№ 2 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ 1949
АКАДЕМИИ НАУК УССР

Об одной задаче Б. В. Гнеденко

Д. Г. Мейзлер

1. На семинаре по теории вероятностей, с целью обобщения уже известных результатов [1], Б. В. Гнеденко была поставлена задача: найти класс предельных законов максимального члена η_n первых n из последовательности независимых разнораспределенных случайных величин ξ_n. Эта задача имеет непосредственный интерес для статистики, а именно — для того случая, когда условия опытов варируют и функция распределения результата i-го наблюдения зависит от i. Цель настоящей работы — дать, при некоторых достаточно общих условиях, решение только что сформулированной задачи.

Отметим, что полученные нами результаты находятся в близкой связи с результатами П. Леви, полученными им в ответ на вопрос А. Я. Хинчина о предельных законах для нормированных сумм (см. [2], § 6).

Рассмотрим последовательность независимых случайных величин

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$$

подчиненных соответственно законам распределения

$$F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x) \ldots$$

Положим

$$\eta_n = \max(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \qquad n=1, 2, \ldots$$

Функция распределения максимального члена η_n есть

$$\Phi_n(x) = P\{\eta_n \leqslant x\} = F_1(x) \cdot F_2(x) \ldots F_n(x).$$

Мы скажем, что закон распределения $\Phi(x)$ принадлежит классу G, если существует такая последовательность функций распределения $F_i(x)$ и такие положительные числа a_n, что

$$\Phi(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F_i(a_n x) \tag{1}$$

и равномерно относительно i $[1 \leqslant i \leqslant n]$

$$\lim_{n\to\infty} F_i(a_n x) = 1 \tag{2}$$

для всех x, для которых $\Phi(x) > 0$.

Наша задача состоит в том, чтобы найти характеристический признак законов класса G.

Для удобства формулировки доказываемых признаков введем следующие обозначения:

Пусть G^+ обозначает совокупность тех законов $\Phi(x)$ класса G, для которых $\Phi(0)=0$, а G^- — соответственно совокупность тех, для которых $\Phi(0)=1$. Очевидно, классы G^+ и G^- не пересекаются, причем, как в дальнейшем будет показано (лемма 4), имеет место равенство

$$G^+ + G^- = G.$$

2. В настоящей работе доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. *Для того чтобы закон распределения $\Phi(x)$ принадлежал классу G^+, необходимо и достаточно, чтобы для любого α $(0<\alpha<1)$ существовала неубывающая функция $\varphi_\alpha(x)$, такая чтобы при всех x имело место равенство*

$$\Phi(x) = \Phi\left(\frac{x}{\alpha}\right) \cdot \varphi_\alpha(x). \tag{3}$$

Теорема 2. *Для того чтобы закон распределения $\Phi(x)$ принадлежал классу G^-, необходимо и достаточно, чтобы для любого α $(0<\alpha<1)$ существовала неубывающая функция $\varphi_\alpha(x)$, такая чтобы при всех x имело место равенство*

$$\Phi(x) = \Phi(\alpha x) \cdot \varphi_\alpha(x) \tag{4}$$

и чтобы закон распределения $\Phi(x)$ был непрерывен в точке $x=0$.

Теорема 3. *Законы распределения $\Phi(x)$ класса G могут иметь самое большее одну точку разрыва, причем, если x_0 есть точка разрыва, то*

или $$x_0=0 \text{ и } \Phi(x)=\varepsilon(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 0,\\ 1 & \text{при } x>0,\end{cases}$$

или $$x_0\neq 0,\ \Phi(x_0)=0 \text{ и } \Phi(x)>0 \text{ для } x>x_0.$$

Теорема 4. *Законы распределения $\Phi(x)$ класса G не имеют интервалов постоянства помимо тех, в которых они обращаются в 0 или 1.*

Теорема 5. *Если для последовательности законов распределения $\Phi_n(x)$ класса G*

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(x) = \Phi(x), \tag{5}$$

где $\Phi(x)$ — закон распределения, то $\Phi(x)$ принадлежит также классу G, причем, если $\Phi(x)$ принадлежит подклассу G^+ (соответственно G^-), то, начиная с некоторого n, все $\Phi_n(x)$ принадлежат подклассу G^+ (соответственно G^-). Иными словами, *класс G, равно как каждый из подклассов G^+ и G^-, замкнут относительно перехода к пределу.*

Теорема 6. *Если закон распределения $\Phi(x)$ принадлежит классу G^+ (соответственно G^-), то закон распределения*

$$\Phi'(x) = \Phi(ax-b)$$

также принадлежит классу G^+ (соответственно G^-), *где* a *и* b *любые положительные числа* (причем b удовлетворяет условию $\Phi(-b)=1$).

Для формулирования еще одного свойства законов класса G необходимо следующее замечание. Пусть $F(x)$ любой закон распределения, непрерывный в точке $x=0$ и такой, что $F(x)=0$ для $x<0$, тогда

$$\bar F(x)=\begin{cases} F\left(-\dfrac{1}{x}\right) & \text{для } x<0, \\ 1 & \text{для } x\geqslant 0, \end{cases} \tag{6}$$

есть также закон распределения непрерывный в точке $x=0$. Обратно, если $F(x)$ закон распределения, непрерывный в точке $x=0$ и такой, что $F(x)=1$ для $x>0$, то

$$\bar F(x)=\begin{cases} 0 & \text{для } x\leqslant 0, \\ F\left(-\dfrac{1}{x}\right) & \text{для } x>0, \end{cases} \tag{6'}$$

есть также закон распределения, непрерывный в точке $x=0$ *).

Легко заметить, что $\bar{\bar F}(x)=F(x)$ и, следовательно, преобразования (6) и (6′) устанавливают взаимно однозначное соответствие между множеством функций распределения $F(x)$, непрерывных в точке $x=0$, удовлетворяющих условию $F(x)=0$ для $x<0$ и, соответственно, $F(x)$, удовлетворяющих условию $F(x)=1$ для $x>0$.

Условимся называть функции распределения $F(x)$ и $\bar F(x)$ с о о т в е т с т в е н н ы м и.

Т е о р е м а 7. *Если закон распределения* $\Phi(x)$ $(\Phi(x)\not\equiv\varepsilon(x))$ *принадлежит классу* G^+, *то соответственный ему закон* $\bar\Phi(x)$ *принадлежит классу* G^-. Обратно, *каждый закон распределения, соответственный для некоторого закона класса* G^-, *принадлежит классу* G^+.

3. Доказательство теорем будет основываться на следующей лемме Б. В. Гнеденко [1], которую мы приведем без доказательства:

Л е м м а 1. *Пусть* $F_n(x)$ *и* $\Phi(x)$ *будут функции распределения, причем* $\Phi(x)$ — *собственный закон. Если при некоторых последовательностях действительных чисел* $a_n>0$, b_n, $\alpha_n>0$, β_n *имеют место равенства:*

$$\text{(I)}\qquad \lim_{n\to\infty} F_n(a_n x+b_n)=\Phi(x)$$

и

$$\text{(II)}\qquad \lim_{n\to\infty} F_n(\alpha_n x+\beta_n)=\Phi(x),$$

то

$$\text{(III)}\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\alpha_n}=1 \quad\text{и}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{b_n-\beta_n}{\alpha_n}=0.$$

---

*) $\bar F(x)$ может и не быть законом распределения при наличии разрыва в точке $x=0$. Например, для единичного закона мы имеем:

$$\varepsilon(x)=\begin{cases} 0 & \text{для } x<0, \\ 1 & \text{для } x>0, \end{cases}\qquad \bar\varepsilon(x)=1 \text{ для всех } x.$$

Обратно, если для последовательности функций распределения $F_n(x)$ *при некотором подборе действительных констант* $a_n > 0$ *и* b_n *для всех* x *имеет место равенство (I), где* $\Phi(x)$ *— некоторая неубывающая функция, то для любых двух последовательностей действительных чисел* $\alpha_n > 0$ *и* β_n, *удовлетворяющих условиям (III), для всех* x *также (II).*

Чтобы в дальнейшем не прерывать изложения доказательств основных теорем, докажем предварительно ряд простых предложений:

Лемма 2 (являющаяся легким преобразованием леммы 3 Б. В. Гнеденко [1]). *Если при некоторых* $a_n > 0$ *имеет место* (1) и (2), *причем закон распределения* $\Phi(x)$ *собственный, то*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1. \tag{7}$$

Доказательство. По условию

$$\Phi(x) = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n+1} F_i(a_{n+1}x) = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} F_i(a_{n+1}x) \cdot F_{n+1}(a_{n+1}x),$$

а так как для всех x, для которых $\Phi(x) > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} F_n(a_n x) = 1, \quad \text{то} \quad \Phi(x) = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} F_i(a_{n+1}x).$$

Это соотношение, совместно с (1), на основании леммы 1, дает (7).

Лемма 3. *Если при некоторых* $a_n > 0$ *имеют место* (1) *и* (2), *причем закон распределения* $\Phi(x)$ *собственный, то или*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty, \ \text{или} \ \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что нет такой подпоследовательности $\{n_k\}$, для которой

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$$

при $0 < a < \infty$. Допустив противное, на основании леммы 1 мы имели бы

$$\lim_{k\to\infty} \prod_{i=1}^{n_k} F_i(ax) = \Phi(x).$$

Так как $\Phi(x)$ собственный закон распределения, то существует такое ξ, что

$$0 < \Phi(\xi) = \lim_{k\to\infty} \prod_{i=1}^{n_k} F_i(a\xi) < 1.$$

Но ввиду (2)

$$F_i(a\xi) = 1 \qquad \text{для } i = 1, 2, \ldots, n,$$

откуда

$$\Phi(\xi) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n_k} F_i(a\xi) = 1,$$

что приводит к противоречию.

С другой стороны нетрудно показать, что если для некоторой последовательности чисел $a_n>0$ имеет место (7), то множество предельных точек этой последовательности или состоит из одной (собственной или несобственной) предельной точки, или всюду плотное (на конечном или бесконечном интервале).

Это замечание, совместно с доказанным, показывает справедливость нашей леммы.

Лемма 4. *Если при некоторых* $a_n>0$ *имеют место* (1) *и* (2), *причем закон распределения* $\Phi(x)$ *собственный, то или*

$$\Phi(0)=0 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} a_n=\infty$$

или

$$\Phi(0)=1 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} a_n=0.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что не может быть

$$0<\Phi(0)<1.$$

Действительно, при $x=0$ множители $F_i(a_n x)$ перестают зависеть от n и ввиду (2) мы имели бы

$$F_i(0)=1 \qquad \text{для } i=1, 2, \ldots, n,$$

откуда

$$\Phi(0)=\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}F_i(0)=1,$$

что приводит к противоречию. Ввиду доказанного и леммы 3 достаточно показать несовместимость соотношений

$$\Phi(0)=0 \quad \text{и} \lim_{n\to\infty} a_n=0 \tag{8}$$

и соответственно

$$\Phi(0)=1 \quad \text{и} \lim_{n\to\infty} a_n=\infty. \tag{9}$$

Допустим, что имеют место (1), (2) и (8) и пусть ξ таково, что $0<\Phi(\xi)<1$. Ввиду (8) имеем $\xi>0$. Пусть $x>0$ — любое число. Начиная с некоторого n будет

$$a_n\xi<x \quad \text{и} \quad F_i(a_n\xi)\leqslant F_i(x) \qquad \text{для } i=1, 2, \ldots, n,$$

но ввиду (2)

$$\lim_{n\to\infty} F_i(a_n\xi)=1 \qquad \text{для } i=1, 2, \ldots, n,$$

откуда

$$F_i(x)=1 \qquad \text{для } i=1, 2, \ldots, n.$$

Так как последнее имеет место при любом $x>0$, то при любых натуральных i и n $(i\leqslant n)$ $F_i(a_n\xi)=1$, откуда $\Phi(\xi)=1$, что приводит к противоречию.

Аналогично доказывается вторая часть леммы. Допустив (9), мы имели бы для любого $x<0$

$$\lim_{n\to\infty} F_i(a_n x)=0 \qquad \text{для } i=1, 2, \ldots, n,$$

Доказательство: На основании леммы 6 мы можем ограничиться рассмотрением тех значений x, для которых $\Phi(x)>0$. Из (13) вытекает, что для любых x_1 и x_2 $(x_2\geqslant x_1,\ \Phi(x_1)>0)$ при любом натуральном n

$$\frac{\Phi(x_1)}{\Phi\left(\frac{x_1}{\alpha_n}\right)}\leqslant\frac{\Phi(x_2)}{\Phi\left(\frac{x_2}{\alpha_n}\right)}$$

или

$$\frac{\Phi(x_1)}{\Phi(x_2)}\leqslant\frac{\Phi\left(\frac{x_1}{\alpha_n}\right)}{\Phi\left(\frac{x_2}{\alpha_n}\right)}.$$

Так как $\frac{x_2}{\alpha_n}\geqslant\frac{x_1}{\alpha_n}$, то, вставив в последнее неравенство $\frac{x_1}{\alpha_n}$ и $\frac{x_2}{\alpha_n}$ вместо x_1 и, соответственно, x_2 мы получим

$$\frac{\Phi\left(\frac{x_1}{\alpha_n}\right)}{\Phi\left(\frac{x_2}{\alpha_n}\right)}\leqslant\frac{\Phi\left(\frac{x_1}{\alpha_n^2}\right)}{\Phi\left(\frac{x_2}{\alpha_n^2}\right)},$$

что вместе с предыдущим неравенством даст

$$\frac{\Phi(x_1)}{\Phi(x_2)}\leqslant\frac{\Phi\left(\frac{x_1}{\alpha_n^2}\right)}{\Phi\left(\frac{x_2}{\alpha_n^2}\right)}.$$

Аналогично рассуждая, мы получим, что для любых x_1 и x_2 $(x_2\geqslant x_1,$ $\Phi(x_1)>0)$ и натуральных n и m

$$\frac{\Phi(x_1)}{\Phi(x_2)}\leqslant\frac{\Phi\left(\frac{x_1}{\alpha_n^m}\right)}{\Phi\left(\frac{x_2}{\alpha_n^m}\right)}. \tag{15}$$

С другой стороны, нетрудно показать, что если для некоторой последовательности чисел $\alpha_n (0<\alpha_n<1)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=1$, то для любого $\alpha (0<\alpha<1)$ можно найти такие натуральные числа $m=m\ (\alpha,\ n)$, что $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n^m=\alpha$.

На основании этого замечания из (15) получаем, что при любом $\alpha (0<\alpha<1)$ имеет место неравенство

$$\frac{\Phi(x_1)}{\Phi(x_2)}\leqslant\frac{\Phi\left(\frac{x_1}{\alpha}\right)}{\Phi\left(\frac{x_2}{\alpha}\right)} \tag{16}$$

для всех x_1 и x_2 ($x_2 \geqslant x_1$, $\Phi(x_1) > 0$), которые являются точками непрерывности функции $\Phi\left(\frac{x}{\alpha}\right)$. На основании леммы 7 это будет иметь место и для любых x_1 и x_2 ($x_2 \geqslant x_1$, $\Phi(x_1) > 0$). Положим

$$\varphi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{для тех } x, \text{ для которых } \Phi(x) = 0, \\ \dfrac{\Phi(x)}{\Phi\left(\frac{x}{\alpha}\right)} & \text{для остальных } x. \end{cases}$$

Ввиду (16), так определенная $\varphi_\alpha(x)$ будет, очевидно, удовлетворять условию (14). Доказательство второй части леммы проводится тем же путем.

4. Перейдем к доказательству сформулированных ранее теорем:

Доказательство теоремы 1.

Достаточность. Из (3), на основании леммы 5 вытекает, что существует такое x_0 ($x_0 \geqslant 0$), что $\Phi(x_0) = 0$ и для $x > x_0$ $\Phi(x) > 0$. На основании леммы 6

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \leqslant x_0, \\ \dfrac{\Phi(x)}{\Phi\left(\frac{x}{\alpha}\right)} & \text{для } x > x_0, \end{cases}$$

будет функцией распределения при любом α ($0 < \alpha < 1$). Положим $\alpha = \dfrac{i}{i+1}$, тогда при любом натуральном i

$$F_i(x) = \varphi_{\frac{i}{i+1}}\left(\frac{x}{i+1}\right) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \leqslant x_0(i+1), \\ \dfrac{\Phi\left(\frac{x}{i+1}\right)}{\Phi\left(\frac{x}{i}\right)} & \text{для } x > x_0(i+1), \end{cases}$$

будет также функцией распределения. Положив $a_n = n+1$, мы будем иметь

$$F_i(a_n x) = \varphi_{\frac{i}{i+1}}\left(\frac{a_n x}{i+1}\right) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \leqslant \dfrac{x_0(i+1)}{n+1} \\ \dfrac{\Phi\left(\frac{n+1}{i+1}x\right)}{\Phi\left(\frac{n+1}{i}x\right)} & \text{для } x > \dfrac{x_0(i+1)}{n+1}. \end{cases} \tag{17}$$

Легко проверить, что для любого $x > x_0$ и любого натурального i ($1 \leqslant i \leqslant n$) $\Phi\left(\dfrac{n+1}{i}x\right) \neq 0$ и $F_i(a_n x) \neq 0$.

Положим

$$\Phi_n(a_n x) = \prod_{i=1}^{n} F_i(a_n x),$$

тогда для всех $x > x_0$

$$\Phi_n(a_n x) = \frac{\Phi(x)}{\Phi(a_n x)}$$

и, ввиду $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, будет

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(a_n x) = \Phi(x)$$

для всех x, для которых $\Phi(x) > 0$,

С другой стороны, из (17) вытекает, что $F_n(a_n x) = 0$ для $x \leqslant x_0$, следовательно, для всех x имеет место (1). Наконец, из (17) получается немедленно (2), следовательно, $\Phi(x)$ принадлежит классу G, а так как $x_0 \geqslant 0$, то $\Phi(0) = 0$ и $\Phi(x)$ принадлежит классу G^+.

Заметим, что из лемм 7 и 8 вытекает, что для принадлежности к классу G^+ достаточно потребовать, чтобы соотношение (3) выполнялось для некоторой последовательности α_n $(0 < \alpha_n < 1)$, стремящейся к 1, причем достаточно, чтобы это имело место в точках непрерывности $\Phi(x)$.

Необходимость. Допустим, что закон распределения $\Phi(x)$ принадлежит классу G^+; это значит, что выполняется (1), (2) и $\Phi(0) = 0$. Так как каждый несобственный закон распределения $\Phi(x)$, принадлежащий классу G^+ (т.е. такой, что $\Phi(0) = 0$), удовлетворяет условию (3), то мы можем предположить, что $\Phi(x)$ — собственный закон распределения. На основании лемм 2 и 4

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1,$$

а поэтому мы можем поставить в соответствие каждому индексу n такой другой индекс $m = m(\alpha, n)$, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+m}} = \alpha, \tag{18}$$

где α — любое число интервала $(0,1)$. Положим

$$\Phi_n(x) = \prod_{i=1}^{n} F_i(a_n x),$$

тогда

$$\Phi_{n+m}(x) = \prod_{i=1}^{n+m} F_i(a_{n+m} x) = \prod_{i=1}^{n} F_i\left(\frac{a_{n+m}}{a_n} \cdot a_n x\right) \cdot \prod_{i=n+1}^{n+m} F_i(a_{n+m} x).$$

Обозначим

$$\varphi_{n,m}(x) = \prod_{i=n+1}^{n+m} F_i(a_{n+m} x).$$

тогда последнее соотношение перепишется в виде

$$\Phi_{n+m}(x) = \Phi_n\left(\frac{a_{n+m}}{a_n}x\right) \cdot \varphi_{n,m}(x). \tag{19}$$

На основании первой теоремы Хелли существует такая подпоследовательность $\varphi_{n_s, m_s}(x)$, что $\lim\limits_{s\to\infty}\varphi_{n_s, m_s}(x) = \varphi_\alpha(x)$, где $\varphi_\alpha(x)$ — некоторая неубывающая (ограниченная) функция. Из (19), ввиду (1), (18) и леммы 1 мы получаем, что во всех точках непрерывности закона $\Phi\left(\frac{x}{\alpha}\right)$

$$\Phi(x) = \Phi\left(\frac{x}{\alpha}\right) \cdot \varphi_\alpha(x)$$

при любом α $(0<\alpha<1)$. На основании леммы 7 последнее соотношение будет иметь место при любом x, что доказывает необходимость (3).

Заметим, что на основании леммы 6 необходимо, чтобы соотношение (3) имело место и при $\varphi_\alpha(x)$, являющейся функцией распределения.

Доказательство теоремы 2.

Достаточность. Допустим сначала, что $\Phi(x) > 0$ для всех x, тогда, ввиду (4),

$$\varphi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad x \leqslant \dfrac{\alpha}{\alpha-1}, \\[2ex] \dfrac{\Phi(x)}{\Phi(\alpha x)} & \text{для} \quad x > \dfrac{\alpha}{\alpha-1}, \end{cases}$$

будет функцией распределения при любом α $(0<\alpha<1)$. Положим $\alpha = \frac{i}{i+1}$, тогда при любом натуральном i

$$F_i(x) = \varphi_{\frac{i}{i+1}}[(i+1)x] = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad x \leqslant -i, \\ \dfrac{\Phi[(i+1)x]}{\Phi(ix)} & \text{для} \quad x > -i, \end{cases}$$

будет также функцией распределения. Положив $a_n = \frac{1}{n+1}$, мы получим

$$F_i(a_n x) = \varphi_{\frac{i}{i+1}}[(i+1)a_n x] = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad x \leqslant -i(n+1), \\[2ex] \dfrac{\Phi\left(\dfrac{i+1}{n+1}x\right)}{\Phi\left(\dfrac{ix}{n+1}\right)} & \text{для} \quad x > -i(n+1). \end{cases} \tag{20}$$

Положим

$$\Phi_n(a_n x) = \prod_{i=1}^{n} F_i(a_n x).$$

Так как для любого x и любого $i\,(1\leqslant i\leqslant n)$, начиная с некоторого n, будет $x>-i\,(n+1)$, то, начиная с некоторого n,

$$F_i(a_n x)=\frac{\Phi\left(\frac{i+1}{n+1}x\right)}{\Phi\left(\frac{ix}{n+1}\right)}\ \text{для всех}\ i\ (1\leqslant i\leqslant n)\ \text{и}\ \Phi_n(a_n x)=\frac{\Phi(x)}{\Phi(a_n x)},$$

откуда, на основании условия непрерывности в нуле и леммы 5, ввиду $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, мы получаем (1). Из (20) получается немедленно (1), а так как, ввиду условия непрерывности в нуле и леммы 5, $\Phi(0)=1$, то $\Phi(x)$ принадлежит классу G^-.

Допустим теперь, что существует такое x_0, что $\Phi(x_0)=0$ и $\Phi(x)>0$ для $x>x_0$. Ввиду леммы 5, $x_0<0$ и на основании леммы 6

$$\varphi_\alpha(x)=\begin{cases}0 & \text{для}\quad x\leqslant x_0,\\ \dfrac{\Phi(x)}{\Phi(\alpha x)} & \text{для}\quad x>x_0,\end{cases}$$

будет функцией распределения при любом $\alpha\,(0<\alpha<1)$. Аналогично предыдущему, положив $\alpha=\dfrac{i}{i+1}$, $a_n=\dfrac{1}{n+1}$, мы получаем, что

$$F_i(a_n x)=\varphi_{\frac{i}{i+1}}[(i+1)\,a_n x]=\begin{cases}0 & \text{для}\ x\leqslant\dfrac{x_0\,(n+1)}{i+1},\\ \dfrac{\Phi\left(\frac{i+1}{n+1}x\right)}{\Phi\left(\frac{i}{n+1}x\right)} & \text{для}\ x>\dfrac{x_0\,(n+1)}{i+1},\end{cases}\tag{21}$$

будет функцией распределения и для любого $x>x_0$ и любого натурального $i\ (1\leqslant i\leqslant n)$ $\Phi\left(\dfrac{ix}{n+1}\right)\neq 0$ и $F_i(a_n x)\neq 0$. Положим

$$\Phi_n(a_n x)=\prod_{i=1}^{n}F_i(a_n x),$$

тогда, легко проверить, что для всех $x>x_0$

$$\Phi_n(a_n x)=\frac{\Phi(x)}{\Phi(a_n x)}$$

и, ввиду $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, на основании условия непрерывности в нуле и леммы 5, будет выполняться для всех $x>x_0$ (1).

С другой стороны, из (21) следует, что $F_n(a_n x)=0$ для $x\leqslant x_0$, следовательно для всех x имеет место (1). Из (21) получается непосредственно (2), что вместе с условием непрерывности в нуле, на основании леммы 5, доказывает достаточность признака и в этом случае.

Необходимость. Допустим, что функция распределения $\Phi(x)$ принадлежит классу G^-, т. е. имеют место (1), (2) и $\Phi(0)=1$. Так как каждый несобственный закон распределения $\Phi(x)$, принадлежащий классу G^- (т. е. такой, что $\Phi(0)=1$), удовлетворяет условиям теоремы, то мы можем предположить, что $\Phi(x)$ собственный закон распределения. На основании лемм 2 и 4

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1,$$

а поэтому мы можем поставить в соответствие каждому индексу n такой другой индекс $m = m(\alpha, n)$, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+m}}{a_n} = \alpha, \tag{22}$$

где α — любое число интервала $(0,1)$. Аналогично предыдущему, положив

$$\Phi_n(x) = \prod_{i=1}^{n} F_i(a_n x),$$

мы приходим к соотношению (19) и ввиду (22) получаем (4). Наконец из (4) и условия $\Phi(0)=1$, на основании леммы 5 мы получаем необходимость непрерывности закона $\Phi(x)$ в точке $x=0$.

Замечание, сделанное нами при доказательстве теоремы 1 относительно возможности ослабления достаточных условий, применимо, очевидно, и к теореме 2, а для законов распределения $\Phi(x)$ класса G^-, обращающихся в нуль в конечной точке, можно несколько усилить необходимое условие, так как в этом случае необходимо, чтобы соотношение (4) имело место и при $\varphi_\alpha(x)$, являющейся функцией распределения.

Доказательство теоремы 3.

Так как законы класса G^-, согласно теореме 2, непрерывны в точке $x=0$, то первое утверждение теоремы достаточно доказать в предположении, что $\Phi(x)$ принадлежит к классу G^+. Действительно, если бы $\Phi(x)$ класса G^+ имела разрыв в точке $x=0$, то существовало бы такое $a>0$, что для любого $x>0$ было бы

$$\Phi(x) > a > 0,$$

откуда, ввиду (3), мы имели бы

$$\lim_{x\to+0} \varphi_\alpha(x) = \lim_{x\to+0} \frac{\Phi(x)}{\Phi\left(\frac{x}{\alpha}\right)} = 1,$$

откуда $\Phi(x) = \Phi\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ для $x>0$, а так как $\Phi(0)=0$, то $\Phi(x) = \varepsilon(x)$.

Допустим теперь, что второе утверждение теоремы не верно и пусть x_0 будет точкой разрыва закона $\Phi(x)$, причем $\Phi(x_0) > 0$.

Допустим сначала, что $\Phi(x)$ принадлежит классу G^+, следовательно $x_0 > 0$ и существует такое $a > 0$, что для любого $x > x_0$

$$\Phi(x_0) + a < \Phi(x). \tag{23}$$

Так как $\Phi(x)$ непрерывна слева, то найдется такое $\xi\,(0 < \xi < x_0)$, что

$$\frac{\Phi(\xi)}{\Phi(x_0)} > 1 - a \tag{24}$$

и при любом $\alpha\,(0 < \alpha < 1)$ будет

$$\frac{\Phi(x_0)}{\Phi\left(\frac{x_0}{\alpha}\right)} \geqslant \frac{\Phi(\xi)}{\Phi\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)}.$$

В частности, при $\alpha = \frac{\xi}{x_0}$ мы получаем

$$\frac{\Phi(x_0)}{\Phi\left(\frac{x_0^2}{\xi}\right)} \geqslant \frac{\Phi(\xi)}{\Phi(x_0)}$$

и ввиду (24)

$$\frac{\Phi(x_0)}{\Phi\left(\frac{x_0^2}{\xi}\right)} > 1 - a. \tag{25}$$

Но так как $\xi < x_0$, то $\frac{x_0^2}{\xi} > x_0$ и ввиду (23) будет

$$\Phi(x_0) + a < \Phi\left(\frac{x_0^2}{\xi}\right)$$

или

$$\frac{\Phi(x_0)}{\Phi\left(\frac{x_0^2}{\xi}\right)} < 1 - \frac{a}{\Phi\left(\frac{x_0^2}{\xi}\right)} \leqslant 1 - a,$$

что противоречит (25).

Совершенно аналогично доказывается случай, когда $\Phi(x)$ принадлежит классу G^-, учитывая, что $x_0 < 0$, поскольку для $x \geqslant 0$ $\Phi(x)$ заведомо непрерывна.

Заметим следующий интересный факт: каков бы ни был закон $\Phi(x)$ класса G, закон

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \leqslant a, \\ \Phi(x) & \text{для } x > a, \end{cases}$$

где a — любое действительное число — также принадлежит классу G. Это замечание дает, очевидно, правило для построения разрывных законов класса G.

Доказательство теоремы 4.

Пусть $\Phi(x)$ будет законом класса G и допустим, что существуют такие ξ_1 и ξ_2 $(\xi_2 > \xi_1)$, что

$$0 < \Phi(\xi_1) = \Phi(\xi_2) < 1. \tag{26}$$

Так как $\Phi(x)$ принадлежит классу G, то из этого вытекает, что $\xi_1 \cdot \xi_2 > 0$.

Допустим сначала, что $\xi_2 > \xi_1 > 0$; тогда $\Phi(x)$ принадлежит классу G^+ и имеет место (3) при любом $\alpha (0 < \alpha < 1)$. Положив в (3) $\alpha = \frac{\xi_1}{\xi_2}$, $x = \xi_1$, мы получим

$$\Phi(\xi_1) = \Phi(\xi_2)\, \varphi_\alpha(\xi_1)$$

и ввиду (26) $\varphi_\alpha(\xi_1) = 1$. Так как $\varphi_\alpha(x)$ неубывающая функция, а $\frac{\xi_1}{\alpha} > \xi_1$, то также $\varphi_\alpha\left(\frac{\xi_1}{\alpha}\right) = 1$. Вставив в (3) $x = \xi_2 = \frac{\xi_1}{\alpha}$, мы получим

$$\Phi(\xi_2) = \Phi\left(\frac{\xi_1}{\alpha^2}\right) \cdot \varphi_\alpha\left(\frac{\xi_1}{\alpha}\right),$$

откуда

$$\Phi(\xi_1) = \Phi\left(\frac{\xi_1}{\alpha}\right) = \Phi\left(\frac{\xi_1}{\alpha^2}\right).$$

Рассуждая аналогично, мы приходим к равенству

$$\Phi(\xi_1) = \Phi\left(\frac{\xi_1}{\alpha^n}\right),$$

где n — любое натуральное число. Но $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\xi_1}{\alpha^n} = \infty$, следовательно

$$\lim_{n\to\infty} \Phi\left(\frac{\xi_1}{\alpha^n}\right) = 1,$$

откуда $\Phi(\xi_1) = 1$, что противоречит (26).

Допустив, что $\xi_1 < \xi_2 < 0$ и $\Phi(x)$ принадлежит классу G^-, мы, рассуждая аналогично, придем к отношению

$$\Phi(\xi_1) = \Phi(\alpha^n \xi_1),$$

где n — любое натуральное число. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n \xi_1 = 0$, $\Phi(0) = 1$ и $\Phi(x)$ непрерывна в точке $x = 0$, то $\Phi(\xi_1) = 1$, что также противоречит (26).

Доказательство теоремы 5.

Прежде всего покажем, что если для функций распределения $\Phi_n(x)$ класса G^+ имеет место (5), то $\Phi(x)$ есть также класса G^+.

Действительно, при любом x и любом $\alpha (0 < \alpha < 1)$

$$\Phi_n(x) = \Phi_n\left(\frac{x}{\alpha}\right) \varphi_\alpha^{(n)}(x) \qquad \text{для } n = 1, 2, \ldots$$

где $\varphi_{\alpha}^{(n)}(x)$ — некоторые неубывающие функции. На основании первой теоремы Хелли можно найти такую подпоследовательность $\{n_s\}$, что

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{\alpha}^{(n_s)}(x) = \varphi_{\alpha}(x),$$

где $\varphi_{\alpha}(x)$ есть также некоторая неубывающая функция, причем последнее соотношение будет иметь место для всех x, при любом α $(0<\alpha<1)$. Таким образом, ввиду (5) для всех x при любом α $(0<\alpha<1)$ будет

$$\Phi(x) = \Phi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\varphi_{\alpha}(x),$$

следовательно, $\Phi(x)$ есть класса G^{+}.

Аналогично доказывается, что если для функций распределения класса G^{-} имеет место (5), то $\Phi(x)$ есть также класса G^{-}.

Пусть теперь $\Phi_n(x)$ будет последовательностью законов распределения класса G, пусть $\Phi_v^{+}(x)$ будут все те законы распределения последовательности $\Phi_n(x)$, которые принадлежат классу G^{+} и соответственно $\Phi_s^{-}(x) - G^{-}$. По крайней мере одна из последовательностей $\{v\}$ и $\{s\}$ бесконечна и, ввиду только что доказанного, если $\{v\}$ [соответственно $\{s\}$] бесконечна, то $\Phi(x)$ принадлежит классу G^{+} (соответственно G^{-}).

С другой стороны, так как классы G^{+} и G^{-}, очевидно, не пересекаются, то из (5) вытекает, что одна из последовательностей $\{v\}$ и $\{s\}$ должна быть конечной, что, очевидно, доказывает нашу теорему.

Доказательство теоремы 6.

Пусть $\Phi(x)$ будет законом класса G^{+}, а x_0 — число, удовлетворяющее соотношениям: $\Phi(x_0)=0$ и $\Phi(x)>0$ для $x>x_0$.

Покажем прежде всего, что закон распределения

$$\Phi'(x) = \Phi(x-b),$$

где b — любое положительное число, также принадлежит классу G^{+}. Для этого достаточно показать, что для любых x и y $(x \geqslant y > x_0+b)$ и при любом α $(0<\alpha<1)$

$$\frac{\Phi'(x)}{\Phi'\left(\frac{x}{\alpha}\right)} \geqslant \frac{\Phi'(y)}{\Phi'\left(\frac{y}{\alpha}\right)}$$

или же

$$\frac{\Phi(x-b)}{\Phi\left(\frac{x}{\alpha}-b\right)} \geqslant \frac{\Phi(y-b)}{\Phi\left(\frac{y}{\alpha}-b\right)}.$$

Допустим, что при некоторых $x_1>y_1>x_0+b$ и некотором α_1 $(0<\alpha_1<1)$ выполняется неравенство

$$\frac{\Phi(x_1-b)}{\Phi\left(\frac{x_1}{\alpha_1}-b\right)} < \frac{\Phi(y_1-b)}{\Phi\left(\frac{y_1}{\alpha_1}-b\right)}. \tag{27}$$

Так как $\Phi(x)$ принадлежит классу G^+, то при любом $\alpha\,(0<\alpha<1)$

$$\frac{\Phi(x_1-b)}{\Phi\left(\frac{x_1-b}{\alpha}\right)} \geqslant \frac{\Phi(y_1-b)}{\Phi\left(\frac{y_1-b}{\alpha}\right)};$$

в частности, при $\alpha = \frac{\alpha_1 x_1 - \alpha_1 b}{x_1 - \alpha_1 b}$ будет

$$\frac{\Phi(x_1-b)}{\Phi\left(\frac{x_1}{\alpha_1}-b\right)} \geqslant \frac{\Phi(y_1-b)}{\Phi\left[\frac{(y_1-b)(x_1-\alpha_1 b)}{\alpha_1(x_1-b)}\right]} \tag{28}$$

$\left(\text{так как при так определенном } \alpha \text{ имеет место равенство } \frac{x_1-b}{\alpha} = \frac{x_1}{\alpha_1} - b\right)$.

Легко проверить, что для $b>0$, $x_1-y_1>0$, $0<\alpha_1<1$ будет

$$\frac{y_1}{\alpha_1} - b > \frac{(y_1-b)(x_1-\alpha_1 b)}{\alpha_1(x_1-b)},$$

ввиду чего из (28) мы получаем

$$\frac{\Phi(x_1-b)}{\Phi\left(\frac{x_1}{\alpha_1}-b\right)} \geqslant \frac{\Phi(y_1-b)}{\Phi\left(\frac{y_1}{\alpha_1}-b\right)},$$

что противоречит (27).

С другой стороны, если $\Phi(x)$ принадлежит классу G^+, то, очевидно, $\Phi(ax)$ также принадлежит классу G^+ при любом $a>0$, следовательно закон распределения $\Phi'(x) = \Phi(ax-b)$ также принадлежит классу G^+ и т. д.

Доказательство второй части теоремы для законов класса G^- проводится тем же путем; условие $\Phi(-b)=1$ обеспечивает непрерывность закона $\Phi'(x) = \Phi(ax-b)$ в точке $x=0$.

Заметим, что при b отрицательных эта теорема, вообще говоря, неверна, как это видно из следующих примеров:

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \leqslant 1, \\ x^2-1 & \text{для } 1 < x \leqslant \sqrt{2}, \\ 1 & \text{для } x > \sqrt{2}, \end{cases} \quad F_2(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{для } x \leqslant -1, \\ 1 & \text{для } x > -1. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $F_1(x)$ (соответственно $F_2(x)$) принадлежит классу G^+ (соответственно G^-), тем не менее закон $F_1'(x) = F_1(x-b)$ [соответственно $F_2'(x) = F_2(x-b)$] при любом отрицательном b классу G^+ (соответственно G^-) не принадлежит.

Доказательство теоремы 7.

Пусть закон распределения $\Phi(x)$ принадлежит классу G^+, следовательно, $\Phi(x)=0$ для $x\leqslant 0$ и при любом $\alpha\,(0<\alpha<1)$ существует такая неубывающая функция $\varphi_\alpha(x)$, что для всех x имеет место (3).

Так как по условию $\Phi(x) \neq \varepsilon(x)$, то, согласно теореме 3, $\Phi(x)$ непрерывна в точке $x=0$, откуда

$$\overline{\Phi}(x) = \begin{cases} \Phi\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{для } x<0, \\ 1 & \text{для } x \geqslant 0, \end{cases}$$

будет законом распределения соответственным закону $\Phi(x)$. Чтобы показать, что $\overline{\Phi}(x)$ принадлежит классу G^-, заметим, что если положить

$$\overline{\varphi_\alpha}(x) = \begin{cases} \varphi_\alpha\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{для } x<0, \\ 1 & \text{для } x \geqslant 0, \end{cases}$$

то $\overline{\varphi_\alpha}(x)$ будет также неубывающей функцией, так как согласно лемме 6 мы можем предположить, что $\varphi_\alpha(x)$ и $\Phi(x)$ одновременно обращаются в нуль.

Но ввиду (3), при любом x

$$\overline{\Phi}(x) = \overline{\Phi}(\alpha x) \cdot \overline{\varphi_\alpha}(x),$$

а так как наше преобразование сохраняет непрерывность в нуле, то $\overline{\Phi}(x)$ принадлежит классу G^-.

Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

В заключение выражаю глубокую благодарность моему руководителю Б. В. Гнеденко за постановку задачи и руководство при ее решении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Гнеденко, Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire, Annals of Mathematics, vol. 44. No 3, July, 1943.

2. А. Я. Хинчин, Предельные законы для сумм независимых случайных величин, ОНТИ, 1938.

Поступило 22. IX 1948.