тех f, которые представимы в виде: $f = g + h$, где $h \in \mathfrak{M}_z$. Таким образом,

$$\nabla_M^{-1}(z) = \min_{g \in M,\ h \in \mathfrak{M}_z} \frac{\| g - h \|^2}{\| g \|^2}.$$

Но если $g \in M$ и $\| g \| = 1$, то

$$\min_{h \in \mathfrak{M}_z} \| g - h \|$$

есть синус угла наклона прямой λg к $\mathfrak{M}_z$. Отсюда, $\nabla_M^{-1}(z)$ есть синус наименьшего угла наклона M к $\mathfrak{M}_z$.

Отметим теперь следующее свойство $\nabla_M(z)$.

Функция $\nabla_M(z)$ логарифмически-субгармонична в каждой области G, состоящей из M-регулярных точек.

В самом деле, $\log \nabla_M(z)$ в G есть верхняя огибающая субгармонических функций $\log \| \mathfrak{f}_M(z) \|$ $(\| f \| = 1)$.

3. Покажем, как выражается и оценивается через вектор-функции $e_j(z)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ функция $\nabla_M(z)$, при этом, простоты ради, предположим, что базис $(u_1, \ldots, u_m)$ выбран ортонормированным

$$(u_j,\ u_k) = \delta_{jk} \qquad (j,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Тогда

$$\| \mathfrak{f}_M(z) \|^2 = \sum_{j=1}^{m} | (f,\ e_j(\bar{z})) |^2.$$

С другой стороны, каждый вектор $f \in \mathfrak{H}$ можно представить в виде ортогональной суммы $f = g + h$, где $g \in \mathfrak{M}_z$, а $h \in \mathfrak{N}_{\bar{z}}$. Так как при этом

---

*) Мы позволяем себе писать „min" вместо „inf" ввиду того, что, как выяснится несколько дальше, верхняя грань в (7,1) всегда достигается.

$|\mathfrak{f}_M(z)| = |\mathfrak{h}_M(z)|$, а $\|h\| < \|f\|$, если $g \neq 0$, то верхняя грань в (7.1) будет достигаться для векторов f из $\mathfrak{N}_{\bar{z}}^-$, т. е. на векторах f вида,

$$f = \sum_{j=1}^{m} \xi_j e_j(\bar{z}).$$

Положим

$$\gamma_{jk}(z) = (e_k(\bar{z}),\ e_j(\bar{z})) \qquad (j,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

и рассмотрим матрицы

$$\Gamma(z) = \|\gamma_{jk}(z)\|_1^m, \quad \Gamma^2(z) = \|\gamma_{jk}^{(2)}(z)\|_1^m.$$

Легко видеть, что

$$\nabla_M^2(z) = \max_{\xi} \frac{\sum_1^m \gamma_{jk}^2(z)\,\xi_j\bar{\xi}_k}{\sum_1^m \gamma_{jk}(z)\,\xi_j\bar{\xi}_k}$$

есть наибольшее характеристическое число матрицы Γ. Так как все характеристические числа матрицы Грамма Γ положительны, а ее след

$$\sum_1^m \gamma_{jj} = \sum_1^m \|e_j(\bar{z})\|^2,$$

то мы приходим к неравенству

$$\frac{1}{m} \sum_1^m \|e_j(\bar{z})\|^2 \leqslant \nabla_M^2(z) \leqslant \sum_1^m \|e_j(\bar{z}))\|^2. \tag{7.2}$$

4. Пусть $\{d_k\}_1^\infty$ — некоторая полная ортонормированная система в $\mathfrak{H}$. Через $\mathfrak{d}_k(z)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ обозначим вектор-функции, в которые переходят элементы d_k $(k = 1, 2, \ldots)$ при изоморфизме $f \to \mathfrak{f}_M(z)$. Таким образом,

$$\mathfrak{d}_k(z) = \sum_{j=1}^m (d_k,\ e_j(\bar{z}))\, u_j \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Имеем

$$\|\mathfrak{d}_k(z)\|^2 = \sum_{j=1}^m |(d_k,\ e_j(\bar{z}))|^2.$$

С другой стороны, в силу равенства Парсеваля

$$\|e_j(\bar{z})\|^2 = \sum_{k=1}^\infty |(e_j(\bar{z}),\ d_k)|^2 \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Таким образом,

$$\sum_1^\infty \|\mathfrak{d}_k(z)\|^2 = \sum_{j=1}^m \|e_j(\bar{z})\|^2.$$

Так как слагаемые, фигурирующие в этом равенстве, непрерывны, то, вспоминая известную теорему Дини, а также неравенство (7.2), мы приходим к предложению

Теорема 10. *Ряд*

$$\sum_{1}^{\infty} \| \mathfrak{d}_k(z) \|^2$$

равномерно сходится на каждом ограниченном замкнутом множестве M-регулярных точек; его сумма не зависит от выбора полной ортонормированной системы $\{d_k\}_1^\infty$ и заключена между $\nabla_M^2(z)$ и $m\nabla_M^2(z)$.

Заметим, что на основании теоремы можно утверждать, что некоторая точка a является M-регулярной, если можно указать такую ее окрестность, в которой голоморфны все вектор-функции $\mathfrak{d}_k(z)$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Заметим еще, что для $m = 1$ во всякой M-регулярной точке

$$\nabla_M^2(z) = \sum_{1}^{\infty} \| \mathfrak{d}_k(z) \|^2.$$

§ 8. Целые операторы

1. Простой замкнутый эрмитов оператор с индексом дефекта (m, m) будем называть целым, если можно выбрать модуль M (называемый целым) так, чтобы каждому $f \in \mathfrak{H}$ отвечала целая вектор-функция $\mathfrak{f}_M(z)$.

Для целого оператора A и целого модуля M все точки комплексной плоскости будут M-регулярными и, следовательно, регулярного типа.

Таким образом, целый оператор регулярен. Принимая во внимание теорему 8, можно, следовательно, определить целый оператор как регулярный оператор, для которого существует модуль M такой, что при всех комплексных z

$$\mathfrak{M}_z \cap M = (0).$$

Если M — целый модуль, то в выражении

$$\mathfrak{f}_M(z) = \sum_{j=1}^{m} f_u^{(j)}(z)\, u_j \qquad (f \in \mathfrak{H})$$

все функции $f_u^{(j)}(z)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ являются целыми и допускают представление (см. § 6, п. 5):

$$f_u^{(j)}(z) = (f, e_j(\bar{z})) \qquad (j = 1, 2, \ldots, m;\ f \in \mathfrak{H}),$$

где $e_j(z)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ — некоторые целые вектор-функции со значениями из $\mathfrak{H}$.

Как было выяснено в п. 2 § 4, в каждой из двух полуплоскостей $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$ функции $f_u^{(j)}(z)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ представимы в виде частного двух функций класса (N). В рассматриваемом случае они, будучи целыми, сами суть класса (N) в каждой из этих двух плоскостей, а поэтому к ним применимы теорема 5 и следствия из нее.

Таким образом, если $e(z)$ обозначает какую-либо из вектор-функций $e_j(z)$ $(j=1, 2, \ldots, m)$, то

$$1^\circ.\quad \overline{\lim_{|z|\to\infty}} \frac{\log|(f, e(z))|}{|z|} < \infty. \qquad\qquad (f \in \mathfrak{H}).$$

$$2^\circ.\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overset{+}{\log}|(f, e(x))|}{1+x^2}\, dx < \infty.$$

В связи с этим понадобится следующая важная

Лемма 8.1 *). *Пусть* $e(z)$ $(\neq 0)$ — *некоторая целая вектор-функция комплексного аргумента* z *со значениями из* $\mathfrak{H}$ *и пусть для любого* $f \in \mathfrak{H}$ *выполняются условия* 1°, 2°.

Тогда

$$\overline{\lim_{|z|\to\infty}} \frac{\log\|e(z)\|}{|z|} < \infty, \tag{8.1}$$

и если положить

$$h_e(\varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\|e(re^{i\varphi})\|}{r} \qquad (-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi),$$

то

$$h_e(\varphi) = \begin{cases} h_e\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\varphi & (0 \leqslant \varphi \leqslant \pi), \\ -h_e\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sin\varphi & (-\pi \leqslant \varphi \leqslant 0). \end{cases} \tag{8.2}$$

Доказательство. В силу 1° для любого $f \in \mathfrak{H}$ $(f \neq 0)$ равномерно относительно $\varphi \in (-\pi, \pi)$ достигается верхний предел

$$h(f, \varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log|(f, e(re^{-i\varphi}))|}{r} \qquad (-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi),$$

при этом в силу 2° (см. § 4, п. 3)

$$h(f; \varphi) = \begin{cases} h\left(f; \frac{\pi}{2}\right)\sin\varphi & (0 \leqslant \varphi \leqslant \pi) \\ -\,h\left(f; -\frac{\pi}{2}\right)\sin\varphi & (-\pi \leqslant \varphi \leqslant 0). \end{cases}$$

Кроме того, если положить [см. (4.11)]

$$J_n^{\pm}(f) = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} \log|(f, e(ne^{\pm i\varphi}))|\, d\varphi \qquad (n=1, 2, \ldots,),$$

то

$$h^{\pm}(f) = h\left(f; \pm\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} J_n^{\pm}(f) \qquad (f \in \mathfrak{H},\ f \neq 0).$$

---

*) Лемма непосредственно переносится на целые вектор-функции со значениями из любого банахова пространства.

Дальнейшие рассуждения будем вести для функционала $h^+(f)$. Для функционала $h^-(f)$ рассуждения совершенно аналогичны.

Отметим следующие свойства функционала $h^+(f)$:

1) $h^+(\lambda f) = h^+(f)$ $(f \in \mathfrak{H},\ \lambda$ — скаляр)

2) $h^+(f_1 + f_2) \leqslant \max(h^+(f_1),\ h^+(f_2))$ $(f_1, f_2 \in \mathfrak{H})$.

Обозначим через $\mathfrak{K}$ множество всех $f \in \mathfrak{H}$ с $\|f\| \geqslant 1$. Легко видеть, что функционалы $J_n^+(f)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ непрерывны на $\mathfrak{K}$. А так как $\mathfrak{K}$ полное метрическое пространство, то множество точек непрерывности функционала $h^+(f)$ плотно на $\mathfrak{K}$. Пусть f_0 $(\|f_0\| > 1)$ одна из них. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$h^+(f_0 + g) \leqslant h^+(f_0) + \varepsilon \qquad \text{при } \|g\| < \delta.$$

Поэтому для любого $g \in \mathfrak{H}$ с $\|g\| < \delta$ и $\varepsilon > 0$

$$h^+(g) = h^+((f_0 + g) + (g - f_0)) \leqslant$$

$$\leqslant \max(h^+(f_0 + g),\ h^+(f_0 - g)) \leqslant h^+(f_0) + \varepsilon.$$

В силу 1) в неравенстве $h^+(g) \leqslant h^+(f_0) + \varepsilon$ условие $\|g\| < \delta$ можно отбросить. Так как, кроме того, $\varepsilon > 0$ выбрано произвольно, то мы заключаем, что для любого $f \in \mathfrak{H}$

$$h^+(f) \leqslant h^+(f_0).$$

Таким образом, можно утверждать существование конечных максимумов:

$$H^+ = \max_{f \in \mathfrak{H}} h^+(f) \quad \text{и} \quad H^- = \max_{f \in \mathfrak{H}} h^-(f). \tag{8.3}$$

Положим

$$H(\varphi) = \begin{cases} H^+ \sin\varphi & (0 \leqslant \varphi \leqslant \pi) \\ H^- \sin\varphi & (-\pi \leqslant \varphi \leqslant 0). \end{cases}$$

Согласно (8.3) для любого $f \in \mathfrak{H}$

$$h(f;\varphi) \leqslant H(\varphi) \qquad (-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi).$$

Положим для произвольных $\varepsilon > 0$, $r > 0$ и $\varphi \in (-\pi, \pi)$

$$\Phi_{r,\varphi}(f) = (f,\ e(re^{-i\varphi}))\, e^{-(H(\varphi)+\varepsilon)r} \qquad (f \in \mathfrak{H}).$$

При любых фиксированных φ, r функционал $\Phi_{r,\varphi}$ линеен и непрерывен. С другой стороны, значения всех функционалов $\Phi_{r,\varphi}(f)$ $(r > 0,\ -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi)$ на любом фиксированном $f \in \mathfrak{H}$ ограничены. Следовательно, по известной теореме Банаха нормы всех функционалов $\Phi_{r,\varphi}$ в их совокупности ограничены, т. е. существует такое $N_\varepsilon > 0$, что

$$\|\Phi_{r,\varphi}\| = \|e(re^{i\varphi})\|\, e^{-(H(\varphi)+\varepsilon)r} \leqslant N_\varepsilon,$$

т. е.

$$\|e(re^{i\varphi})\| \leqslant N_\varepsilon e^{-(H(\varphi)+\varepsilon)r} \qquad (r > 0,\ -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi).$$

Таким образом (8.1) доказано, а также и то, что

$$h_e(\varphi) \leqslant H(\varphi) \quad (-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi).$$

Стало быть, индикаторная диаграмма логарифмически субгармонической функции $\|e(\bar{z})\|$ содержится в отрезке $(-H^-i,\ H^+i)$, а следовательно, сама есть отрезок мнимой оси. Откуда вытекает (8.2).

Лемма доказана.

Замечание 8.1. Нетрудно видеть, что

$$h_e(\varphi) \equiv H(\varphi) \quad (-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi). \tag{8.4}$$

В самом деле, для любого $f \in \mathfrak{H}$

$$h(f; \varphi) \leqslant h_e(\varphi) \leqslant H(\varphi) \quad (-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi).$$

С другой стороны, согласно (8.3), найдутся элементы f^+ и f^- такие, что

$$h\left(f^+; \frac{\pi}{2}\right) = H\left(\frac{\pi}{2}\right), \ h\left(f^-; \frac{\pi}{2}\right) = H\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

Отсюда $h_e\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = H\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)$, что влечет (8.4).

Нетрудно также сообразить, что, по крайней мере для одного из векторов, $f = f^+, \ f^-, \ f^+ + f^-$

$$h(f; \varphi) \equiv h_e(f; \varphi) \qquad (-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi).$$

Замечание 8.2. Наш метод позволяет также доказать, что при условиях леммы 8.1 существует константа γ, такая, что

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log|(f, e(x))|}{1+x^2}\,dx \leqslant \gamma + \log\|f\| \qquad (f \in \mathfrak{H}).$$

2. Центральным предложением этого параграфа является

Теорема 11. *Логарифмически субгармоническая функция* $\nabla_M(z)$, *отвечающая целому модулю* M, *всегда не выше экспоненциального типа, т. е.*

$$\overline{\lim_{|z|\to\infty}} \frac{\log \nabla_M(z)}{|z|} < \infty,$$

причем ее индикаторная диаграмма есть отрезок мнимой оси, так что

$$h_M(\varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log \nabla_M(re^{i\varphi})}{r} = \begin{cases} h_M\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\varphi & (0 \leqslant \varphi \leqslant \pi) \\ -h_M\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sin\varphi & (-\pi \leqslant \varphi \leqslant 0). \end{cases}$$

Доказательство. Выбрав для простоты базис $\{u_1, \ldots, u_m\}$ модуля M ортонормированным, будем иметь

$$\|\mathfrak{f}_M(z)\|^2 = \left\|\sum_{j=1}^{m}(f, e_j(\bar{z}))\,u_j\right\|^2 = \sum_{j=1}^{m}|(f, e_j(\bar{z}))|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|^2 \cdot \sum_{j=1}^{m}\|e_j(\bar{z})\|^2.$$

Таким образом,

$$\nabla_M(z) = \max_{f \in \mathfrak{H}} \frac{\|\mathfrak{f}_M(z)\|}{\|f\|} \leqslant \left(\sum_{j=1}^{m} \|e_j(\bar{z})\|^2\right)^{1/2}. \tag{8.5}$$

Так как каждое $e_j(z)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ удовлетворяет условиям леммы 8.1, то теорема 11 есть следствие этого неравенства.

3. При исследовании конкретных целых операторов играет роль следующая

Теорема 12. *Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторое плотное в $\mathfrak{H}$ множество. Тогда индикаторная диаграмма функции $\nabla_M(z)$ есть наименьший отрезок мнимой оси, содержащий все индикаторные диаграммы вектор-функций $\mathfrak{f}_M(z)$ для $f \in \mathfrak{L}$.*

Доказательство. В силу очевидного неравенства

$$H(f;\varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\|\mathfrak{f}_M(re^{i\varphi})\|}{r} \leqslant h_M(\varphi) \qquad (-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi)$$

индикаторная диаграмма вектор-функции $\mathfrak{f}_M(z)$ всегда содержится в отрезке $S = \left(-h_M\left(-\frac{\pi}{2}\right)i,\ h_M\left(\frac{\pi}{2}\right)i\right)$ — индикаторной диаграмме функции $\nabla_M(z)$.

Теорема будет доказана, если мы докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся элементы f^+, $f^- \in \mathfrak{L}$ такие, что

$$H\left(f^{\pm};\ \frac{\pi}{2}\right) \geqslant h_M\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) - \varepsilon.$$

Покажем, как, например, доказывается существование элемента f^+. Согласно (8.5)

$$h_M\left(\frac{\pi}{2}\right) \leqslant \max\left(h_{e_1}\left(\frac{\pi}{2}\right), \ldots,\ h_{e_m}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = h_{e_\nu}\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Введем в рассмотрение функционал

$$h_\nu^+(f) = \lim_{y\to\infty} \frac{\log|(f,\ e_\nu(-iy))|}{y},$$

который мы уже рассматривали при доказательстве леммы 8.1. Как мы знаем (см. доказательство леммы 8.1 и замечание 8.1), этот функционал имеет точки непрерывности, в которых достигает своего максимума, равного $h_{e_\nu}\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Пусть f_0 одна из них. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется элемент $f^+ \in \mathfrak{L}$, достаточно близкий к f_0, такой, что

$$h_\nu^+(f^+) \geqslant h_\nu^+(f_0) - \varepsilon = h_{e_\nu}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \varepsilon \geqslant h_M\left(\frac{\pi}{2}\right) - \varepsilon.$$

А так как

$$\|\mathfrak{f}_M(z)\| \geqslant |(f,\ e_\nu(\bar{z}))|,$$

то и

$$H\left(f^+;\ \frac{\pi}{2}\right) \geqslant h_v^+(f^+) \geqslant h_M\left(\frac{\pi}{2}\right) - \varepsilon.$$

Теорема доказана.

4. Можно показать, что при $m = 1$ длина индикаторной диаграммы не зависит от выбора модуля M. При $m > 1$ этого уже утверждать нельзя (см. § 10, замечание 10.1).

Однако и при $m > 1$ есть случай, когда индикаторная диаграмма, вырождаясь в точку 0, не зависит от выбора целого модуля. Это случай целого оператора минимального типа, характеризующегося тем, что при некотором выборе целого модуля M

$$\overline{\lim_{|z| \to 0}} \frac{\log \nabla_M(z)}{|z|} = 0. \tag{8.6}$$

Условие (8.6) эквивалентно тому, что для всякого $f \in \mathfrak{H}$

$$\lim_{|z| \to 0} \frac{\log \|\mathfrak{f}_M(z)\|}{|z|} = 0. \tag{8.7}$$

Покажем, что это условие, будучи выполненным для одного целого модуля M, будет выполнено и для всякого другого целого модуля $\tilde{M}$.

Пусть $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ — некоторый базис $\tilde{M}$. При изоморфизме $f \to \mathfrak{f}_M(z)$ векторы $v_j (j = 1, 2, \ldots, m)$ перейдут в вектор-функции

$$\mathfrak{v}_j(z) = \sum_{k=1}^{m} v_{ju}^{(k)}(z)\, u_k \qquad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

минимального типа, т. е. удовлетворяющие условию (8.7).

Рассмотрим изоморфизм

$$f \to \mathfrak{f}_{\tilde{M}}(z) = \sum_{j=1}^{m} f_v^{(j)}(z)\, v_j \qquad (f \in \mathfrak{H}).$$

Из

$$f - \mathfrak{f}_{\tilde{M}}(z) \in \mathfrak{M}_z, \quad v_j - \mathfrak{v}_j(z) \in \mathfrak{M}_z \qquad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

легко заключить, что

$$f - \sum_{j=1}^{m} f_v^{(j)}(z)\, \mathfrak{v}_j(z) \in \mathfrak{M}_z.$$

Таким образом,

$$\mathfrak{f}_M(z) = \sum_{j=1}^{m} f_v^{(j)}(z)\, \mathfrak{v}_j(z) = \sum_{j,\, k=1}^{m} f_v^{(j)}(z)\, v_j^{(k)}(z)\, u_k,$$

т. е.

$$f_u^{(k)}(z) = \sum_{j=1}^{m} f_v^{(j)}(z)\, v_{ju}^{(k)}(z) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m). \tag{8.8}$$

Из этих равенств находятся выражения целых функций $f_v^{(j)}(z)$ через целые функции $f_u^{(k)}(z)$ $(j, k = 1, 2, \ldots, m)$. А так как по условию для любого $f \in \mathfrak{H}$ целые функции $f_u^{(k)}(z)$, $v_j^k(z)$ $(j, k=1, 2, \ldots, m)$ все минимального типа, то и функции $f_u^{(j)}(z)$ $(j=1, 2, \ldots, m)$ суть целые функции минимального типа. Это утверждение приобретает еще большую очевидность, если заметить следующее.

Полагая в (8.8) $f=u_l$ $(l=1, 2, \ldots, m)$, получим

$$\sum_{j=1}^{m} u_{lv}^{(j)}(z)\, v_{ju}^{(k)}(z) = \delta_{kl} \qquad (k, l=1, 2, \ldots, m).$$

Таким образом, матрица целых функций $\| v_{ju}^{k}(z) \|_1^m$ имеет своей обратной матрицу $\| u_{lv}^{(j)}(z) \|_1^m$, также состоящую из целых функций.

Отсюда детерминант $| v_{ju}^{(k)}(z) |_1^m$ не имеет нулей, а так как он есть целая функция минимального типа, то мы заключаем, что

$$| v_{ju}^{(k)}(z) |_1^m \equiv \text{const} \qquad (\neq 0). \tag{8.9}$$

Это тождество является, очевидно, не только необходимым, но и достаточным условием того, чтобы система векторов $v_1, v_2, \ldots, v_m$ служила базисом некоторого целого модуля.

В случае целого оператора нормального (т. е. неминимального) типа условие (8.9), нетрудно видеть, перейдет в условие

$$| v_{ju}^{k}(z) |_1^m \equiv \text{const}\, e^{i\alpha z}, \tag{8.10}$$

где α — некоторая вещественная константа.

Отсюда нетрудно убедиться в справедливости замечания, с которого мы начали этот пункт параграфа.

5. Так как целый оператор A регулярен, то любое его самосопряженное расширение $\tilde{A}$ в $\mathfrak{H}$ имеет дискретный спектр.

Предыдущие результаты позволяют установить ряд важных характеристик этого спектра.

Пусть $\{\varphi_\nu\}_1^\infty$ — полная ортонормированная система собственных векторов оператора $\tilde{A}$:

$$\tilde{A}\varphi_\nu = \lambda_\nu \varphi_\nu, \ (\varphi_\nu, \varphi_\mu) = \delta_{\mu\nu} \ (\mu, \nu=1, 2, \ldots).$$

Заметим теперь, что если $\tilde{A}\varphi=\lambda_0\varphi$ $(\varphi\neq 0)$, то также $A^*\varphi=\lambda_0\varphi$, т. е. $\varphi \in \mathfrak{N}_{\lambda_0}$ и, значит, φ есть линейная комбинация векторов $e_1(\lambda_0), \ldots$ $\ldots, e_m(\lambda_0)$, составляющих базис $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$:

$$\varphi = \sum_{j=1}^{m} c_j e_j(\lambda_0) \qquad \left(\sum_1^m |c_j|^2 > 0\right). \tag{8.11}$$

Пусть теперь $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ — какая-либо система линейно независимых собственных векторов оператора $\tilde{A}$:

$$\tilde{A}\psi_k = \lambda^{(k)}\psi_k \qquad (k=1, 2, \ldots, m).$$

Если теперь $\tilde{A}\varphi=\lambda_0\varphi$ и λ_0 отлично от каждого из чисел $\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(m)}$, то

$$(\varphi, \psi_1) = (\varphi, \psi_2) = \ldots = (\varphi, \psi_m) = 0. \tag{8.12}$$

Внося сюда выражение для φ из (8.11), получим систему равенств

$$\sum_{j=1}^{m} c_j(e_j(\lambda_0),\ \psi_k) = 0 \quad (k = 1,\ 2, \ldots,\ m). \tag{8.13}$$

Отсюда λ_0 есть нуль детерминанта

$$D(\lambda) = |(e_j(\lambda),\ \psi_k)|_1^m.$$

Если собственному числу λ_0 отвечает p линейно независимых собственных векторов, то им будет соответствовать p линейно независимых решений $(c_1, \ldots, c_m)$ системы (8.13), а, следовательно, ранг детерминанта $|((e_j(\lambda_0),\ \psi_k)|_1^m$ будет не меньше $m-p$; откуда λ_0 будет нулем $D(\lambda)$ кратности не меньше p.

Сами числа $\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(m)}$ также могут быть нулями детерминанта $D(\lambda)$; именно, $\lambda^{(j)}$ будет нулем $D(\lambda)$ кратности $\geqslant p_j$, если среди собственных векторов, принадлежащих $\lambda^{(1)}$ найдется p_j векторов, линейно независимых от $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ (ибо тогда найдется и p_j ортогональных к $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$).

Таким образом, все собственные числа оператора $\tilde{A}$ (каждое считая столько раз, какова его кратность) находятся среди нулей целой функции

$$(\lambda-\lambda^{(1)})\ (\lambda-\lambda^{(2)})\ldots(\lambda-\lambda^{(m)})\ D(\lambda). \tag{8.14}$$

Эта функция, очевидно, удовлетворяет условиям 1), 2) теоремы (6), ибо является полиномом степени m от функций, удовлетворяющих этим условиям.

Принимая во внимание теорему 11, заключаем, что индикаторная диаграмма функции (8.14) есть отрезок мнимой оси длиной $\leqslant m\left(h_M\left(\frac{\pi}{2}\right) + h_M\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$. Таким образом, если $N(r)$ число собственных чисел оператора $\tilde{A}$ в интервале $(-r,\ r)$, то

$$\overline{\lim}\,\frac{N(r)}{r} \leqslant m\left(h_M\left(\frac{\pi}{2}\right) + h_M\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

6. Среди самосопряженных расширений $\tilde{A}$ в $\mathfrak{H}$ оператора A выделяется замечательное однопараметрическое семейство расширений $\tilde{A}_\xi(-\infty < \xi < \infty)$. Самосопряженное расширение $\tilde{A}_\xi$ характеризуется тем, что ξ является для него собственным числом точно кратности m. Таким образом,

$$\tilde{A}_\xi\, e_j(\xi) = \xi\, e_j(\xi) \quad (j = 1, 2, \ldots,\ m)$$

и, следовательно, в качестве векторов $\psi_j\,(j = 1, 2, \ldots, m)$, о которых шла речь в предыдущем пункте, можно выбрать векторы $e_j(\xi)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$.

Стало быть, весь спектр оператора $\tilde{A}_\xi$ содержится среди множества нулей целой функции экспоненциального типа

$$(\lambda-\xi)^m\,|(e_j(\lambda),\ e_k(\xi))\,|_1^m. \tag{8.15}$$

Вероятно, можно доказать, что спектр совпадает с множеством нулей этой функции (при этом каждый нуль и каждая точка спектра считаются столько раз, какова их кратность).

Для $m = 1$ это предложение доказано и было нами сообщено ранее [1б].

Заметим, что в этом случае расширениями $\tilde{A}_\xi$ исчерпываются все самосопряженные расширения в $\mathfrak{H}$ оператора A.

При изучении конкретных целых операторов часто удается сравнительно просто построить полную в $\mathfrak{H}$ ортонормированную последовательность $\{d_\nu\}$, для которой легко находится соответствующая система вектор-функций $\{\mathfrak{d}_\nu(z)\}_1^\infty$:

$$\mathfrak{d}_\nu(z) = \sum_{j=1}^{m} d_\nu^{(j)}(z)\, u_j = \sum_{j=1}^{m} (d_\nu, e_j(\bar{z}))\, u_j \qquad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{8.16}$$

В силу равенства Парсеваля произведения $(e_j(\lambda), e_k(\xi))$ найдутся по формулам

$$(e_j(\lambda), e_k(\xi)) = \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu^{(j)}(\lambda)\, d_\nu^{(k)}(\xi) \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, m). \tag{8.17}$$

В частности, при $m = 1$ спектр $\tilde{A}_\xi$ будет совпадать с последовательностью корней уравнения

$$(\lambda - \xi) \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu(\lambda)\, d_\nu(\xi) = 0.$$

§ 9. Теорема об эрмитовых операторах с направляющими функционалами

Результаты предыдущих параграфов позволяют сделать одно существенное дополнение к развитой нами теории эрмитовых операторов с направляющими функционалами [13].

1. Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторое линейное множество, в котором определен функционал (f, g) $(f, g \in \mathfrak{L})$, обладающий всеми свойствами обычного скалярного произведения за исключением, может быть, того, что в неравенстве

$$(f, f) \geqslant 0 \qquad (g \in \mathfrak{L})$$

знак $=$ может иметь место также и для некоторых $f \neq 0$.

Положим

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} \qquad (f \in \mathfrak{L}).$$

Обобщая обычное определение эрмитова оператора, будем говорить, что линейный оператор A_0, действующий в $\mathfrak{L}$ с некоторой области определения $\mathfrak{D}_{A_0} \subset \mathfrak{L}$ эрмитов, если

$$(A_0 g, f) = (g, A_0 f) \quad \text{для любых } g, f \in \mathfrak{D}_{A_0},$$

и множество $\mathfrak{D}_{A_0}$ „плотно“ в $\mathfrak{L}$, т.е. для любого $f \in \mathfrak{L}$ найдется последовательность $\{g_n\} \in \mathfrak{D}_{A_0}$ такая, что

$$\lim_{n \to \infty} \|f - g_n\| = 0.$$

Легко видеть (см. [1з]), что так определенный эрмитов оператор будет обладать свойством, что

$$\|Ag\| = 0, \quad \text{если } \|g\| = 0.$$

Поэтому, если отождествить в $\mathfrak{L}$ всякую пару элементов g_1, g_2, для которых $\|g_1 - g_2\| = 0$, то $\mathfrak{L}$ обратится в некоторое линейное множество $\hat{\mathfrak{L}}$, которое можно будет рассматривать, как плотную часть некоторого гильбертова пространства $\mathfrak{H}$; при этом A_0 породит в $\mathfrak{L}$, а следовательно, и в $\mathfrak{H}$ некоторый обычный эрмитов оператор $\hat{A}_0$, замыкание которого обозначим через A.

Пусть теперь для A_0 существует направляющая система функционалов $\Phi_j(f, \lambda)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$, обладающая следующими свойствами *):

1) При любом фиксированном $f \in \mathfrak{L}$ функции $\Phi_j(f; z)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ суть целые функции z.

2) Хотя бы при одном значении z функционалы $\Phi_j(f; z)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ линейно независимы.

3) Какие бы ни были элементы $f_0 \in \mathfrak{L}$ и скаляр z_0, уравнение $A_0 g - z_0 g = f_0$ имеет решение $g \in \mathfrak{D}_{A_0}$ тогда и только тогда, если $\Phi_j(f_0; z_0) = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$.

При этих предположениях, как показано в [1з], существует эрмитова матрица-функция $T(\lambda) = \|\tau_{jk}(\lambda)\|_1^m$ с неубывающей формой

$$\sum_{j,\, k=1}^{m} \tau_{jk}(\lambda) \xi_j \overline{\xi}_k$$

такая, что для любых g, f:

$$(f, g) = \sum_{j,\, k=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_j(f; \lambda) \overline{\Phi_k(f; \lambda)}\, d\tau_{jk}(\lambda). \tag{9.1}$$

Из (9.1) вытекает, что если для некоторого $f \in \mathfrak{L}$ тождественно относительно z:

$$\Phi_j(f; z) \equiv 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m), \tag{9.2}$$

то $\|f\| = 0$.

Поэтому без ограничения общности и мы можем предположить, что выполняется условие

4) Множество $\mathfrak{L}_0$ всех $f \in \mathfrak{L}$, для которых выполняется (9.2), состоит из одного ноль-вектора.

В самом деле, в противном случае мы перешли бы от рассмотрения $\mathfrak{L}$ и A_0 к рассмотрению фактор-пространства $\mathfrak{L}/\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{L}'$ и оператора A_0', порождаемого в $\mathfrak{L}'$ оператором A_0, который уже будет иметь

---

*) Требование 1) с сохранением всех последующих выводов можно заменить более слабым, а именно: существует область G, содержащая вещественную ось, в которой все функции $\Phi_j(f; z)$ $(j=1,2,\ldots, m;\ f \in \mathfrak{H})$ аргумента z голоморфны. При таком ослаблении условия 1) в условиях 2) и 3) скаляр z следует считать принадлежащим G.

направляющую систему функционалов, обладающую всеми свойствами 1) — 4).

Если условиться нормировать матрицу-функцию $T(\lambda)$ так, чтобы, например *):

1°. $T(\lambda-0)=T(\lambda)$, 2°. $T(0)=0$,

то она будет однозначно опеределяться соотношениями (9.1) в том и только том случае, если хотя бы одно из дефектных чисел оператора A равно нулю.

Согласно свойству 3) направляющей системы при любом z фактор-пространство $\mathfrak{L}/(A_0-zI)\mathfrak{D}_{A_0}$ максимум m-мерно. Отсюда, после простых рассуждений (см. стр. 21), заключаем, что дефектные числа m_+ и m_- оператора A (т. е. размерности пространств $\mathfrak{N}_z=\mathfrak{H}\ominus(A_0-zI)\mathfrak{D}_A$ при $\operatorname{Im} z>0$ и $\operatorname{Im} z<0$) не превосходят m.

Индекс дефекта (m_+, m_-) оператора A будем называть также индексом-дефекта оператора A_0.

Нас будет интересовать тот случай, когда

$$m_+=m_-=m.$$

Теорема 13. *Если эрмитов оператор A_0 имеет направляющую систему функционалов $\Phi_j(f;z)$ $(j=1, 2,\ldots, m)$, обладающую свойствами 1)—4), а его индекс-дефекта есть (m, m), то произведение (f, g) не сингулярно, т. е.*

$$(f, f)>0 \quad \text{при} \quad f\neq 0, \tag{9.3}$$

а оператор A_0 регулярен.

Доказательство. Из свойств 1) — 3) легко вытекает (см. [1з]) существование такой системы векторов $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$, что

$$\Delta(z)\doteq|\Phi_j(u_k;z)|_1^m\neq 0.$$

Для каждой точки z, в которой $\Delta(z)\neq 0$, любому $f\in\mathfrak{L}$ однозначно отвечает вектор-функция

$$\mathfrak{f}_M(z)=\sum_{k=1}^{m} f_u^{(k)}(z)\,u_k \tag{9.4}$$

со значениями из линейной оболочки M векторов $u_1,\ldots,u_m$, такая, что уравнение

$$A_0g-zg=f-\mathfrak{f}_M(z) \tag{9.5}$$

будет иметь решение $g\in\mathfrak{D}_{A_0}$.

Действительно, согласно 3) уравнение (9.5) будет иметь решение в том и только в том случае, если

$$\Phi_k(f-\mathfrak{f}_M(z), z)=0 \qquad (k=1, 2,\ldots, m),$$

т. е. если

$$\sum_k f_u^{(k)}(z)\,\Phi\,(u_k;z)=\Phi\,(f;z) \qquad (j=1, 2,\ldots, m). \tag{9.6}$$

---

*) Нормировка $T(-\infty)=0$ теперь не всегда возможна, так как матрица $T(\lambda)$ может быть неограниченной и предел $T(-\infty)=\lim\limits_{\lambda\to-\infty}T(\lambda)$ может не существовать.

Отсюда $f_u^{(k)}(z)$ $(k=1, 2, \ldots, m)$ определяются однозначно и притом как мероморфные функции z.

При естественном гомоморфизме $\mathfrak{L}$ на $\hat{\mathfrak{L}}$, при котором $f \in \mathfrak{L}$ переходит в $\hat{f} \in \hat{\mathfrak{L}}$, равенство (9.5) перейдет в следующее:

$$A\hat{g} - z\hat{g} = \hat{f} - \hat{\mathfrak{f}}_M(z),$$

где

$$\hat{\mathfrak{f}}_M(z) = \sum f_u^{(k)}(z)\, \hat{u}_k.$$

Таким образом, для любого $\hat{f} \in \hat{\mathfrak{L}}$ имеется мероморфная вектор-функция $\mathfrak{f}_M(z)$ со значениями из $\hat{\mathfrak{M}}$ (линейной оболочки $u_1, u_2, \ldots, u_m$) и с полюсами, расположенными в нулях $\Delta(z)$, такая что

$$\hat{f} - \hat{\mathfrak{f}}_M(z) \in \mathfrak{M}_z = (A - zI)\, \mathfrak{D}_A. \tag{9.7}$$

На основании теоремы 9 заключаем, что оператор A регулярен.

Нам остается доказать (9.3), т. е. что если для некоторого $g \in \mathfrak{L}$ вектор $\hat{g}=0$, то $g=0$. Но если $\hat{f}^0=0$, то согласно (9.7)

$$\hat{\mathfrak{f}}_M(z) \in \mathfrak{M}_z, \text{ если } \Delta(z) \neq 0.$$

Если допустить теперь, что $g \neq 0$, то согласно условию 4) и (9.6) можно будет утверждать, что не все $g_u^{(j)}(z)$ $(j=1, 2, \ldots, m)$ тождественно равны нулю.

Таким образом, векторы $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \ldots, \hat{u}_m$ линейно зависимы по модулю $\mathfrak{M}_z$ для всех z за исключением, может быть, тех, в которых $\Delta(z) = 0$ или $g_u^{(1)}(z) = \ldots = g_u^{(m)}(z) = 0$.

Возьмем произвольное невещественное z, не принадлежащее к указанному исключительному множеству. В силу (9.7)

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{M}_z + \hat{\mathfrak{M}}$$

и, следовательно, $\hat{\mathfrak{M}}$ по модулю $\mathfrak{M}_z$ m-мерно (иначе $\mathfrak{N}_z = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}_z$ имело число измерений $< m$).

Мы пришли к противоречию.

Теорема доказана.

2. При доказательстве (9.3), как легко видеть, мы использовали лишь тот факт, что одно из чисел m_+, m_- равно нулю.

Предоставляем читателю доказать с помощью рассуждений, аналогичных предыдущим, следующее предложение.

Теорема 14. *Если в $\mathfrak{L}$ существует k линейно независимых векторов $g_1, \ldots, g_k$, таких что*

$$(g_1, g_1) = \ldots = (g_k, g_k) = 0,$$

то дефектные числа m_+ и m_- оператора A удовлетворяют неравенствам

$$m_+ \leqslant m - k, \ m_- \leqslant m - k.$$

Для случая $k = m$, но при более общих предположениях относительно направляющей системы функционалов теорема 14 была доказана ранее (см. [1з], теорему 3).

3. В той же статье [1з] мы описали, как получить все матрицы $T(\lambda)$, дающие представления (9.1).

Имея в виду примеры, разбираемые в следующем параграфе, мы ограничимся здесь случаем, когда существует базис $u_1, \ldots, u_m$, биортогональный с функционалами Φ $(j=1, 2, \ldots, m)$, т.е. при любом z

$$\Phi_j(u_k; z) = \delta_{jk} \quad (j, k = 1, 2, \ldots, m). \tag{9.8}$$

В этом случае координаты $f_u^{(j)}(z)$ $(j=1, 2, \ldots, m)$ вектор-функции $\mathfrak{f}_M(z)$ будут, согласно (9.6), совпадать с соответствующими $\Phi_j(f; z)$ $(j=1, 2, \ldots, m)$, т. е. при любом z

$$\Phi\,(f; z) = f_u^{(j)}(z) \quad (j=1, 2, \ldots, m;\ f \in \mathfrak{H}).$$

Матрица $T(\lambda)$, дающая представление (9.1) скалярного произведения (g, f), будет ограниченной и ее общий вид при нормировке

$$T(\lambda-0) = T(\lambda) \quad (-\infty < \lambda < \infty), \quad T(-\infty) = 0$$

будет даваться формулами

$$\tau_{jk}(\lambda) = (E_\lambda \hat{u}_j, \hat{u}_k) \quad (j = 1, 2, \ldots, m)$$
$$(T(\lambda) = \|\tau_{jk}\|_1^m), \tag{9.9}$$

где E_λ — какая-либо спектральная функция оператора A.

Если скалярное произведение не сингулярно, то $f = \hat{f}$ и колпачки над $u_j (j=1, 2, \ldots, m)$ можно будет отбросить. Формулы (9.9) совпадают с формулами для $T(\lambda)$, данными в § 3, но они теперь установлены при других предположениях относительно оператора A: в частности, его дефектные числа m_+ и m_- теперь не обязательно равны m, они $\leqslant m$.

§ 10. Два примера целых операторов

Простейший пример целого оператора с индексом дефекта (1,1) впервые встретился при изучении так называемого неопределенного случая классической степенной проблемы моментов; целый оператор, отвечающий этому случаю проблемы моментов, всегда минимального типа, т. е. для него $h_M(\varphi) = 0$ (см. § 8).

Существование целых операторов нормального (неминимального) типа с индексом дефекта (1.1) было обнаружено нами в связи с проблемой продолжения эрмитово-положительных функций [1б, к].

Для того чтобы построить нетривиальные примеры целых операторов *) минимального и неминимального типа с любым индексом дефекта (m, m), необходимо соответствующим образом обобщить классическую проблему моментов и проблему продолжения эрмитово-положительных функций.

*) Не распадающихся в прямую сумму целых операторов с индексом дефекта (1.1).

I. Матричная проблема моментов в интервале $(-\infty, \infty)$

1. Обозначим через M m-мерное пространство векторов $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ с комплексными координатами.

Если $H = \| h_{jk} \|_1^m$ — матрица m-го порядка, а $x = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$, $y = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$, то под $y^* Hx$ мы будем понимать выражение, определяемое равенством

$$y^* Hx = \sum_{j, k=1}^{m} h_{jk} \xi_k \overline{\eta}_j.$$

Пусть дана некоторая последовательность $\{S_k\}_0^\infty$ эрмитовых матриц m-го порядка. Нас будет интересовать вопрос, когда эта последовательность является последовательностью степенных моментов некоторой матрицы распределения, т. е. когда последовательность $\{S_k\}_0^\infty$ допускает представление

$$S_k = \int_{-\infty}^{\infty} t^k dT(\lambda), \tag{10.1}$$

где $T(\lambda) = \| \tau_{jk}(\lambda) \|$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ — ограниченная матрица, обладающая тем свойством, что при любом $x \in M$

$$x^* T(\lambda)\, x \geqslant 0 \quad (-\infty < \lambda < \infty),$$

и нормированная так, что

$$T(\lambda - 0) = T(\lambda) \quad (-\infty < \lambda < \infty), \quad T(-\infty) = 0.$$

Для последовательности $\{S_k\}_0^\infty$, допускающей представления (10.1), возникают дальнейшие вопросы, в частности, вопрос единственности представления (10.1) и вопрос описания всех представлений в случае неединственности.

Критерий существования представления (10.1) устанавливается очень просто.

А) Для того чтобы последовательность эрмитовых матриц $\{S_k\}_0^\infty$ допускала представление (10.1), необходимо и достаточно, чтобы для любых $x_j \in M$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ выполнялись условия

$$\sum_{j, k=0}^{n} x_k^* S_{+k} x_j \geqslant 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{10.2}$$

Доказательство. Необходимость условий (10.2) получается из представления (10.1) тривиальным образом [8].

Докажем достаточность этих условий.

Обозначим через $\mathfrak{L}$ линейное множество всех „полиномов“ $f(\lambda)$ от символа λ:

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k x_k \qquad (x_k \in M;\ n = 0, 1, \ldots). \tag{10.3}$$

Зададим в $\mathfrak{L}$ билинейный функционал (f, g), полагая

$$(f,\ g) = \sum_{i=0}^{p} \sum_{k=0}^{n} y^* S_{i+k} x_k \tag{10.4}$$

для f вида (10.3) и

$$g(\lambda) = \sum_{k=0}^{p} \lambda^k y_k \qquad (y_k \in M;\ k=0, 1, \ldots, p).$$

В силу условий (10.2) для любого $f \in \mathfrak{L}$

$$(f, f) \geqslant 0.$$

Таким образом, (f, g) — некоторое скалярное (возможно сингулярное) произведение в $\mathfrak{L}$.

Определим в $\mathfrak{L}$ оператор A_0, полагая для любого $f \in \mathfrak{L}$ вида (10.3)

$$A_0 f(\lambda) = \lambda f(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} \lambda^{j+1} x_j.$$

Легко видеть, что A_0 эрмитов оператор.

Мы покажем, что для A_0 и $\mathfrak{L}$ выполняются все условия п. 3, § 9.

Пространство M можно рассматривать как подпространство $\mathfrak{L}$ (оно есть множество всех полиномов $f \in \mathfrak{L}$ нулевой степени).

Если в выражении $f(\lambda)$ вместо символа λ вставить число z, то мы получим вектор $f(z) \in M$, при этом

$$f(\lambda) - f(z) = (\lambda - z) g_z(\lambda), \quad \text{где } g_z(\lambda) = \sum_{j+k<n} \lambda^j z^k x_{j+k}.$$

Таким образом,

$$f - f(z) = (A_0 - zI) g_z.$$

Таким образом, в согласии с обозначениями § 9

$$f(z) = \mathfrak{f}_M(z).$$

При этом, если положить

$$u_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ \ u_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, \quad u_m = (0, 0, \ldots, 1),$$

то $f(z)$ представится в виде

$$f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} f_u^{(j)}(z)\, u_i,$$

где функционалы

$$f_u^{(j)}(z) = \Phi(f;\ z) \qquad (j=1, 2, \ldots, m,\ f \in \mathfrak{L})$$

будут удовлетворять всем условиям 1)—4) направляющей системы, указанным в § 9, а также соотношениям (9.8).

Таким образом, если положить

$$\tau_{jk}(\lambda) = (E_\lambda u_j,\ u_k) \qquad (j, k=1, 2, \ldots, m), \tag{10.5}$$

где E_λ — какая-либо спектральная функция оператора A, получаемого известным образом из оператора A_0 (см. § 9), то будем иметь

$$(f, g) = \sum_{i, k=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(j)}(\lambda) \overline{f^{(k)}(\lambda)}\, d\tau_{ik}(\lambda). \tag{10.6}$$

Сопоставление (10.4) и (10.6) для $f=t^n u_j$, $g=u_k$ дает

$$u_k^* S_n u_j = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^n d\tau_{jk}(\lambda) \qquad (j, k=1, 2, \ldots, m;\ n=0, 1, \ldots), \tag{10.7}$$

что равносильно (10.1) при $T(\lambda) = \|\tau_{jk}\|_1^m$.

Предложение A) доказано.

Так как из (10.1) вытекает (10.7), а следовательно (10.6), то формулами (10.5) задается общее решение проблемы моментов (10.1).

2. Проблему моментов (10.1) будем называть *вполне неопределенной*, если замкнутый эрмитов оператор A, порождаемый оператором A_0, имеет индекс (m, m). В общем случае индекс-дефекта оператора A есть (m_+, m_-), где $0 \leqslant m_+, m_- \leqslant m$.

В силу теоремы 13 можно утверждать:

B) *Для того чтобы проблема моментов была вполне неопределенной, необходимо, чтобы формы* (10.2) *были строго положительны.*

Строгая положительность форм (10.2) означает, что знак = в (10.2) возможен лишь при $x_0=x_1=\ldots=x_n=0$, или что то же

$$(f, f) > 0 \quad \text{при } f \neq 0. \tag{10.8}$$

В дальнейшем предполагаем, что это условие выполняется.

Тогда оператор A есть не что иное, как замыкание $\bar{A}_0$ оператора A_0 в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, являющемся замыканием пространства $\mathfrak{L}$.

Пусть теперь индекс-дефекта оператора A равен (m, m). Так как для любого $f \in \mathfrak{L}$ соответствующее $\mathfrak{f}_M(z) = f(z)$ есть „полином" и $\bar{\mathfrak{L}} = \mathfrak{H}$, то по теореме 9 оператор A регулярен. Более того, на основании теоремы 7 § 5 можно будет утверждать, что и для любого $f \in \mathfrak{H}$ вектор-функция $\mathfrak{f}_M(z)$ — целая функция. Таким образом, A — целый оператор.

Кроме того, для любого $f \in \mathfrak{L}$, очевидно

$$\lim_{|z| \to \infty} \frac{\log \|f(z)\|}{|z|} = 0,$$

а следовательно, по теореме 12 оператор A минимального типа, т. е.

$$\lim_{|z| \to \infty} \frac{\log \nabla(z)}{|z|} = 0,$$

где

$$\nabla(z) = \max_{f \in \mathfrak{H}} \frac{\|\mathfrak{f}_M(z)\|}{\|f\|}.$$

Итак, нами доказано

C) *Оператор A, отвечающий вполне неопределенной проблеме моментов* (10.1), *есть целый оператор минимального типа.*

3. Так как для целого оператора A отображение $f \to f(z) = \mathfrak{f}_M(z)$ линейно и непрерывно ($\nabla(z) < \infty$), то $\nabla(z)$ можно еще так определить:

$$\nabla(z) = \sup_{f \in \mathfrak{L}} \frac{\|f(z)\|}{\|f\|}. \tag{10.9}$$

Это определение функции $\nabla(z)$ имеет смысл во всех случаях, независимо от того, каков индекс-дефекта оператора A, если только допускать для $\nabla(z)$ и значения равные ∞.

D) Пусть z_0 — произвольно выбранная точка верхней (нижней) полуплоскости.

Конечность $\nabla(z_0)$ есть необходимое и достаточное условие того, чтобы дефектное число m_+ (соответственно m_-) оператора A равнялось m.

Доказательство. Положим $\mathfrak{M}_z = (A - zI)\mathfrak{D}_A$ и $\mathfrak{M}_z^0 = (A_0 - zI)\mathfrak{L} = (A - zI)\mathfrak{L}$.

Так как $A = \overline{A}_0$, то при $\operatorname{Im} z \neq 0$ $\mathfrak{M}_z = \overline{\mathfrak{M}_z^0}$.

С другой стороны, так как для любого $f \in \mathfrak{L}$ и $h \in M$ условие $g = f - h \in \mathfrak{M}_z^0$ эквивалентно $h = f(z)$, то определение (10.9) функции $\nabla(z)$ эквивалентно следующему:

$$\nabla(z) = \sup_{h \in \mathfrak{M},\, g \in \mathfrak{M}_z^0} \frac{\|h\|}{\|g - h\|} = \sup_{h \in \mathfrak{M},\, g \in \mathfrak{M}_z^0} \frac{\|h\|}{\|h - g\|}.$$

Таким образом (см. § 7, п. 2), функция $\nabla^{-1}(z)$ есть синус наименьшего угла наклона M к $\mathfrak{M}_z$.

Поэтому, если при некотором z_0 ($\operatorname{Im} z_0 \neq 0$) $\nabla(z_0) < \infty$, то M не пересекается с $\mathfrak{M}_{z_0}$; следовательно, $\mathfrak{H}$ по модулю $\mathfrak{M}_{z_0}$ m-мерно, т.е. $\mathfrak{N}_{z_0}$ m-мерно.

Предложение доказано.

4. Обозначим через $\{d_k\}_1^\infty$ полную ортонормированную систему в $\mathfrak{H}$, получающуюся путем последовательной ортогонализации и нормирования последовательности:

$$u_1, u_2, \ldots, u_m, \lambda u_1, \lambda u_2, \ldots, \lambda u_m, \lambda^2 u_1, \lambda^2 u_2, \ldots, \lambda^2 u_m, \ldots \tag{10.10}$$

Для случая вполне неопределенной проблемы моментов согласно результатам § 7 можно утверждать, что

$$\sum_1^\infty \|d_k(z)\|^2 \leqslant \nabla^2(z) \leqslant m \sum_1^\infty \|d_k(z)\|^2. \tag{10.11}$$

Нетрудно показать, что это неравенство сохраняется и в самом общем случае. Чтобы в этом убедиться, обозначая через $\mathfrak{L}_{nm}$ линейную оболочку первых nm-элементов из (10.10), т. е. множество всех „полиномов“ $f \in \mathfrak{L}$ степени $\leqslant n-1$, положим

$$\nabla_n(z) = \max_{f \in \mathfrak{L}_n} \frac{\|f(z)\|^2}{\|f\|}.$$

Обозначим через A_m оператор умножения на λ, действующий из $\mathfrak{L}_n$ в $\mathfrak{L}_{n-1}$.

Легко видеть, что хотя A_m имеет в $\mathfrak{L}_n$ неплотную область определения, в известном смысле его индекс-дефекта есть (m, m), и для него в существенном можно повторить рассуждения § 7, на основе которых было выведено соотношение (10.11), и, таким образом, найдем

$$\sum_1^{mn} \| d_k(z) \|^2 \leqslant \nabla_n^2(z) \leqslant m \sum_1^{mn} \| d_k(z) \|^2.$$

Устремляя затем n к бесконечности, получим (10.11).

Отсюда из предположения D) вытекает следующий критерий:

E) Пусть z_0 — произвольно выбранное невещественное число. Для того чтобы проблема моментов (10.1) была вполне неопределенной, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_1^{\infty} \| d_k(z_0) \|^2 < \infty, \quad \sum_1^{\infty} \| d_k(\bar{z}_0) \|^2 < \infty. \tag{10.12}$$

Это предложение является непосредственным обобщением критерия Гамбургера [8, 9] неопределенности классической проблемы моментов (случай $m = 1$).

Заметим, что если матрицы $S_k (k = 0, 1, \ldots)$ суть вещественные симметрические матрицы, то оператор A — вещественный при естественном определении в $\mathfrak{L}$ операции комплексного сопряжения, и поэтому $m_+ = m_-$.

Таким образом, в этом случае второе из условий (10.12) есть следствие первого.

5. Наши исследования [1л] об обобщенных резольвентах эрмитовых операторов с индексом-дефекта (m, m) дают возможность построить конструктивные формулы для общего решения $T(\lambda)$ рассматриваемой проблемы моментов.

Однако эти результаты мы вынуждены опустить, поскольку здесь не изложены исследования о резольвентах.

Заметим только, что на основании теоремы 5 для случая вполне неопределенной проблемы моментов множество всех полиномиальных вектор-функций $\mathfrak{f}(\lambda) = (f_u^{(1)}(\lambda), \ldots, f_u^{(m)}(\lambda)$ $(f \in \mathfrak{L})$ будет плотно в $\mathfrak{L}_T$ в том и только том случае, если $T(\lambda)$ порождено ортогональной спектральной функцией E_λ оператора A ($T(\lambda)$ — каноническое решение проблемы). Каноническое решение $T(\lambda)$ будет матрицей-функцией чистых скачков и все ее скачки будут расположены в нулях некоторой целой функции минимального типа.

Из этих канонических $T(\lambda)$ выделяются те $T_\xi(\lambda)$, которые порождаются самосопряженными расширениями A_ξ в $\mathfrak{H}$ оператора A, имеющими в точке $\xi\ (-\infty < \xi < \infty)$ собственное число кратности m.

Спектр оператора A_ξ, как было показано в § 8 [см. (8.15) и (8.17)], содержится в множестве нулей целой функции минимального типа.

$$(\lambda-\xi)^m \left\| \sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{d_\nu^{(j)}(\xi)}\, d_\nu^{(k)}(\lambda) \right\|_{j,\,k=1}^{m}, \tag{10.13}$$

где $d_\nu^{(j)}(\lambda)$ $(j=1, 2, \ldots, m)$ — координаты вектора d_ν $(\nu=1, 2, \ldots,)$ т.е.

$$d_\nu = \sum_{j=1}^{m} d_\nu^{(j)}(\lambda)\, u \qquad (\nu=1, 2, \ldots).$$

Легко показать, что из всех решений $T(\lambda)$ проблемы моментов (10.1) решение $T_\xi(\lambda)$ отличается тем, что имеет „максимальный" скачок в точке ξ, т. е.

$$T(\xi+0) - T(\xi-0) \leqslant T_\xi(\xi+0) - T_\xi(\xi-0), \tag{10.14}$$

причем знак $=$ возможен лишь в случае, когда

$$T(\lambda) \equiv T_\xi(\lambda) \qquad (-\infty < \lambda < \infty)\,^{*)}.$$

Положим для любого z

$$\Gamma(z) = \|\gamma_{jk}(z)\|_1^m, \quad \text{где } \gamma_{jk}(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu^{(j)}(z)\, \overline{d_\nu^{(k)}(z)} \qquad (j,\, k=1, 2, \ldots, m).$$

Нетрудно показать, что

$$T_\xi(\xi+0) - T_\xi(\xi-0) = \Gamma^{-1}(\xi) \qquad (-\infty < \xi < \infty). \tag{10.15}$$

6. Приведем еще без доказательства следующее правило вычисления дефектных чисел m_+ и m_- оператора A в общем случае.

Положим для любого z:

$$\Gamma_n(z) = \|\gamma_{jk}^{(n)}(z)\|_{j,\,k=1}^{m} \qquad (n=1, 2, \ldots), \tag{10,16'}$$

где

$$\gamma_{jk}^{(n)}(z) = \sum_{\nu=1}^{n} d_\nu^{(j)}(z)\, \overline{d_\nu^{(k)}(z)} \qquad (j,\, k=1, 2, \ldots, m). \tag{10.16''}$$

Нетрудно показать, что для любого z существует предельная эрмитова матрица

$$\lim_{n\to\infty} \Gamma_n^{-1}(z) = \Gamma^{(-1)}(z). \tag{10.17}$$

Ее ранг обозначим через $r(z)$. Оказывается, что

$$r(z) = \begin{cases} m_+ & \text{при } \operatorname{Im} z > 0 \\ m_- & \text{при } \operatorname{Im} z < 0. \end{cases} \tag{10.18}$$

В частности, оператор A будет самосопряжен, если для произвольно выбранного невещественного z

$$\Gamma^{(-1)}(z) = \Gamma^{(-1)}(\bar{z}) = 0. \tag{10.19}$$

---

*) Собственно, это замечание и нижеследующая формула (10.15) могут быть сделаны в отношении матриц-функций $T(\lambda)$, соответствующих любому целому оператору. Во избежание недоразумений в толковании знака $<$ в (10.14), поясним, что для двух различных эрмитовых матриц H_1 и H_2 m-го порядка мы пишем $H_1 < H_2$, если при любом $x \in M$

$$x^* H_1 x \leqslant x^* H_2 x.$$

Оператор A будет минимален, если хотя бы одно из равенств

$$\Gamma^{(-1)}(z) = 0, \quad \Gamma^{(-1)}(\bar{z}) = 0 \quad (\operatorname{Im} z \neq 0) \tag{10.20}$$

имеет место.

Согласно теореме 2 нашей статьи [1з] единственность представления (10.1) будет иметь место, если оператор A максимален, т. е. если хотя бы одно из равенств (10.20) имеет место.

7. Остановимся еще на одном способе образования последовательностей $\{S_k\}_0^\infty$, которым соответствует вполне определенный случай проблемы моментов.

Если $\{S_k^0\}_0^\infty$ и $\{S_k'\}_0^\infty$ — две последовательности „моментов" (т.е. последовательности, допускающие представления типа (10.1), то, очевидно, и $\{S_k\}_0^\infty$ $(S_k = S_k^0 + S_k',\ k = 1, 2)$ будет последовательностью моментов.

Каждой из этих последовательностей отвечает свое скалярное произведение в $\mathfrak{L}$: обозначим эти произведения соответственно через $(g, f)^0$, $(g, f)'$ и (g, f). Очевидно

$$(g, f) = (g, f)^0 + (g, f)' \qquad (g, f \in \mathfrak{L}).$$

Скалярным произведениям (g, f) и $(g, f)^0$ отвечают нормы $\|f\|$ и $\|f\|^0$ и функции $\nabla(z)$, $\nabla^0(z)$. Очевидно:

$$\|f\|^0 \leqslant \|f\| \quad (f \in \mathfrak{L}).$$

Так как в конечномерном пространстве M все нормы топологически эквивалентны, то в предположении несингулярности произведения $(f, g)^0$ найдется константа $q \geqslant 1$ такая, что

$$\|f\| \leqslant q \|f\|^0 \quad \text{при} \quad f \in M.$$

Отсюда, согласно (10.9),

$$\Gamma(z) \leqslant q \Gamma^0(z).$$

Следовательно, если проблема моментов для последовательности $\{S_k^0\}$ вполне неопределенная, то таковой она будет и для последовательности $\{S_k\}$.

Пусть теперь последовательностям числовых моментов $\{s_k^{(j)}\}_0^\infty$ $(j = 1, 2, \ldots m)$ отвечает неопределенный случай классической проблемы моментов.

Тогда, очевидно, и последовательности $\{S_k^0\}_0^\infty$, где

$$S_k^0 = \begin{Vmatrix} s_k^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_k^{(2)} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & s_k^{(m)} \end{Vmatrix} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

будет отвечать вполне неопределенный случай проблемы моментов.

Отправляясь от последовательности $\{S_k^0\}$, можно образовывать уже более сложные последовательности вида $\{S_k^0 + S_k'\}$, которым будет отвечать вполне неопределенный случай проблемы моментов.

II. Проблема представления непрерывной эрмитово-положительной матрицы-функции

I′. Пусть a — некоторое число >0. Обозначим через $\mathfrak{P}_a$ совокупность непрерывных матриц-функций $\mathrm{F}(t) = \| F_{jk}(t) \|_1^m$ $(-a \leqslant t \leqslant a)$, обладающих свойством, что для любых $x_1 \in M, \ldots, x_n \in M$ *) и $t_1 \in \left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right), \ldots, t_n \in \left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ $(n = 1, 2, \ldots)$:

$$\sum_{j,\, k=1}^{n} x_k^* \mathrm{F}(t_j - t_k) x_j \geqslant 0. \tag{10.21}$$

Нетрудно видеть, что свойство (10.21) влечет равенство

$$\mathrm{F}(-t) = \mathrm{F}^*(t) \qquad (-a \leqslant t \leqslant a),$$

т. е.

$$F_{jk}(-t) = F_{kj}(t) \qquad (-a \leqslant t \leqslant a; \ \ j, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Имеет место предложение:

A′) *Для того, чтобы матрица-функция* $\mathrm{F}(t) = \| f_{jk}(t) \|_1^m$ $(-a \leqslant t \leqslant a)$ *допускала представление*

$$\mathrm{F}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, dT(\lambda) \qquad (-a \leqslant t \leqslant a), \tag{10.22}$$

где $T(\lambda)$ — *некоторая матрица распределения, необходимо и достаточно, чтобы* $\mathrm{F}(t) \in \mathfrak{P}$.

Это предложение было уже установлено ранее [1з]. Для лучшего уяснения идей мы снова приведем доказательство в провариированном виде **).

Доказательство. Непрерывность матрицы-функции $\mathrm{F}(t)$, допускающей представление (10.22), а также выполнение для нее неравенств (10.21), проверяется непосредственно.

Докажем обратную часть теоремы, т. е., что для $\mathrm{F}(t) \in \mathfrak{P}_a$ существует представление (10.22).

Обозначим через $\mathfrak{L}$ совокупность всех вектор-функций $f(t) = (f_1(t); \ldots; f_m(t))$ $(0 \leqslant t \leqslant a)$, координаты которых суть функции ограниченной вариации в интервале $(0, a)$, обращающиеся в его концах в 0, так что

$$f(0) = f(a) = 0. \tag{10.23}$$

Для всяких двух элементов $g, f \in \mathfrak{L}$ положим

$$(g, f) = \int_0^a \int_0^a dg^*(t)\, \mathrm{F}(s-t)\, df(s) = \sum_{,\, k=1}^{m} \int_0^a \int_0^a \mathrm{F}_{ik}(s-t)\, df\ (s)\, \overline{dg_k}(t). \tag{10.23}$$

---

*) M означает то же, что и в предыдущем разделе 1 этого параграфа.

**) Тем более, что доказательство, данное в [1з], изложено очень кратко, и в одном месте имеется досадная опечатка: вместо двух условий (10.23) указано *одно* условие

$$f(0) = f(a).$$

Принимая во внимание (10.21), легко убедиться, что (g, f) будет некоторым скалярным (возможно, сингулярным) произведением в $\mathfrak{L}$.

Обозначим через $\mathfrak{D}_0$ множество всех $f \in \mathfrak{L}$, для которых существует в каждой точке $t \in (0, a)$ производная $f'(t)$, которая притом также принадлежит $\mathfrak{L}$.

Определим на $\mathfrak{D}_0$ оператор A_0, полагая

$$A_0 f = \frac{1}{i} f' \qquad (f \in \mathfrak{D}_0).$$

Покажем, что оператор A_0 эрмитов. Для этого предположим сперва, что $\mathbf{F}(t)$ имеет непрерывную производную. Тогда для любых $g, f \in \mathfrak{D}_0$, принимая во внимание условия

$$g(0) = g(a) = f(0) = f(a) = 0,$$

найдем путем интегрирования по частям:

$$(Af, g) = \frac{1}{i} \int_0^a \int_0^a dg^*(t) \mathbf{F}(s-t)\, df'(s) = \frac{1}{i} \int_0^a \int_0^a g'^*(t) \mathbf{F}(s-t)\, df'(s)\, dt =$$

$$= -\frac{1}{i} \int_0^a \int_0^a g'^*(t) \frac{\partial F(s-t)}{\partial s} f'(s)\, ds\, dt = \frac{1}{i} \int_0^a \int_0^a g'^*(t) \frac{\partial \mathbf{F}(s-t)}{\partial t}\, df(s)\, dt =$$

$$= -\frac{1}{i} \int_0^a \int_0^a dg'^*(t) \mathbf{F}(s-t)\, df(s) = (f, Ag).$$

Рассмотрим теперь общий случай матрицы-функции $\mathbf{F}(t)$.

Пусть $h > 0$, а $q = a/(a+h)$. Очевидно, что матрица-функция $F(qt)$ определена при $|t| \leqslant a + h$ и принадлежит $\mathfrak{P}_{a+h}$.

Легко далее видеть, что усредненная матрица-функция

$$\mathbf{F}_h(t) = \frac{1}{h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{F}(q(t+\xi-\eta))\, d\xi\, d\eta = \frac{2}{h^2} \int_0^h (h-r) \mathbf{F}(q(t+r))\, dr$$

также принадлежит $\mathfrak{P}_a$. Но матрица-функция $\mathbf{F}_h(t)$ уже диференцируема. Обозначая соответствующее ей в $\mathfrak{L}$ скалярное произведение через $(g, f)_h$, будем, по доказанному, иметь

$$(A_0 g, f)_h = (g, A_0 f)_h \qquad (g, f \in \mathfrak{L}).$$

Переходя затем к пределу при $h \to 0$, найдем, что

$$(A_0 g, f) = (g, A_0 f) \quad (g, f \in \mathfrak{L}).$$

Если для некоторого $f \in \mathfrak{L}$ уравнение

$$A_0 g - zg = f \tag{10.24}$$

имеет решение, то оно единственно и

$$g(t)=\int_0^t e^{izs} f(s)\,ds \qquad (0\leqslant t\leqslant a).$$

Для того чтобы g, определяемое этим равенством, принадлежало $\mathfrak{D}_0 \subset \mathfrak{L}$, необходимо и достаточно, чтобы $g'(a)=0$. Таким образом, при данном $f\in\mathfrak{L}$ уравнение (10.24) будет разрешимо в том и только том случае, если

$$i\lambda\int_0^a e^{izs} f(s)\,ds=-\int_0^a e^{izs}\,df(s)=0.$$

Отсюда мы заключаем, что система функционалов

$$\Phi_j(f;\,z)=\int_0^a e^{izs} df_j(z) \qquad (j=1,\,2,\ldots,\,m) \tag{10.25}$$

является направляющей для A_0.

Положим

$$u_1=(\delta_0(t),\,0,\ldots,\,0)\,,\ldots,\,u_n=(0,\,0,\ldots,\,\delta_0(t)),$$

где через $\delta_s(t)$ $(0\leqslant s,\ t\leqslant a)$ мы обозначаем функцию

$$\delta_s(t)=\begin{cases}0 & \text{при } t\leqslant s\\ 1 & \text{при } t>s.\end{cases}$$

Тогда согласно (10.25)

$$\Phi_i(u_k;\,z)\equiv\delta_{jk} \qquad (j,\,k=1,\,2,\ldots,\,m). \tag{10.26}$$

Таким образом, система направляющих функционалов Φ_j $(j=1,\,2,\ldots,\,m)$ обладает всеми свойствами 1) —4), указанными в § 9, и на основании (10.26), согласно п. 3 § 9, скалярное произведение (g,f) допускает представление

$$(f,\,g)=\sum_{j,\,k=1}^{m}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_j(f;\,\lambda)\,\overline{\Phi_k(g;\,\lambda)}\,d\tau_{jk}(\lambda) \qquad (g,\,f\in\mathfrak{L}) \tag{10.27}$$

причем общий вид матрицы распределения $T(\lambda)=\|\tau_{jk}(\lambda)\|_1^m$, дающей это представление, получается по формуле

$$\tau_{jk}(\lambda)=(E_\lambda u_j,\,u_k) \quad (j,\,k=1,\,2,\ldots,\,m). \tag{10.28}$$

где E_λ — какая-либо спектральная функция замкнутого эрмитова оператора A, порождаемого известным образом оператором A_0.

Полагая в (10.27)

$$f=u_j^{(s)},\quad g=u_k^{(t)} \quad (j,\,k=1,\,2,\ldots,\,m;\ \ 0\leqslant s,\,t\leqslant a),$$

где

$$u_1^{(s)}=(\delta_s(t),\,0,\ldots,\,0),\ldots,\,u_m^{(s)}=(0,\,0,\ldots,\,\delta_s(t)), \tag{10.29}$$

мы получим согласно (10.25)

$$F_{jk}(s-t)=(u_i^{(s)},\ u_k^{(t)})=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(s-t)\lambda}d\tau_{jk}(\lambda) \qquad (j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ 0\leqslant s,\ t\leqslant a).$$

Эти равенства эквивалентны (10.22).

Теорема доказана.

Одновременно мы получили правило построения всех $T(\lambda)$, дающих представление (10.22).

2′. Аналогично соответствующему определению в степенной проблеме моментов будем называть проблему представления матрицы-функции $\mathbf{F}(t)\in\mathfrak{P}_a$ вполне неопределенной, если оператор A, порождаемый оператором A_0, имеет индекс-дефекта $(m,\ m)$.

Аналогом предложения В) будет предложение

В′) Для того чтобы проблема представления $F(t)\in\mathfrak{P}_a$ была вполне неопределенной, необходимо, чтобы форма

$$\int\limits_0^a dg^*(t)\,\mathbf{F}(s-t)\,df\,(t) \tag{10.30}$$

была положительной при $f\neq 0$.

Предложение непосредственно следует из теоремы 13.

Аналогом С) будет предложение

С′) Оператор A, отвечающий вполне неопределенной проблеме представления $\mathbf{F}(t)\in\mathfrak{P}_a$, есть целый оператор нормального типа с

$$h_M(\varphi)=\frac{a}{2}(|\sin\varphi|-\sin\varphi) \qquad (0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi) \tag{10.31}$$

если в качестве целого модуля M выбрана линейная оболочка векторов $u_1,\ u_2,\ldots,\ u_m$, определенных в (10.26).

Доказательство. В силу (10.25), при указанном выборе M для любого $f\in\mathfrak{L}$:

$$\mathfrak{f}_M(z)=\sum_{j=1}^{m}\Phi_j(f;\ z)\,u_j=\sum_{i=1}^{m}\Big(\int\limits_0^a e^{izt}\,df_j\,(t)\Big)\,u\ . \tag{10.32}$$

Таким образом, все вектор-функции $\mathfrak{f}_M(z)$ суть целые функции, а следовательно, и оператор A (замыкание A_0 в $\mathfrak{H}=\overline{\mathfrak{L}}$) цел.

Равенство (10.31) для индикатриссы $\mathfrak{h}_M\varphi$ функции

$$\Gamma_M(z)=\sup_{f\in\mathfrak{L}}\frac{\|\mathfrak{f}_M(z)\|}{\|f\|} \tag{10.33}$$

означает, что индикаторная диаграмма функции $\Gamma_M(z)$ есть отрезок мнимой оси $(0,\ -ai)$.

Из (10.32) нетрудно усмотреть, что

$$h(f;\varphi)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\|\mathfrak{f}_M(re^{i\varphi})\|}{\|f\|}\leqslant\frac{a}{2}(|\sin\varphi|-\sin\varphi)\qquad(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi),$$

что показывает, что индикаторная диаграмма каждой вектор-функции $\mathfrak{f}_M(z)$ $(f\in\mathfrak{L})$ содержится в отрезке $S=(0, ai)$.

С другой стороны, всякая точка $-is$ $(0\leqslant s\leqslant a)$ отрезка S является индикаторной диаграммой вектор-функции

$$u_1^{(s)}(z)=e^{isz}u_1,$$

в которую при отображении $f\to\mathfrak{f}_M(z)$ переходит элемент $u_1^{(s)}$ $(0\leqslant s\leqslant a)$, определенный в (10.29).

Следовательно, по теореме 12, S есть индикаторная диаграмма функции $F_M(z)$.

Предложение C′) доказано.

Замечание 10.1. Целый модуль M целого оператора, вообще говоря, не определяется оператором однозначно.

Например, для рассматриваемого оператора A целым модулем будет также линейная оболочка всякой системы векторов $u_1^{(s_1)}, u_2^{(s_2)}, \ldots, u_m^{(s_m)}$ $(0\leqslant s_1, \ldots, s_m\leqslant a)$.

Если, в частности, M заменить модулем $\tilde{M}$ с базисом

$$\tilde{u}_1=u_1^{\left(\frac{a}{2}\right)},\quad \tilde{u}_2=u_2^{\left(\frac{a}{2}\right)},\ \ldots,\ \tilde{u}_m=u_m^{\left(\frac{a}{2}\right)},$$

то

$$\mathfrak{f}_{\tilde{M}}(z)=e^{-\frac{iaz}{2}}\sum_{i=1}^{m}\left(\int_0^a e^{izt}\,df_i(t)\right)\tilde{u}_i.$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно поверить, что указанное выражение для $\mathfrak{f}_M(z)$ удовлетворяет условиям

$$\Phi_j(f-\mathfrak{f}_{\tilde{M}}(z), z)=0\qquad(j=1, 2, \ldots, m).$$

Легко видеть, что $\tilde{M}$ соответствует

$$h_{\tilde{M}}(\varphi)=\frac{a}{2}|\sin\varphi|\qquad(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi).$$

т. е. индикаторная диаграмма функции $F_{\tilde{M}}(z)$ есть отрезок мнимой оси $\left(-i\frac{a}{2},\ i\frac{a}{2}\right)$.

Можно показать, что при всяком выборе целого модуля M индикаторная диаграмма функции $F_M(z)$ будет отрезком мнимой оси длины, не меньшей a.

3′. Равенством (10.33) можно определить функцию $F_M(z)$ (допуская для нее и бесконечные значения) в любой точке z, независимо от того, каков индекс-дефект оператора A. Легко видеть, что при этом предложение D), установленное для степенной проблемы моментов, сохраняет полную силу и для рассматриваемого случая.

Расположим в последовательность все векторы $u_1^{(s)}, u_2^{(s)}, \ldots$ с рациональными $s \in (0, a)$ и проортонормируем эту последовательность в некоторую последовательность $\{d_\nu\}_1^\infty$. Обозначим, далее, через

$$\vartheta_\nu(z) = \sum_{j=1}^{m} d_\nu^{(j)}(z)\, u \qquad (\nu = 1, 1, \ldots)$$

вектор-функции, в которые переходят соответственно векторы d_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ при изоморфизме $f \to \mathfrak{f}_M(z)$.

Тогда можно будет и в рассматриваемом случае сформулировать предположение E) с заменой $d_\nu(z)$ на $\vartheta_\nu(z)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$.

Точно так же все дальнейшие замечания, сделанные в пп. 4, 5, можно перенести и на рассматриваемую теперь проблему представления.

4′. Руководясь той же идеей, что и в п. 6, можно строить различные примеры матриц-функций $\mathrm{F}(t) \in \mathfrak{P}_a^{(m)}$, для которых проблема представления является вполне неопределенной.

Без доказательства мы приведем еще следующий способ построения таких примеров.

Пусть $\mathrm{F}(t) = \| F_{j\kappa}(t) \|_1^m$ — матрица-функция, определенная и дважды диференцируемая в интервале $(0, \alpha)$. Пусть, кроме того, матрица $H = \mathrm{F}'(0)$ обладает тем свойством, что эрмитова форма, соответствующая ее „вещественной“ части $\mathrm{Re}\, H\, (2\, \mathrm{Re}\, H = H + H^*)$, положительна.

Определим $\mathrm{F}(t)$ для $t \in (-\alpha, 0)$, полагая $\mathrm{F}(-t) = \mathrm{F}^*(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant \alpha)$.

Тогда, рассматривая $\mathrm{F}(t)$ в достаточно „сжатом“ интервале $(-a, a)$ $(0 < a < \alpha)$, можно будет утверждать, что $\mathrm{F} \in \mathfrak{P}_a^{(m)}$ и, более того, что проблема представления усеченной $\mathrm{F}(t)$ $(-a \leqslant t \leqslant a)$ является вполне неопределенной.

5′. Для случая $m = 1$ предложение A′) представляет собой непосредственное обобщение известной теоремы Бохнера [14], согласно которой скалярная функция $\varphi(t)\, (-\infty < t < \infty)$ допускает представление

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, d\tau(\lambda) \qquad (-\infty < t < \infty) \tag{10.34}$$

с неубывающей функцией $\tau(\lambda)$ в том и только том случае, если она принадлежит классу $\mathfrak{P}_\infty^{(1)}$, т. е. она непрерывна и при любых неотрицательных $t_1, \ldots, t_n$ и комплексных $\xi_1, \ldots, \xi_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$:

$$\sum_{j,\, k=1}^{n} \varphi(t_j - t_k)\, \xi \overline{\xi}_k \geqslant 0;$$

при выполнении указанного условия функция $\tau(\lambda) = \tau(\lambda - 0)$ $(\tau(-\infty) = 0)$, дающая представление (10. 34), определяется однозначно.

Из теоремы Бохнера непосредственно следует, что для того чтобы матрица-функция $F(t) = \| F_{jk}(t) \|_1^m$ допускала представление

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, dT(\lambda), \tag{10.35}$$

где $T(\lambda)$ — некоторая матрица распределения, необходимо и достаточно, чтобы при любом $x \in M$ функция $\varphi_x(t) = x^* F(t) x \in \mathfrak{P}_\infty^{(1)}$; при выполнении этого условия матрица распределения $T(\lambda)$ определяется из (10.35) однозначно.

Класс матриц-функций $F(t) = \| F_{jk}(t) \|_1^m$, удовлетворяющих условию $x^* F(t) x \in \mathfrak{P}_\infty^{(1)}$ при любом $x \in M$, обозначим через $\mathfrak{P}_\infty^{(m)}$.

Наше предложение A′) можно еще так сформулировать: каждая матрица-функция $F(t)$ класса $\mathfrak{P}_a^{(m)} (a < \infty)$ может быть продолжена в некоторую матрицу-функцию класса $\mathfrak{P}_\infty^{(m)}$.

И, очевидно, проблема исследования всех представлений (10. 22) данной матрицы-функции $F(t) \in \mathfrak{P}_a^{(m)}$ эквивалентна проблеме исследования всех ее продолжений в классе $\mathfrak{P}_\infty^{(m)}$.

Для случая $m = 1$ проблема представления (продолжения) функций $F(t) \in \mathfrak{P}_a^{(m)}$ была исследована нами ранее [1к].

В настоящей статье мы обобщили значительную часть основных результатов для случая $m = 1$ на общий случай любого натурального m.

Заканчивая, отметим, что для случая $m > 1$ нами допущено некоторое отличие при определении классов $\mathfrak{P}_a^{(m)}$ и $\mathfrak{P}_\infty^{(m)}$. Определение класса $\mathfrak{P}_\infty^{(m)}$ было бы вполне аналогичным определению класса $\mathfrak{P}_a^\infty$ $(0 < a < \infty)$, если бы мы класс $\mathfrak{P}_\infty^{(m)}$ охарактеризовали условием: непрерывная матрица-функция $F(t) = \| F_{jk}(t) \|_1^m$ принадлежит классу $\mathfrak{P}_\infty^{(m)}$ в том и только том случае, если для любых $x_1 \in M, \ldots, x_n \in M$ и неотрицательных $t_1, t_2, \ldots, t_n (n = 1, 2, \ldots)$:

$$\sum_{j,\,k=1}^{n} x_k^* F(t_j - t_k)\, x_j \geqslant 0. \tag{10.36}$$

Мы же это условие внешне ослабили, требуя, чтобы все векторы $x_1, \ldots, x_n$ были коллинеарны: $x_j = \xi_j x$ $(j = 1, 2, \ldots n)$.

Однако для случая класса $\mathfrak{P}_a^{(m)}$ $(m > 1)$ указанное ослабление условий (10. 36) приводит, повидимому, к другому классу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн М. Г., а) Об эрмитовых операторах с дефект-индексами, равными единице (ч. I, III), ДАН (1944), т. 43(4), т. 44(4);

б) Об одном замечательном классе эрмитовых операторов, ДАН (1944), т. 44(5);

в) Об обобщенной проблеме моментов, ДАН (1944), т. 44(6);

г) О логарифме безгранично разложимой эрмитово-положительной функции, ДАН (1944), т. 44(5);

д) О проблеме продолжения винтовых линий в гильбертовом пространстве, ДАН (1944), т. XV, № 4;

е) Об одном общем методе разложения эрмитово-положительных ядер на элементарные произведения, ДАН (1946), т. LIII, № 1.

ж) Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения, Матем. сб., т. 20, № 3 (1947);

з) Про ермітові оператори з напрямними функціоналами, Збірник праць Інституту математики Академії наук УРСР, № 10 (1948);

и) К теории целых функций экспоненциального типа, Изв. АН СССР, сер. матем., т. II (1947).

к) О проблеме продолжения эрмитово-положительных непрерывных функций, ДАН, т. XXVI, № 1 (1940).

л) О резольвентах эрмитова оператора с индексом дефекта (m, m) ДАН (1946), т. II, № 8.

2. Наймарк М. А., а) Спектральные функции симметрического оператора, Изв. АН СССР, сер. матем. (1940), т. IV, № 3.

б) О представлении аддитивных операторных функций множеств, ДАН (1943), т. XI.

3. Лившиц М. С., а) Об одном применении теории эрмитовых операторов в обобщенной проблеме моментов, ДАН (1944), т. XIV, № 1;

б) О некоторых новых приложениях теории эрмитовых операторов, Диссертация. Майкоп, 1942.

4. Смирнов В. И., Sur les valeurs limites des fonctions régulières à l'intérieur d'un cercle, Журнал Ленинградского физ.-матем. об-ва, т. II (1929).

5. Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, Огиз, 1941.

6. Привалов И. И., а) Субгармонические функции, ГТТИ, 1937.

б) Граничные свойства однозначных аналитических функций, МГУ, 1941.

7. Гельфонд А. О., Проблема представления и единственности целой аналитической функции первого порядка, Успехи матем. наук, вып. 3 (1947), 144—174.

8. Крейн М. Г. и Красносельский М. А., Основные теоремы о расширении эрмитовых операторов и некоторые их применения к теории ортогональных полиномов и проблеме моментов, Успехи матем. наук, т. II, вып. 3(19), 1947.

9. Ахиезер Н. И., Бесконечные матрицы Якоби и проблема моментов, Успехи матем. наук, вып. 9, 1945.

10. Polya G., Über die Lücken und Singularitäten von Potenzreihen, Math. Ztschr., Bd. 29 (1929), 549—640.

11. Levinson N., Gap and density Theorems, Amer. Math. Soc. Colloquium Public., v. XXVI (1940), N 13.

12. Hamburger H., Contributions to the theory of closed Hermitian transformations of deficiency index (m, m), Annals of Mathem., vol. 45 No. 1 (1944).

13. Shohat J. A. and Tamarkin J. D., The problem of moments, New Jork, 1943.

14. Bochner, S., Fouriersche Integrale, Leipzig, 1932.

Поступило 4.III 1949.