№ 3 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ 1949
АКАДЕМИИ НАУК УССР

О движении системы трех материальных точек по одной прямой

Ю. Д. Соколов

§ 1. Вступление

Первые фундаментальные исследования движения по одной прямой системы трех материальных точек, взаимно притягивающихся по закону Ньютона, принадлежат, как известно, Эйлеру.

В своем мемуаре „De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium" *) Эйлер привел указанную задачу к интегрированию системы двух диференциальных уравнений первого порядка и к одной квадратуре и впервые установил случай, когда уравнения допускают интегрирование в конечном виде. В этом случае отношения взаимных расстояний точек во время движения остаются постоянными, причем отношение двух меньших расстояний определяется из алгебраического уравнения пятой степени, коэфициенты которого представляют линейные однородные функции от масс. Эйлер доказал, что это уравнение всегда имеет единственный положительный корень.

Якоби, придав всем формулам более симметричный вид, применил другой способ приведения системы уравнений движения к двум диференциальным уравнениям первого порядка, конечному уравнению и к одной квадратуре и сделал ряд замечаний по поводу применения к рассматриваемой задаче его известной теории последнего множителя **); кроме того, он показал, что в случае притяжения обратно-пропорционально кубам расстояний задача решается в гиперэллиптических квадратурах ***).

В последние десятилетия случай прямолинейного движения в задаче трех тел, взаимно притягивающихся (или отталкивающихся) обратно-пропорционально квадратам расстояний, и его физические применения рассма-

---

*) Novi commentarii Academiae Scientiarum Imp. Petropolitanae, t. XI, p.p. 144—151 (1765). Nova Acta, t. III, pp. 126—141.

**) Theoria novi multiplicatoris systemati aequationum differentialium vulgarium applicandi, § 28, pp. 478—484.

Sur le mouvement d'un point et sur un cas particulier du problème des trois corps (Gesammelte Werke, Bd. IV).

***) Problema trium corporum mutuis attractionibus cubis distantiarum inverse proportionalibus recta linea se moventium (Gesamm. Werke, Bd. IV, SS. 531—539).

тривали (без существенно новых результатов) Бор (1913), Никольсон (1914), Зоммерфельд (1921), Мюнц (1922) и другие авторы *). Особо следует отметить интересный мемуар Ж. Шази „Sur le problème rectiligne des trois corps" **), в котором он применил к этой задаче современные методы качественной теории диференциальных уравнений и получил ряд важных результатов.

Все упомянутые авторы ограничивались рассмотрением только случая взаимодействия с силами обратно-пропорциональными квадратам расстояний, и только Якоби, после исследования этого случая, заметил, что „подобные формулы будем иметь и в случае притяжения обратно-пропорционально произвольной степени расстояния". Ограничившись этим замечанием и не рассматривая общего случая, он дал полное решение задачи в случае, когда три материальные точки взаимно притягиваются обратно-пропорционально кубам расстояний.

С точки зрения общей теории диференциальных уравнений динамики значительно более важным представляется изучение прямолинейного движения при более общих законах взаимодействия, частным случаем которых является закон Ньютона.

Поэтому в ряде наших мемуаров был рассмотрен случай прямолинейного движения трех материальных точек, взаимно притягивающихся с силами обратно-пропорциональными произвольной степени расстояния.

В этих мемуарах общая задача сведена к интегрированию системы двух диференциальных уравнений первого порядка и одной квадратуре, обобщен случай Эйлера, рассмотрен случай парного соударения ***) и дано исследование общего соударения всех трех точек ****).

Наконец, в 1941 г., впервые после Якоби, был найден случай интегрируемости в эллиптических функциях уравнений прямолинейного движения трех равных масс, взаимодействующих с силами прямо-пропорциональными кубами расстояний *****), который впоследствии был обобщен ******).

---

*) См. также статью П. В. Вороица (Университетские известия. т. XLVII, Киев 1907). Случай, когда три (или n) материальные точки во время движения постоянно образуют прямолинейную конфигурацию, рассматривали: Лагранж (1772), Лаплас (1805), Леман-Филе (1891), Дзиобек (1900), Пиццетти (1904) и другие авторы.

**) Bulletin de la Société Math. de France, t. LV, f. III—IV (1928).

***) Ю. Д. Соколов, О прямолинейном движении трех материальных точек, взаимно притягивающихся обратно-пропорционально произвольной степени расстояния и Замечания о прямолинейной задаче трех тел (Сборник научно-исследовательских работ Киевского технол. ин-та кож. пр., т. III, 1940).

****) „Про особливі точки інтегралів прямолінійної задачі трьох тіл, які взаємно притягаються обернено-пропорціонально довільному степеневі віддалення" (Збірник праць Інституту математики АН УРСР № 1, 1938).

*****) „О новом случае интегрируемости в прямолинейной задаче трех тел" (Доклады АН СССР, т. XLVI, № 3, 1945).

******) „Про випадки інтегрувальності в плоскій та прямолінійній задачі трьох тіл" (Доповіді АН УРСР № 4, 1947).

Как обобщение этих исследований, в настоящей работе рассматривается движение по одной прямой трех материальных точек P_0, P, P_2, взаимно притягивающихся (или отталкивающихся) с силами, по модулю равными:

$$m_i m_j |f(r_k)| \qquad (i, j, k=0, 1, 2; \quad i \neq j \neq k), \tag{1}$$

где m_i, m_j — массы точек P_i, P_j, r_k — их взаимное расстояние, а $f(r)$ — аналитическая функция, положительным значениям которой соответствует отталкивание, а отрицательным — притяжение. В § 2 устанавливаются диференциальные уравнения, преобразуемые в § 3 к виду, удобному для дальнейшего исследования. В § 4 рассматриваются случаи интегрируемости в квадратурах и в конечном виде. В § 5 даются общие замечания, относящиеся к особым точкам на действительной оси времени и в § 6 рассматривается случай соударения двух точек.

Параграфы 7—10 посвящены исследованию решений, характеризующих движение с общим соударением всех трех точек в конечный момент (t_1), в предположении, что

$$\lim_{r \to +0} r^{2\alpha+1} f(r) = \pm 2\alpha,$$

где α — произвольное, отличное от нуля, действительное число.

В § 11—13 исследуется поведение величин, характеризующих движение, при неограниченном возрастании момента инерции системы, причем полагается, что

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{f(r)}{r^{2\beta-1}} = 2\beta > 2.$$

Наконец, в § 14 рассматривается движение, при котором в течение конечного промежутка времени взаимные расстояния точек неограниченно возрастают.

§ 2. Диференциальные уравнения движения

Пусть в начальный момент $t=0$ скорости всех трех материальных точек, лежащих на одной прямой, направлены по этой прямой (или равны нулю). Очевидно, что тогда движение всех точек будет происходить по одной неподвижной прямой.

Примем эту прямую за ось абсцисс и предположим, что точки расположены в порядке P_0, P_1, P_2 в сторону возрастающих абсцисс. Обозначим через x абсциссу точки P_1 относительно точки P_0 и через

ξ — абсциссу точки P_2 относительно центра инерции первых двух материальных точек P_0 и P_1 *).

Введем еще обозначения

$$M = m_0 + m_1 + m_2,$$

$$\mu_0 = \frac{m_0}{m_0 + m_1}, \quad \mu_1 = \frac{m_1}{m_0 + m_1}, \quad \mu_2 = \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1}, \quad \mu_3 = \frac{m_2 (m_0 + m_1)}{M}. \tag{2}$$

Тогда, при законе взаимодействия (1), получим такие диференциальные уравнения относительного движения точек P_1 и P_2:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x', \quad \mu_2 \frac{dx'}{dt} = m_0 m_1 f(r_2) - \mu_2 m_2 f(r_0) + \mu_2 m_2 f(r_1) = \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \frac{d\xi}{dt} &= \xi', \quad \mu_3 \frac{d\xi'}{dt} = m_1 m_2 f(r_0) + m_2 m_0 f(r_1) = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$U = m_0 m_1 F(r_2) + m_1 m_2 F(r_0) + m_2 m_0 F(r_1), \tag{4}$$

$$F(r) = \int^{r} f(r)\, dr, \quad r_2 = x, \quad r_0 = \xi - \mu_0 x, \quad r_1 = r_2 + r_0 = \xi + \mu_1 x. \tag{4'}$$

Уравнения (3) имеют интеграл энергии

$$\mu_2 x'^2 + \mu_3 \xi'^2 = 2U + 2h, \tag{5}$$

где h — постоянная интегрирования.

Образуем еще диференциальное уравнение для момента инерции (I) системы материальных точек относительно их общего центра инерции

$$I^2 = \mu_2 x^2 + \mu_3 \xi^2 = \frac{1}{M} \sum' m_i m_j r_k^2. \tag{6}$$

Диференцируя дважды по t выражение (6) для I^2 и пользуясь (3) и (5), получим

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I^2}{dt^2} = \sum m_i m_j \left[2F(r_k) + r_k f(r_k)\right] + 2h. \tag{7}$$

---

*) Таким образом, считая точки непроницаемыми, будем иметь во все время движения $\xi > \frac{m_0}{m_0 + m_1} x > 0$.

§ 3. Преобразование уравнений движения

Введем, вместо x, ξ, x', ξ', новые переменные I, R, φ, Φ по формулам:

$$\sqrt{\mu_2}x = I\cos\varphi,\ \sqrt{\mu_3}\xi = I\sin\varphi \left(0 < \operatorname{arctg}\mu_0 \sqrt{\frac{\mu_3}{\mu_2}} = \chi \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right),$$
$$(\mu_2 xx' + \mu_3\xi\xi')\, I^{\alpha-1} = I^{\alpha}\frac{dI}{dt} = R,\ \sqrt{\mu_2\mu_3}\,(x\xi' - \xi x')\, I^{\alpha-1} = I^{\alpha+1}\frac{d\varphi}{dt} = \Phi, \tag{8}$$

где α — некоторое действительное число, которое в дальнейшем будем выбирать надлежащим образом.

Диференцируя выражение R по t и умножив затем обе части полученного равенства на $I^{\alpha+1}$, найдем

$$I^{\alpha+1}\frac{dR}{dt} = I^{2\alpha}\left(\mu_2 x\frac{dx'}{dt} + \mu_3\xi\frac{d\xi'}{dt} + \mu_2\cdot x'^2 + \mu_3\xi'^2\right) +$$
$$+ (\alpha-1)\,(\mu_2 xx' + \mu_3\xi\xi')\, I^{2\alpha-1}\frac{dI}{dt},$$

что, на основании (3), (8) и равенства

$$I^{2\alpha}(\mu_2 x'^2 + \mu_3\xi'^2) = I^{2\alpha-2}(\mu_2 xx' + \mu_3\xi\xi')^2 + \mu_2\mu_3 I^{2\alpha-2}(x\xi' - \xi x')^2 = R^2 + \Phi^2,$$

приводится к виду

$$I^{\alpha+1}\frac{dR}{dt} = \alpha R^2 + \Phi^2 + I^{2\alpha+1}\frac{\partial U}{\partial I},$$

где U рассматривается как функция от I и φ.

Диференцируя далее выражение Φ по t и снова умножив результат на $I^{\alpha+1}$, получим

$$I^{\alpha+1}\frac{d\Phi}{dt} = \sqrt{\mu_2\mu_3}\, I^{2\alpha}\left(x\frac{d\xi'}{dt} - \xi\frac{dx'}{dt}\right) + (\alpha-1)\sqrt{\mu_2\mu_3}\,(x\xi' - \xi x')\, I^{2\alpha-1}\frac{dI}{dt} =$$
$$= I^{2\alpha}\left(\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_3}}\, x\frac{\partial U}{\partial\xi} - \sqrt{\frac{\mu_3}{\mu_2}}\,\xi\frac{\partial U}{\partial x}\right) + (\alpha-1)\, R\Phi = I^{2\alpha}\frac{\partial U}{\partial\varphi} + (\alpha-1)\, R\Phi.$$

Таким образом, введя обозначение

$$V = I^{2\alpha}U, \tag{8'}$$

где V есть функция от I и φ, заменим уравнения (3) такой системой:

$$I^{\alpha}\frac{dI}{dt} = R,\quad I^{\alpha+1}\frac{dR}{dt} = \alpha R^2 + \Phi^2 - 2\alpha V + I\frac{\partial V}{\partial I},$$
$$I^{\alpha+1}\frac{d\varphi}{dt} = \Phi,\quad I^{\alpha+1}\frac{d\Phi}{dt} = (\alpha-1)\, R\Phi + \frac{\partial V}{\partial\varphi}, \tag{9}$$

где

$$V = I^{2\alpha} \sum m_i m_j F(r_k), \tag{10}$$

$$I \frac{\partial V}{\partial I} = I^{2\alpha} \sum m_i m_j \left[2\alpha F(r_k) + r_k f(r_k)\right] = 2\alpha V + I^{2\alpha} \sum m_i m_j r_k f(r_k), \tag{10'}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = I^{2\alpha} \sum m_i m_j f(r_k) \frac{\partial r_k}{\partial \varphi} = I^{2\alpha+1} \sum m_i m_j f(r_k) \frac{dp_k}{d\varphi}. \tag{$10_1'$}$$

$$p_0 = \frac{r_0}{I} = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{\mu_3}} - \frac{\mu_0}{\sqrt{\mu_2}} \cos\varphi, \quad p_1 = \frac{r_1}{I} = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{\mu_3}} + \frac{\mu_1}{\sqrt{\mu_2}} \cos\varphi, \quad p_2 = \frac{r_2}{I} = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\mu_2}}, \tag{11}$$

$$\frac{dp_0}{d\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\mu_3}} + \frac{\mu_0}{\sqrt{\mu_2}} \sin\varphi, \quad \frac{dp_1}{d\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\mu_3}} - \frac{\mu_1}{\sqrt{\mu_2}} \sin\varphi, \quad \frac{dp_2}{d\varphi} = -\frac{\sin\varphi}{\sqrt{\mu_2}}. \tag{11'}$$

Интеграл энергии (5) принимает вид

$$R^2 + \Phi^2 = 2V + 2hI^{2\alpha} \tag{12}$$

и уравнение (7) заменится таким

$$I^{2\alpha} \frac{d(RI^{1-\alpha})}{dt} = I^{2\alpha} \frac{d(II')}{dt} = 2(1-\alpha)V + I\frac{\partial V}{\partial I} + 2hI^{2\alpha}. \tag{13}$$

§ 4. Случаи интегрируемости в квадратурах

Кроме положений равновесия ($I = I_0$, $\varphi = \varphi_0$, $R = 0$, $\Phi = 0$), определяемых из уравнений

$$\frac{f(r_0)}{m_0} = -\frac{f(r_1)}{m_1} = \frac{f(r_2)}{m_2},$$

и тривиальных случаев $f(r) - Ar$, $f(r) = A$, когда уравнения движения интегрируются в элементарных функциях, система (9) допускает решение в квадратурах в следующих случаях:

1) $f(r)$ — произвольная функция, $m_2 = m_0$ и

$$\varphi = \varphi_0 = \operatorname{arc\,tg}\,(1+\mu_0)\sqrt{\frac{\mu_3}{\mu_2}} = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{M}{m_1}}.$$

Тогда

$$r_0 = r_2 = \frac{r_1}{2} = \frac{\cos\varphi_0}{\sqrt{\mu_2}} I = \frac{I}{\sqrt{2m_0}}, \quad \frac{dp_1}{d\varphi} = \frac{dp_0}{d\varphi} + \frac{dp_2}{d\varphi} = 0 \quad \left(\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)_{\varphi=\varphi_0} = 0$$

и из (9) и (12), положив $\alpha = 0$, получим

$$\Phi = 0, \quad R^2 = 2(U+h), \quad t = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{I_0}^{I} \frac{dI}{\sqrt{U+h}},$$

где

$$U = m_0 \left[m_0 F\left(\sqrt{\frac{2}{m_0}} I\right) + 2m_1 F\left(\frac{I}{\sqrt{2m_0}}\right) \right].$$

2) $f(r)=Ar+Br^{-2\alpha-1}$, где α, A, B — произвольные действительные числа, а $\varphi=\text{const}=\varphi_0$ *), причем φ_0 есть корень уравнения $\frac{\partial V}{\partial\varphi}=0$, лежащий между χ и $\frac{\pi}{2}$. Последнее уравнение, на основании ($10'_1$), (11), (11′), приводится к форме

$$\frac{m_0 m_1 \sin\varphi}{\mu_3^{\alpha}\cos^{2\alpha+1}\varphi}-\frac{m_1 m_2(\sqrt{\mu_2}\cos\varphi+\mu_0\sqrt{\mu_3}\sin\varphi)}{(\sqrt{\mu_2}\sin\varphi-\mu_0\sqrt{\mu_3}\cos\varphi)^{2\alpha+1}}-$$

$$-\frac{m_2 m_0(\sqrt{\mu_2}\cos\varphi-\mu\sqrt{\mu_3}\sin\varphi)}{(\sqrt{\mu_2}\sin\varphi+\mu_1\sqrt{\mu_3}\cos\varphi)^{2\alpha+1}}=0 \tag{14}$$

и после подстановки

$$\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_3}}\operatorname{tg}\varphi-\mu_0=\frac{r_0}{r_2}=\frac{1}{p}$$

принимает вид

$$m_2 p^{2\alpha+1}[(1+p)^{2\alpha+2}-1]+m_1(1+p)^{2\alpha+1}(p^{2\alpha+2}-1)-$$

$$-m_0[(1+p)^{2\alpha+2}-p^{2\alpha+2}]=0. \tag{14′}$$

Это уравнение при $\alpha=-1$ и $\alpha=-2$, $m_0=m_1=m_2$ обращается в тождество и при $\alpha>-1$ всегда имеет положительные корни $\left(\text{при } \alpha\geqslant-\frac{1}{2}\ \text{— только один}\right)$; при $\alpha<-1$ таких корней может быть несколько, а может и совсем не быть **). При произвольном α и $m_2=m_0$ это уравнение имеет корень $p=1$.

---

*) Вообще, если в уравнениях (9) положить $\varphi=\text{const}=\varphi_0$ $(\Phi=0)$, считая I переменным, то должны будем иметь тождественно относительно I; $\frac{\partial V}{\partial\varphi}=0$; последнее равенство приводится в виду

$$(m_1r_2+m_2r_1)f(r)-(m_1r_0+m_0r_1)f(r_2)+(m_0r_2-m_2r_0)f(r_1)=0$$

и удовлетворяется тождественно относительно I и φ при $f(r)=Ar$ или $f(r)=Ar+Cr^3$ и $m_0=m_1=m_2$ (частные случаи случая 2), а также удовлетворяется при произвольной функции $f(r)$, если $m_2=m_0$ и $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{M}{m_1}}$ ($r_0=r_2$; случай 1). При $m_2\neq m_0$ из всех функций, допускающих в некоторой области представление в виде суммы обобщенного степенного ряда положительных и отрицательных степеней, последнее равенство удовлетворяется только для функции $f(r)=Ar+Br^{-2\alpha-1}$, если φ_0 есть корень уравнения (14) (при $f(r)=Ar$ или $f(r)=Ar+Cr^3$ и $m_0=m_1=m_2$ φ_0 — произвольно).

) См. § 7 мемуара, цитированного в пр. *) стр. 4, § 5 мемуара, цитированного в пр. ****) стр. 4, а также работы, помещенные в № 4, 9 и 10 „Збірника праць Інституту математики АН УРСР“.

Тогда из (9) и (12) будем иметь при $\alpha \neq 0$

$$\Phi=0,\quad R^2=AMI^{2\alpha+2}+2hI^{2\alpha}+B_1 \quad \left| B_1=-\frac{B}{\alpha}\sum m_i m_j (p_k)_0^{-2\alpha} \right|$$

или

$$R^2=AMI^2+B_0 \ln I+B_1 \quad \left| B_0=2B\sum m_i m_j,\ B_1=2B\sum m_i m \ln (p_k)_0+2h \right]$$

при $\alpha=0$.

Таким образом, по первому из уравнений (9):

$$t=\int_{I_0}^{I} \frac{I^\alpha dI}{\sqrt{AMI^{2\alpha+2}+2hI^{2\alpha}+B_1}} \text{ *)} \qquad \text{при } \alpha \neq 0$$

и

$$t=\int_{I_0}^{I} \frac{dI}{\sqrt{AMI^2+B_0 \ln I+B_1}} \qquad \text{при } \alpha=0.$$

При $A=0$, $B<0$, $\alpha=\frac{1}{2}$ (Ньютонов закон притяжения) получим известный случай Эйлера, причем (14′) будет уравнением 5-ой степени:

$$(m_1+m_2)p^5+(2m_1+3m_2)p^4+(m_1+3m_2)p^3-$$
$$-(m_1+3m_0)p^2-(2m_1+3m_0)p-(m_1+m_0)=0;$$

3) $f(r)=Ar+Br^{-3}$. В этом случае

$$F(r)=\frac{A}{2}r^2-\frac{B}{2}r^{-2},\qquad U=\frac{AM}{2}I^2-\frac{B}{2}I^{-2}\sum\frac{m_i m_j}{p_k^2}$$

и, положив $\alpha=1$, будем иметь

$$V=\frac{AM}{2}I^4-\frac{B}{2}\sum\frac{m_i m_j}{p_k^2}=\frac{AM}{2}I^4-\frac{B}{2}\Omega(\varphi),$$

где

$$\Omega(\varphi)=\sum\frac{m_i m_j}{p_k^2}=$$

$$=\mu_2\mu_3\left|\frac{m_0 m_1}{\mu_3\cos^2\varphi}+\frac{m_1 m_2}{(\sqrt{\mu_2}\sin\varphi-\mu_0\sqrt{\mu_3}\cos\varphi)^2}+\frac{m_2 m_0}{(\sqrt{\mu_2}\sin\varphi+\mu_1\sqrt{\mu_3}\cos\varphi)^2}\right|.$$

Из третьего и четвертого уравнения (9) получим для данного случая

$$\Phi\, d\Phi=-\frac{B}{2}d\Omega(\varphi),$$

откуда

$$\Phi^2=-B\Omega(\varphi)-a, \tag{15}$$

где a — постоянная интегрирования.

*) При $A=0$ эти квадратуры рассмотрены в § 8 мемуара, цитированного в пр. ***) стр. 4.

Тогда из (12)

$$R^2 = AMI^4 + 2hI^2 + a \tag{16}$$

и, на основании этого, из первого уравнения (9)

$$t = \frac{1}{2}\int\limits_{I_0}^{I} \frac{d(I^2)}{\sqrt{AMI^4 + 2hI^2 + a}}.$$

Отсюда

$$I^2 = \frac{(I_0' + I_0\tau)^2 - aI_0^{-2}}{\tau^2 - AM}, \tag{17}$$

где

$$\tau = \begin{cases} \sqrt{AM}\,\mathrm{cth}\,\sqrt{AM}\,t & \text{при} \quad A > 0, \\ \sqrt{-AM}\,\mathrm{ctg}\,\sqrt{-AM}\,t & \text{при} \quad A < 0, \\ \dfrac{1}{t} & \text{при} \quad A = 0 \end{cases}$$

и

$$I_0'^2 = AMI_0^2 + 2h + aI_0^{-2}.$$

Наконец, связь φ с $t(\tau)$ определяется гиперэллиптической квадратурой

$$\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{-B\Omega(\varphi) - a}} = \int\limits_0^t \frac{dt}{I^2}, \tag{18}$$

где

$$\int\limits_0^t \frac{dt}{I^2} = \int\limits_\tau^\infty \frac{d\tau}{(I_0' + I_0\tau)^2 - aI_0^{-2}} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \ln\frac{I_0^2\tau + R_0 + \sqrt{a}}{I_0^2\tau + R_0 - \sqrt{a}} \qquad \text{при } a > 0 \quad (R_0 = I_0 I_0'),$$

$$\int\limits_0^t \frac{dt}{I^2} = \int\limits_\tau^\infty \frac{d\tau}{(I_0' + I_0\tau)^2 - aI_0^{-2}} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{-a}}{R_0 + I_0^2\tau} \qquad \text{при } a < 0,$$

$$\int\limits_0^t \frac{dt}{I^2} = \int\limits_\tau^\infty \frac{d\tau}{(I_0' + I_0\tau)^2 - aI_0^{-2}} = \frac{1}{R_0 + I_0^2\tau} \qquad \text{при } a = 0.$$

Формулы (15)—(18) дают полное решение задачи, из которого при $A=0$, $B=0$ получим результат Якоби.

В частности, при $a = AMI_0^4$, $h = -AMI_0^2$, будем иметь решение

$$I = I_0, \quad R = 0, \quad \Phi^2 = -B\Omega(\varphi) - a, \quad t = I_0^2 \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{-B\Omega(\varphi) - a}}$$

и при $A \geqslant 0$ должно быть $B < 0$*).

*) Наоборот, если в (9) положить $I = I_0 = \mathrm{const}$, $R = 0$ (при переменном φ), то найдем, что $f(r) = Ar + Br^{-3}$.

4) $f(r)=Ar+Br^{-3}+Cr^3$ и $m_0=m_1=m_2$. При этих условиях

$$F(r)=\frac{A}{2}r^2-\frac{B}{2}r^{-2}+\frac{C}{4}r^4,$$

$$U=\frac{AM}{2}I^2-\frac{Bm_0^2}{2}I^{-2}\sum\frac{1}{p_k^2}+\frac{Cm_0^4}{4}I^4\sum p_k^4$$

и, положив в формулах § 3 $\alpha=1$, будем иметь

$$V=\frac{AM}{2}I^4+\frac{9}{8}CI^6-\frac{B}{2}\Omega\varphi,$$

где

$$\Omega(\varphi)=2m_0^2\left[\frac{1}{4\cos^2\varphi}+\frac{1}{(\sqrt{3}\sin\varphi-\cos\varphi)^2}+\frac{1}{(\sqrt{3}\sin\varphi+\cos\varphi)^2}\right],\quad M=3m_0;$$

снова, как и в случае (3)

$$\Phi^2=-B\Omega(\varphi)-a, \tag{15'}$$

после чего из (12)

$$R^2=\frac{9}{4}CI^6+AMI^4-2hI^2+a. \tag{16'}$$

Связь I с t дается эллиптической квадратурой

$$t=\frac{1}{2}\int_{I_0}^{I}\frac{d(I^2)}{\sqrt{\frac{9}{4}CI^6+AMI^4+2hI^2+a}} \tag{17'}$$

и, наконец, связь φ с t (1) выражается при помощи квадратур

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{-B\Omega(\varphi)-a}}=\int_0^t\frac{dt}{I^2}=\int_{I_0}^{I}\frac{dI}{I\sqrt{\frac{9}{4}CI^6+AMI^4+2hI^2-a}}. \tag{18'}$$

В частности, при $B=0$

$$\Phi^2=-a=\Phi_0^2,\quad \varphi-\varphi_0=\Phi_0\int_0^t\frac{dt}{I^2}.$$

Если также и $A=0$, то

$$R^2=\frac{9}{4}CI^6-2hI^2-\Phi_0^2,$$

$$dt=\frac{d(I^2)}{\frac{3}{2}\sqrt{C}\sqrt{4I^6-\frac{32h}{9C}I^2-\frac{16}{9C}\Phi_0^2}},$$

откуда

$$I^2 = \pm \mathfrak{P}\left(\frac{3}{2}\sqrt{|C|}\,t + a_1\right) = \pm \mathfrak{P}(v), \quad \varphi = \pm \frac{2\Phi_0}{3\sqrt{|C|}} \int \frac{dv}{\mathfrak{P}(v)} + a_2,$$

где a_1 и a_2 — постоянные интегрирования.

Таким образом, имеем случай, впервые указанный нами в 1941 г.*).

§ 5. Особые точки на действительной оси времени

Пусть $f(r)$ — функция голоморфная около всякого действительного, положительного значения r, принимающая при таких значениях аргумента действительные значения.

Если в начальный момент $t=0$ x, ξ, x', ξ' имеют действительные конечные значения x_0, ξ_0, x'_0, ξ'_0, причем $\xi_0 > \mu_0 x_0 > 0$ $[(r_k)_0 > 0]$, так что система находится в регулярном положении и имеет определенные конечные скорости, то существует, по классической теореме Коши, единственное, голоморфное внутри некоторого круга $|t| < T$ комплексной t-плоскости, решение системы (3), соответствующее данным начальным условиям.

Имея, таким образом, регулярное начальное движение, станем изменять t вдоль действительной оси, начиная от $t=0$, и устанавливать аналитическое продолжение полученного решения вдоль этого пути.

Пусть движение будет продолжаться регулярно (и между точками не происходит соударений**) до конечного момента t ***), в который оно перестанет быть таким. Тогда, на основании известной теоремы Пенлеве „о минимуме трех величин“ ****), легко установить, что при $t \to t_1$ минимум двух величин $\frac{1}{r_1}$ и $\underline{r}$ (где $\underline{r}$ — меньшее из двух расстояний r_0, r_2 в момент t) стремится к нулю. Если $f(r)$ ограничена сверху или снизу при $0 \leqslant r < +\infty$, то и правая часть четвертого из уравнений (3), являющаяся непрерывной функцией от t при $0 \leqslant t < t_1$, также будет ограничена сверху или снизу в этом интервале. На этом основании заключаем, что при $t \to t_1$ ξ' стремится к определенному конечному пределу или неограниченно возрастает по абсолютному значению; следовательно, и ξ стремится к определенному конечному пределу $\xi_1 \geqslant 0$ или неограниченно возрастает.

---

*) См. мемуары, цитированные в пр. 5 и 6 к стр. 4.

**) Если удар будем считать упругим, а точки непроницаемыми, то и в случае голоморфности $f(r)$ при $r=0$ движение в момент соударения будет нерегулярным из-за разрыва непрерывности скоростей. Если же, при приближении к конечному моменту соударения, скорости стремятся к нулю (что возможно только при $f(0) \neq 0$), то при $f(0)<0$ в момент соударения движение будет также нерегулярным, а при $f(0)>0$ регулярным.

***) Этот момент времени, не нарушая общности, можно считать *положительным*. Если движение будет регулярным при всех значениях t, то для искомых функций сможем, как известно, построить разложения, годные при всех t.

****) „Стокгольмские лекции“, стр. 571.

В случае $\xi_1 > 0$, ввиду того, что $0 \leq x \leq \frac{1}{\mu_0}\xi$, $\frac{1}{r_1}$ ограничено снизу и по вышесказанному $r \to 0$. Тогда одно и то же расстояние (r_0 или r_2) стремится к нулю. В противном случае существовало бы значение $t_2 < t_1$, как угодно близкое к t_1, до и после которого минимум r, меньший произвольно малого положительного числа ε при $t = t_2$, представлялся бы двумя разными расстояниями; при $t = t_2$ они были бы равны между собою и оба $< \varepsilon$, а тогда и $r_1 = r_0 + r_2$ было бы меньше 2ε, что противоречит условию.

В случае $\xi_1 = 0$ x также стремится к нулю.

Таким образом, при $t \to t_1$ I^2 стремится к определенному конечному пределу $I_1^2 \geq 0$ или неограниченно возрастает. Такое же заключение о поведении I^2 получим путем рассмотрения уравнения (7) и в случае, когда $F_1(r) = 2F(r) + rf(r)$ ограничена сверху *) или снизу при изменении r от 0 до $+\infty$, или при условии $rf(r) > -A$, где $A > 0$.

В последнем случае достаточно заметить, что уравнение (7) можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 I^2}{dt^2} = \mu_2 x'^2 + \mu_3 \xi'^2 + \sum m_i m_j r_k f(r_k).$$

Все предыдущие условия не являются, конечно, необходимыми для существования рассматриваемых далее решений, характеризующих движение с соударениями точек или с их неограниченным расхождением: они только гарантируют отсутствие на действительной оси времени таких особых точек t_1, что при $t \to t_1$ I^2 не стремится к определенному, конечному или бесконечному пределу.

§ 6. Случай соударения двух точек

Предположим, что в интервале $0 \leq t < t_1$ между точками не происходит соударений ($\xi > \mu_0 x > 0$) и движение продолжается регулярно, а при $t \to t_1$

$$\lim I^2 = I_1^2 > 0.$$

Тогда ξ и r_1 — ограничены сверху; r в некотором интервале представляется одним и тем же расстоянием, например x, и стремится к нулю. Таким образом, при $t \to t_1$

$$\lim x = 0, \quad \lim \xi = \xi_1 = \frac{I_1}{\sqrt{\mu_3}} > 0.$$

На основании этого, из четвертого уравнения (3) найдем, что $\frac{d\xi'}{dt}$ и ξ' стремятся при $t \to t_1$ к определенным конечным пределам

$$\lim_{t \to t_1} \xi' = \xi_1'.$$

*) Очевидно, что при ограниченности сверху $f(r)$ или $F_1(r)$ случай $I^2 \to +\infty$ невозможен.

Следовательно, в момент t_1 имеет место соударение двух точек P_0 и P_1 на конечном расстоянии от P_2, которая в этот момент имеет конечную скорость.

Пусть $F(x)$ стремится к определенному пределу при $x \to +0$: тогда можем положить

$$F(0) = \lim_{x \to +0} F(x) = 0$$

и по (4) и (5) будем иметь

$$\lim U = m_2(m_0 + m_1) F(\xi_1),\ \lim x' = x'_1 = \\ = -\sqrt{\frac{2m_2(m_0 + m_1) F(\xi_1) + 2h - \mu_3 \xi_1'^2}{\mu_2}}. \tag{19}$$

Если $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица в интервале $0 \leq x < x^*$, то непосредственно из уравнений (3), на основании классической теоремы, следует существование семейства решений, соответствующего парному соударению и зависящего от четырех произвольных параметров *). Если же функция $f(x)$ не удовлетворяет условию Липшица, но $x'_1 < 0$ **), то, вследствие монотонности изменения x в некотором интервале (t_0, t_1), можно принять в этом интервале x за аргумент и заменить систему (3) уравнениями

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{\xi'}{x'},\quad \frac{d\xi'}{dx} = \frac{M}{m_0 + m_1}\,\frac{m_1 f(r_0) + m_0 f(r_1)}{x'} = \frac{1}{\mu_3 x'}\frac{\partial U}{\partial \xi},\quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x'}, \tag{20}$$

где

$$x' = -\sqrt{\frac{2\Sigma m_i m_j F(r_k) + 2h - \mu_3 \xi'^2}{\mu_2}}.$$

Правые части уравнений (20) и их частные производные по ξ, ξ' — непрерывны в окрестности системы значений $x = 0$, $\xi = \xi_1$, $\xi' = \xi'_1$, при всяких действительных конечных значениях $\xi_1 > 0$, ξ'_1, при которых подкоренное выражение в (19) будет положительным; следовательно, существует единственная система функций $\xi(x)$, $\xi'(x)$, $t(x)$, непрерывных в некотором интервале, удовлетворяющих уравнениям (20) и принимающих при $x = 0$ значения ξ_1, ξ'_1, t_1.

Если $\lim_{x \to +0} F(x) = +\infty$, то из (5) следует, что,

$$\lim_{t \to t_1} x' = -\infty;$$

*) Если $f(0) = 0$ и $x'_1 = 0$, то $x \equiv 0$ и $x' \equiv 0$.

**) Допущение $x'_1 > 0$, очевидно, противоречит условию $x \to +0$. Случай $x'_1 = 0$ рассматривается в отдельной статье. Если $f(x)$ не удовлетворяет условию Липшица, но $\frac{f(x)}{x}$ ограничено сверху при $x \to +0$, то случай $\lim_{t \to t_1} x' = 0$ невозможен и если $f(0) = 0$, то $x \equiv 0$ и $x' \equiv 0$.

таким образом, в некотором интервале (t_0, t_1) x уменьшается монотонно и, приняв x за аргумент, снова получим предыдущие выводы. Положив

$$X = \frac{x'}{\sqrt{F(x)}} = x'\sqrt{S(x)} =$$

$$= -\sqrt{\frac{2m_0 m_1 + [\,2m_1 m_2 F(r_0) + 2m_2 m_0 F(r_1) + 2h - \mu_3 \xi'^2\,]\, S(x)}{\mu_2}},$$

$$\left(S(0) = \lim_{x\to+0} S(x) = 0;\ \ \lim_{x\to+0} X = -\sqrt{2(m_0+m_1)}\right),$$

сможем записать уравнения (20) в виде

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{\sqrt{S(x)}}{X}\xi', \quad \frac{d\xi'}{dx} = \frac{\sqrt{S(x)}}{\mu_3 X}\frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{\sqrt{S(x)}}{X}.$$

Если, например, $F(x) = \pm x^{2\beta}$ $(\beta > 0)$, то в окрестности $x=0$, $\xi-\xi_1$, $\xi'-\xi'_1$, $t-t_1$, $x'-x'_1$ $(x'_1 < 0$ *$))$ разлагаются по целым положительным степеням x и $x^{2\beta}$; следовательно, при целом положительном значении 2β они будут функциями голоморфными при $x=0$.

Если $F(x)=x^{-2\alpha}$ $(\alpha > 0)$, то $\xi-\xi_1$, $\xi'-\xi'_1$, $t-t_1$, x' разлагаются по степеням x, x^{α}, причем разложения для x' и $t-t_1$ содержат соответственно множителей $x^{-\alpha}$ и $x^{\alpha+1}$.

§ 7. Движение с общим соударением; случай $\beta > 0$, $h > 0$

Рассмотрим теперь случай, когда при $t \to t_1$ $\lim I^2 = 0$; тогда $x \to +0$, $\xi \to +0$ и в момент t_1 имеет место общее соударение всех трех точек.

Пусть

$$\lim_{r\to+0} \frac{f(r)}{r^{2\beta-1}} = \mp 2\beta \left| \lim_{r\to+0} \frac{F(r)}{r^{2\beta}} = \mp 1; \quad \beta > 0 \right|. \tag{21}$$

Тогда $U \to \mp 0$ и из уравнения (5) видим, что в случае верхнего знака должно быть $h > 0$, а в случае нижнего знака $h \geqslant 0$.

Ввиду того, что правая часть четвертого из уравнений (3) в окрестности $t=t_1$ сохраняет постоянно свой знак, ограниченная по (5) переменная ξ' изменяется монотонно и стремится при $t=t_1$ к определенному пределу $\xi'_1 \leq 0$; тогда, на основании того же уравнения (5) и $x' \to x'_1 \leq 0$ **$)$.

---

*) Если $x'_1 = 0$ и $\beta \geq 1$, то $x=0$, $x'=0$. При $\beta < 1$ должно быть $F(x) = +x^{2\beta}$ и $\xi-\xi_1$, $\xi'-\xi'_1$, $t-t_1$, x' разлагаются по степеням x, $x^{1-\beta}$, причем разложение для x' имеет множителем x^{β}.

**) При $2\beta \geq 1$ эти выводы можем сделать непосредственно из уравнений (3), принимая во внимание ограниченность правых частей.

В настоящем параграфе рассмотрим случай $h > 0$, в котором должно быть $\xi'_1 < 0$ *). Следовательно, $\frac{x'}{\xi'}$, а потому и $q = \frac{x}{\xi}$, стремится к определенному пределу q_1, причем $0 \leqslant q_1 \leqslant \frac{1}{\mu_0}$; тогда и $\varphi \to \varphi_1$, причем $\chi \leqslant \varphi_1 \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Ввиду того, что случай $q_1 = \frac{1}{\mu_0}$ $(\varphi_1 = \chi)$ переменой ролей точек P_0 и P сводится к случаю $q_1 = 0$ $\left(\varphi_1 = \frac{\pi}{2}\right)$, в дальнейшем рассмотрим этот последний и случай $\chi < \varphi_1 < \frac{\pi}{2}$.

Заметим, что при условии $\lim\limits_{r \to +0} \frac{f(r)}{r^{2\beta - 1}} = -2\beta$ и $0 < \beta < \frac{1}{2}$ случай $q_1 = 0$ невозможен, так как тогда, по второму из уравнений (3), $\frac{dx'}{dt}$ в окрестности $t = t_1$ была бы постоянно отрицательной и $x' \to 0$, монотонно убывая, что противоречит условию $x \to +0$.

Положив в формулах § 3 $\alpha = 0$, найдем на основании предыдущих выводов, что при $t \to t_1$

$$\Phi = \sqrt{\mu_2 \mu_3}\, \frac{x\xi' - \xi x'}{I} \to 0, \qquad R = \frac{\mu_2 x x' + \mu_3 \xi \xi'}{I} = \frac{dI}{dt} \to -\sqrt{2h} \text{ **)};$$

следовательно, I в некотором интервале убывает монотонно. Четвертое и первое из уравнений (9) дадут

$$\frac{d(\Phi I)}{dI} = \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{I^{2\beta}}{R} \sum m_i m_j \frac{f(r_k)}{r_k^{2\beta - 1}} p_k^{2\beta - 1} \frac{dp_k}{d\varphi}.$$

Отсюда заключаем, что Φ есть бесконечно-малая, порядка не низшего 2β относительно I, исключая случай $q_1 = 0$ при $2\beta < 1$.

Из третьего и первого из уравнений (9)

$$\frac{d\varphi}{dI} = \frac{\Phi}{IR},$$

откуда заключаем, что $\varphi - \varphi_1$ есть также бесконечно-малая, порядка не низшего 2β относительно I.

---

*) Если бы $\xi'_1 = 0$, то по (5) $x'_1 = -\sqrt{\frac{2h}{\mu_2}}$ и $\frac{\xi'}{x'} \to 0$, что невозможно.

**) Эти же заключения получим непосредственно из уравнений (13) (или (7) и (12)). В самом деле, уравнение (13) в данном случае $(\alpha = 0)$ имеет вид: $\frac{d^2 I^2}{dt^2} = 4h + I^{2\beta} F_2$, где $F_2 = 2 \sum m_i m_j p_k^{2\beta} \frac{F_1(r_k)}{r_k^{2\beta}}$ — функция, ограниченная по абсолютному значению в окрестности $I = 0$. Отсюда заключаем, что в некотором интервале $\frac{dI^2}{dt}$ монотонно возрастает, приближаясь [по (12)] к -0; следовательно, в некотором интервале I^2 убывает монотонно. Из этого уравнения: $R^2 = 2h + \frac{1}{I^2} \int\limits_0^I I^{2\beta + 1} F_2\, dI$ и $R \to -\sqrt{2h}$, а по (12): $\Phi \to 0$.

Если производная $f'(r) = \frac{df(r)}{dr}$ — ограничена при $0 < r \leqslant r^*$ $\left(\text{что возможно только при } \beta \geqslant 1 \text{ и } \beta = \frac{1}{2}\right)$, то функция $f(r)$ в интервале $0 \leqslant r \leqslant r^*$ удовлетворяет условию Липшица и, на основании известных теорем, сделаем вывод, что существует единственное, непрерывное в некотором интервале $(t_1 - \tau,\ t_1)$ $(\tau > 0)$, решение системы уравнений (3), такое, что при $t \to t_1 - 0$:

$$x \to +0, \quad \xi \to +0, \quad x' \to x'_1, \quad \xi' \to \xi'_1,$$

при всяких значениях t_1, x'_1, ξ'_1, таких, что

$$\xi'_1 \leqslant 0, \quad 0 \geqslant x'_1 \geqslant \frac{\xi'_1}{\mu_0} \qquad (h \geqslant 0).$$

В частности, если $f(0) = 0$ $(\beta \geqslant 1)$, при $x'_1 = 0$ $\left(\text{или } x'_1 = \frac{\xi'_1}{\mu_0}\right)$

$$x = 0, \quad x' = 0 \qquad (\text{или } r_0 = \xi - \mu_0 x = 0, \quad r'_0 = \xi' - \mu_0 x' = 0),$$

а при $\xi'_1 = 0$ $(x'_1 = 0,\ h = 0)$

$$x = 0, \quad x' = 0, \quad \xi = 0, \quad \xi' = 0\ *).$$

Пусть $f'(r)$ — не ограничена в окрестности $r = 0$, но существует такое положительное, не большее двух, число γ, что

$$\lim_{r \to +0} r^{\gamma} f'(r) = l\ **) \quad (0 < \gamma \leqslant 2). \tag{22}$$

Положив в уравнениях (9) $\alpha = 0$ и приняв I за аргумент, заменим (9) системой двух уравнений первого порядка

$$I \frac{d\varphi}{dI} = \frac{\Phi}{R}, \quad I \frac{d\Phi}{dI} = -\Phi + \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \tag{23}$$

уравнением

$$R = -\sqrt{2h + 2U - \Phi^2} \tag{24}$$

и уравнением

$$\frac{dt}{dI} = \frac{1}{R}, \tag{25}$$

---

*) Таким образом, при указанных условиях и при $h \geqslant 0$ невозможно движение, во время которого $q = \frac{x}{\xi}$ неограниченно осциллирует, не стремясь ни к какому пределу (ср. § 9).

**) Если $\gamma \leqslant 0$, то $f'(r)$ ограничена в окрестности $r = 0$ и будем иметь предыдущее заключение. По (21) при $\beta \neq \frac{1}{2}$: $\gamma \geqslant 2(1 - \beta)$; если $\gamma > 2(1-\beta)$, то $l = 0$, если $\gamma = 2(1-\beta)$, то $l = -2\beta(2\beta-1) \neq 0$ $(2\beta \neq 1)$ и наоборот. Следовательно, в данном случае, при $\beta \geqslant 1$: $0 < \gamma \leqslant 2$ и $l = 0$, при $\beta < 1$ и $\beta \neq \frac{1}{2}$: $\gamma = 2(1-\beta)$ и $l = -2\beta(2\beta - 1)$ или $2(1-\beta) < \gamma \leqslant 2$ и $l = 0$. При $\beta = \frac{1}{2}$ и $2 \geqslant \gamma > 1$ $l = 0$, а при $0 < \gamma < 1$ l может быть произвольным числом.

из которого, после интегрирования (23), t определится при помощи квадратуры.

Введя теперь новые переменные

$$\psi = \frac{\varphi - \varphi_1}{I^{2\beta}}, \quad \Psi = \frac{\Phi}{I^{2\beta}} \qquad \left(\chi < \varphi_1 < \frac{\pi}{2}\right), \tag{26}$$

придем к рассмотрению системы

$$\begin{aligned} I\frac{d\psi}{dI} &= -2\beta(\psi - \psi_1) + \frac{\Psi - \Psi_1}{R_1} + \Psi\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}\right), \\ I\frac{d\Psi}{dI} &= -(2\beta+1)(\Psi - \Psi_1) + \frac{W}{R} - \frac{W_1}{R_1}, \end{aligned} \tag{A}$$

где

$$R = -\sqrt{2h + 2U - I^{4\beta}\Psi^2}, \tag{A$_1$}$$

$$U = I^{2\beta}\sum m_i m_j p_k^{2\beta}\frac{F(r_k)}{r_k^{2\beta}}, \tag{A$_2$}$$

$$\begin{aligned} &W = \frac{\partial(UI^{-2\beta})}{\partial\varphi} = \sum m_i m_j p_k^{2\beta-1}\frac{dr_k}{d\varphi}\frac{f(r_k)}{r_k^{2\beta-1}}, \\ &W_1 = \lim_{\substack{I\to+0\\ \varphi\to\varphi_1}} W, \quad R_1 = -\sqrt{2h}, \quad \psi_1 = \frac{W_1}{2\beta(2\beta+1)R_1^2}, \quad \Psi_1 = \frac{W_1}{(2\beta+1)R_1}, \end{aligned} \tag{A$_3$}$$

$$\frac{\partial W}{\partial\psi} = I^{2-\gamma}\sum m_i m_j\left(\frac{dp_k}{d\varphi}\right)^2\frac{r_k^{\gamma} f'(r_k)}{p_k^{\gamma}} - I^{2\beta}\sum m_i m_j p_k^{2\beta}\frac{f(r_k)}{r_k^{2\beta-1}}. \tag{A$_4$}$$

Функции $\Psi\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}\right)$, $\frac{W}{R} - \frac{W_1}{R_1}$ и их частные производные по ψ, Ψ непрерывны в окрестности системы значений $I=0$, $\psi=\psi_1$, $\Psi=\Psi_1$ и стремятся к нулю при $I\to+0$, $\psi\to\psi_1$, $\Psi\to\Psi_1$, а корни характеристического уравнения системы (A): $\lambda_1 = -2\beta$, $\lambda_2 = -(2\beta+1)$. Следовательно, на основании некоторого обобщения известных теорем Боля и Коттона, можем утверждать, что существует единственное такое решение системы (A), что при $I\to+0$: $\psi\to\psi_1$, $\Psi\to\Psi_1$ *).

В частности, при $m_0=m_2$, $\varphi_1 = \operatorname{arc\,tg}(1+\mu_0)\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{M}{m_1}}$ и при $f(r) = Ar^{-\gamma} + 2\beta r^{2\beta-1}$ $(0<\beta<1;\ \gamma = 2(1-\beta))$, $\varphi=\varphi_1$, где φ_1 — корень

*) Если в условиях (21), (22), вместо $r\to+0$, положим $r\to+\infty$, то, при $\beta<0$, $\gamma\geqslant 2$, $h>0$, из уравнений (A) и (25) выведем существование таких решений, что при $I\to+\infty$: $\Phi\to 0$, $\varphi\to\varphi_1$ $\left(\chi<\varphi_1<\frac{\pi}{2};\ r_k\to+\infty,\ R\to+\sqrt{2h}\right)$, $t\to+\infty$.

уравнения $W=0$ (или уравнения (14) при $\alpha=-\beta$), таким единственным решением будет $\psi=0$, $\Psi=0$ ($\varphi=\varphi_1$, $\Phi=0$), т. е. случаи (1) и (2) § 4 при $h>0$ и $\alpha=-\beta<0$*).

§ 8. Движение с общим соударением; случай $0<\beta<1$, $h>0$, $q_1=0$

В случае $x_1'=0$ $\left(q=0,\ \varphi_1=\frac{\pi}{2}\right)$ проще обратиться к уравнениям (3), из которых будем иметь

$$\frac{1}{x^{2\beta-1}}\frac{d^2x}{dt^2}=(m_0+m_1)\frac{f(x)}{x^{2\beta-1}}+m_2\frac{f(r_1)-f(r_0)}{x^{2\beta-1}}=$$

$$=(m_0+m_1)\frac{f(x)}{x^{2\beta-1}}+m_2x^{2(1-\beta)}\frac{f(r_1)-f(r_0)}{r_1-r_0}.$$

Если $q_1=\lim\frac{x}{\xi}=0$ и $0<\beta\leqslant\frac{1}{2}$, то второй член правой части стремится к нулю; это же будет иметь место и в случае $\frac{1}{2}<\beta<1$, если принять, что $\gamma=2(1-\beta)$; тогда последнее уравнение можно записать в виде

$$\frac{1}{x^{2\beta-1}}\frac{d^2x}{dt^2}=\mp2\beta(m_0+m_1)+\varepsilon,$$

где $\varepsilon\to0$ при $t\to t_1$ ($x\to+0$, $\xi\to+0$).

Отсюда заключаем, что рассматриваемый случай возможен только при нижнем знаке**) (в окрестности $r_k=0$ имеет место отталкивание). Из последнего уравнения получим

$$x'^2=2(m_0+m_1)x^{2\beta}+\varepsilon_1x^{2\beta}\qquad(\varepsilon_1\to0\text{ при }x\to0)$$

и

$$\lim_{t\to t_1}\frac{x'}{x^\beta}=-\sqrt{2(m_0+m_1)};$$

---

*) Согласно примечанию на стр. 9 к § 4 также имеем единственное такое решение ($\varphi=\varphi_1$, $\Phi=0$) в случаях:

a) $f(r)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию (21), $\gamma=0$ ($\beta=1$), $\varphi_1=\frac{\pi}{2}$ или $\varphi_1=\operatorname{arc\,tg}\mu_0\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_3}}$ (задача двух тел);

b) $f(r)=\mp2r$ ($\beta=1$, $\gamma=0$), φ_1 — произвольно (частный случай 3 § 4 при $B=0$, $\alpha=0$, $h>0$);

c) $f(r)=\mp2r+Cr^3$, $m_0=m_1=m_2$ ($\beta=1$, $\gamma=0$), φ_1 — произвольно (частный случай 4 § 4 при $B=0$, $\alpha=0$, $h>0$);

d) $f(r)=\pm2r+Br^{2\beta-1}$ ($\beta\neq1$, $\gamma=0$ и φ_1 — корень уравнения $W_1=0$.

**) В противном случае $\frac{dx'}{dt}$ была бы постоянно отрицательной в окрестности $t=t_1$ и x' стремилась бы к нулю, монотонно убывая, т. е. x' оставалась бы, в окрестности $t=t_1$, постоянно положительной, что противоречит условию $x\to+0$.

следовательно, x есть бесконечно-малая порядка $\frac{1}{1-\beta}$ относительно t_1-t и ξ, а x' — порядка $\frac{\beta}{1-\beta}$.

Приняв в уравнениях (3) ξ за аргумент, заменим эти уравнения системой

$$\frac{dx}{d\xi}=\frac{x'}{\xi'},\quad \frac{dx'}{d\xi}=\frac{(m_0+m_1)\,f(r_2)+m_2\,[f(r_1)-f(r_0)]}{\xi'}, \tag{3'}$$

где

$$\xi'=-\sqrt{\frac{2U+2h-\mu_2 x'^2}{\mu_3}},$$

и уравнением

$$\frac{dt}{d\xi}=\frac{1}{\xi'}.$$

Введем, далее, в (3') новые переменные:

$$x=\xi^{\frac{1}{1-\beta}}\,y,\quad x'=\xi^{\frac{\beta}{1-\beta}}\,Y, \tag{27}$$

придем к рассмотрению системы

$$\left.\begin{aligned}
\xi\frac{dy}{d\xi}&=-\frac{1}{1-\beta}(y-y_1)+\frac{Y-Y_1}{\xi'_1}+Y\left(\frac{1}{\xi'}-\frac{1}{\xi'_1}\right),\\
\xi\frac{dY}{d\xi}&=\frac{\beta(2\beta-1)}{(1-\beta)^2}\,\xi'_1\,(y-y_1)-\frac{\beta}{1-\beta}(Y-Y_1)+\frac{H}{\xi'}-\frac{H_1}{\xi'_1}-\frac{\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)_1}{\xi'_1}(y-y_1)
\end{aligned}\right\}, \tag{B}$$

где

$$\xi'=-\frac{1}{\sqrt{\mu_3}}\sqrt{2h+2U-\mu_2\xi^{\frac{2\beta}{1-\beta}}\,Y^2}, \tag{B$_1$}$$

$$U=\sum m_i m_j F(r_k),\ r_0=\xi\left(1-\mu_0\,\xi^{\frac{\beta}{1-\beta}}y\right),\ r_1=\xi\left(1+\mu_1\xi^{\frac{\beta}{1-\beta}}y\right),\quad r_2=\xi^{\frac{1}{1-\beta}}y, \tag{B$_2$}$$

$$H=(m_0+m_1)\frac{f(r_2)}{r_2^{2\beta-1}}\,y^{2\beta-1}+m_2 y\xi^{2\beta}\,\xi^{2(1-\beta)}\frac{f(r_1)-f(r_0)}{r_1-r_0}, \tag{B$_3$}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial y}&=(2\beta-1)\ (m_0+m_1)\frac{f(r_2)}{r_2^{2\beta-1}}\,y^{2\beta-2}+\\
&+(m_0+m_1)\frac{r_2\,f'(r_2)-(2\beta-1)\,f(r_2)}{r_2^{2\beta-1}}\,y^{2\beta-2}+m_2\xi^{2\beta}\xi^{2(1-\beta)}[\mu\ f'(r_1)+\mu_0 f'(r_0)],
\end{aligned} \tag{B$_4$}$$

$$\xi'_1=-\sqrt{\frac{2h}{\mu_3}},\quad y_1=\left[\frac{(\beta-1)\sqrt{2(m_0+m_1)}}{\xi'_1}\right]^{\frac{1}{1-\beta}},$$

$$Y_1=\frac{\xi'_1}{1-\beta}\,y_1,\quad \frac{H_1}{\xi'_1}=\lim_{\substack{\xi\to 0\\ y\to y_1}}\frac{H}{\xi'}=\frac{\beta}{1-\beta}\,Y_1=\frac{\beta\xi'_1}{(1-\beta)^2}\,y_1,$$

$$\frac{\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)_1}{\xi'_1}=\lim\frac{\frac{\partial H}{\partial y}}{\xi'_1}=\lim\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{H}{\xi'}\right)=\frac{\beta(2\beta-1)}{(1-\beta)^2}\,\xi'_1.$$

Функция $Y\left(\frac{1}{\xi'}-\frac{1}{\xi_1'}\right)$ и $\frac{H}{\xi'}-\frac{H_1}{\xi_1'}-\frac{\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)_1}{\xi_1}(y-y_1)$ и их частные производные по y, Y — непрерывны в окрестности системы значений $\xi=0$, $y=y_1$, $Y=Y_1$ и стремятся к нулю при $\xi\to+0$, $y\to y_1$, $Y\to Y_1$. Характеристическое уравнение системы (B)

$$\lambda^2+\frac{1+\beta}{1-\beta}\lambda+\frac{2\beta}{1-\beta}=0$$

имеет отрицательные корни $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-\frac{2\beta}{1-\beta}$; таким образом, существует единственное такое решение системы (B), что при $\xi\to+0$: $y\to y_1$, $Y\to Y_1$ *).

§ 9. Движение с общим соударением; случай $\beta>0$, $h=0$

В случае $h=0$ ($x_1'=0$, $\xi_1'=0$), согласно § 7, в окрестности $r_k=0$ возможно только отталкивание. Положив в формулах § 3 $\alpha=-\beta$, из (10) и (12) найдем, что в окрестности $I=0$ V, а следовательно R^2 и Φ^2 ограничены сверху. По первому из уравнений (9)

$$dt=\frac{dI}{I^\beta R}$$

и если $\beta\geqslant1$, то $t\to+\infty$ при $I\to+0$; следовательно, при конечном t_1 и $h=0$ необходимо рассмотреть только случай $0<\beta<1$ **).

Из уравнения (7) (или (13)), имеющего в данном случае вид

$$\frac{d^2I^2}{dt^2}+I^{2\beta}F_2=2I^{2\beta}\sum m_im_jp_k^{2\beta}\frac{F_1(r_k)}{r_k^{2\beta}},$$

заключаем, на основании того, что

$$\lim_{r\to+0}\frac{F_1(r)}{r^{2\beta}}=2(1+\beta),$$

что в некотором интервале $\frac{dI^2}{dt}$ монотонно возрастает, стремясь к -0; следовательно, I в некотором интервале убывает монотонно. Из этого

---

*) Если условия (21), (22) удовлетворяются при $r_k\to+\infty$, $\gamma=2(1-\beta)$, $h<0$, то уравнения (B) пригодны для установления (при $h<0$) существования семейства (зависящего от одного произвольного параметра, кроме h) таких решений, что при $\xi\to+\infty: y\to y_1$ $(\eta\to0)$, $Y\to Y_1$, причем $\xi'\to\sqrt{\frac{2h}{\mu_3}}$, $t\to+\infty$.

**) Следовательно, при $\beta>1$ и $h=0$ соответствующим решением будет только $x=0$, $\xi=0$, $x'=0$, $\xi'=0$. Этот результат легко также получить из четвертого уравнения (3).

же уравнения легко установим, что в окрестности $I=0$ R^2 имеет положительную нижнюю границу.

Пусть при $t \to t_1$ $(I \to +0)$ φ стремится к определенному пределу φ_1 *).

Тогда $V \to V_1 > 0$, $F_2 \to 4(1+\beta)V$ и из последнего уравнения

$$R^2 \to 2V_1, \quad R \to -\sqrt{2V_1},$$

а $\Phi \to 0$. Из четвертого уравнения (9) тогда найдем, что $\frac{\partial V}{\partial \varphi} \to 0$, т. е.,

---

*) При $\beta = \frac{1}{2}$, $h=0$, $t \to +0$: $\lim \frac{\frac{dx'}{dt}}{\frac{d\xi}{dt}} = \frac{m_1+m_1}{M}$ и φ всегда стремится к $\varphi_1 = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{Mm_2}{m\,m_1}}$; в случае $\beta \neq \frac{1}{2}$ для установления невозможности существования таких решений, что при $I \to +0$ φ не стремится ни к какому определенному пределу, необходимо дальнейшее исследование.

Пусть, например, $rf(r) - 2\beta F(r) = \omega(r)\,\theta(r)$, где, при $r < \varrho$, $|\omega(r)| < D(\varrho)$, а $\theta(r)$ — положительная неубывающая функция, такая, что $\int\limits_0^r \frac{\theta(r)}{r^{2\beta+1}}\,dr$ — существует. Из этих условий, подобно § 12, выведем, что $\int\limits_0^I \frac{\partial V}{\partial I}\,dI$ — также существует. Тогда из второго уравнения (9) и (12)

$$I^{1-\beta}\frac{dR}{dt} = (1+\beta)\,\Phi^2 + I\frac{\partial V}{\partial I}$$

или

$$I\frac{dR^2}{dI} - 2I\frac{\partial V}{\partial I} = 2(1+\beta)\,\Phi^2$$

и, наконец

$$I\frac{d\left(R^2 - 2\int\limits_0^I \frac{\partial V}{\partial I}\,dI\right)}{dI} = 2(1+\beta)\,\Phi^2.$$

Следовательно, $R^2 - 2\int\limits_0^I \frac{\partial V}{\partial I}\,dI$, в некотором интервале монотонно убывает при $I \to +0$ и стремится к определенному пределу. Поэтому $R^2 \to R_1^2 > 0$ (так как функция $2V$ имеет в окрестности $I=0$ положительную нижнюю границу) и в окрестности $I=0$ $\inf \Phi=0$ (эти же заключения получим и при условии $rf(r) - 2\beta F(r) \geqslant 0$ в окрестности $r=0$, что в случае неубывающей функции $rf(r) - 2\beta F(r)$ сводится к предыдущему условию при $\omega=1$).

Далее, при $\beta > \frac{1}{2}$, применяя рассуждения, подобные § 13 настоящего мемуара, сможем доказать, что Φ^2 не может неограниченно осциллировать между нулем и некоторой верхней границей, т. е., что $\lim \Phi^2=0$, $\lim R^2 = \lim 2V = 2V_1 > 0$ и φ стремится к определенному пределу φ_1.

что φ_1 должно быть корнем уравнения $\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)_1 = \lim\limits_{\substack{I\to 0\\ \varphi\to\varphi_1}} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$, или уравнение (14) при $\alpha = -\beta$, причем $\chi < \varphi_1 < \frac{\pi}{2}$ *).

Приняв в уравнениях (9) I за аргумент и положив там $\alpha = -\beta$, придем к рассмотрению системы

$$I\frac{d\varphi}{dI} = \frac{\Phi}{R_1} + \Phi\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}\right), \quad I\frac{d\Phi}{dI} = \frac{(V_{\varphi\varphi})_1}{R_1}(\varphi - \varphi_1) -$$

$$-(\beta+1)\Phi + \left[\frac{V_\varphi}{R} - \frac{(V_{\varphi\varphi})_1}{R_1}(\varphi-\varphi_1)\right], \tag{C}$$

где

$$R = -\sqrt{2V - \Phi^2} \tag{C$_1$}$$

и уравнения

$$\frac{dt}{dI} = \frac{1}{I^\beta R}. \tag{C$'$}$$

При этом, согласно формулам (10), (10′):

$$V = \sum m_i m_j p_k^{2\beta} \frac{F(r_k)}{r_k^{2\beta}}, \tag{C$_2$}$$

$$V_\varphi = \frac{\partial V}{\partial \varphi} = W = \sum m_i m_j p_k^{2\beta-1} \frac{dp_k}{d\varphi}\frac{f(r_k)}{r_k^{2\beta-1}}, \tag{C$_3$}$$

$$V_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = I^{2(1-\beta)-\gamma} \sum m_i m_j \left(\frac{dp_k}{d\varphi}\right)^2 \frac{r_k^\gamma f'(r_k)}{p_k^\gamma} - \sum m_i m_j p_k^{2\beta} \frac{f(r_k)}{r_k^{2\beta-1}}, \tag{C$_4$}$$

$$\lim 2V = 2V_1 = R_1^2 = [\,m_2m_1 + m_1m_0p^{2\beta} +$$

$$+ m_2m_0(1+p)^{2\beta}\,]\left[\frac{M}{m_2(m_1+m_0) + 2m_0m_2p + m_0(m_2+m_1)p^2}\right]^\beta, \tag{28}$$

где p есть положительный корень уравнения (14) при $\alpha = -\beta$:

$$m_2(1+p)[1-(1+p)^{2\beta-2}] + m_1p(1-p^{2\beta-2}) -$$

$$-m_0p(1+p)[p^{2\beta-2} - (1+p)^{2\beta-2}] = 0. \tag{14$''$}$$

---

*) При $\beta \le \frac{1}{2}$ это очевидно из уравнения (14). При $\beta > \frac{1}{2}$, если положить $\gamma = 2(1-\beta)$ и допустить, например, что $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ ($q_1 = 0$), то по § 8 получим заключение, что x есть бесконечно-малая порядка $\frac{1}{1-\beta}$ относительно $t_1 - t$; но из первого уравнения (9) следует, что I есть также бесконечно-малая такого же порядка, что противоречит условию $\lim \frac{x}{I} = 0$. Следовательно, в этом случае имеем только решение: $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\Phi = 0$.

Положив $\gamma=2(1-\beta)$ при $\beta \neq \frac{1}{2}$ и $\gamma \leqslant 1$ при $\beta=\frac{1}{2}$, будем иметь

$$\frac{(V_{\varphi\varphi})}{R_1^2}=\lim_{\substack{I\to 0\\ \varphi\to\varphi_1}}\frac{\dfrac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}}{2V}=\beta_1=$$

$$=\beta(2\beta-1)\frac{m_2(m_1+m_0+m_0p)^2p^{2\beta-2}+m_1(m_2-m_0p)^2(1+p)^{2\beta-2}+m_0[(m_0+m_1)p+m_2]^2}{M_1[m_2m_1+m_1m_0p^{2\beta}+m_2m_0(1+p)^{2\beta}]}-\beta, \quad (28')$$

причем, при помощи уравнения (14″), найдем, что множитель при $\beta(2\beta-1)$ — больше единицы, если $\beta<1$ *); следовательно,

$$\text{при}\quad \frac{1}{2}<\beta<1:\ \beta_1>-2\beta(1-\beta),$$

$$\text{при}\quad \beta=\frac{1}{2}:\ \beta_1=-\frac{1}{2},$$

$$\text{при}\quad 0<\beta<\frac{1}{2}:\ \beta_1<-2\beta(1-\beta).$$

Характеристическое уравнение системы (С)

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}-\lambda & \dfrac{1}{R_1}\\ \dfrac{(V_{\varphi\varphi})}{R_1} & -(1+\beta)-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+(1+\beta)\lambda-\beta_1=0 \quad (29)$$

имеет корни

$$\lambda_{1,2}=-\frac{1+\beta\pm\sqrt{(1+\beta)^2+4\beta_1}}{2} \quad (30)$$

отрицательные при $\beta_1<0\left(\beta\gtrless\frac{1}{2}\right)$, или — комплексные, сопряженные, с отрицательной действительной частью $-\frac{1+\beta}{2}\left(\beta<\frac{1}{2}\right)$; при $\beta_1=0$ $\left(\beta>\frac{1}{2}\right)$: $\lambda_1=-(1+\beta)$, $\lambda_2=0$ **), при $\beta_1>0$ $\left(\beta>\frac{1}{2}\right)$: $\lambda_1<0$, $\lambda_2>0$.

Следовательно, ввиду непрерывности правых частей уравнений (С) и их частных производных по φ, Φ в окрестности $I=0$, $\varphi=\varphi_1$, $\Phi=0$, причем функции $\Phi\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)$, $\frac{V_\varphi}{R}-\frac{(V_{\varphi\varphi})_1}{R_1}(\varphi-\varphi_1)$ и их частные производные по φ, Φ стремятся к нулю при $I\to+0$, $\varphi\to\varphi_1$, $\Phi\to 0$,

*) Наоборот, при $\beta>1$ этот множитель меньше единицы, т. е.:

$$-\beta<\beta_1<2\beta(\beta-1).$$

**) Этот случай требует дополнительного исследования.

приходим к заключению, что существует единственное такое решение системы (C), что при $I \to +0: \varphi \to \varphi$, $\Phi \to 0$. В случае $\beta_1 > 0$ это решение зависит от одного произвольного параметра*).

§ 10. Движение с общим соударением; случай $\beta < 0$

Рассмотрим, наконец, случай, когда $\beta = -\alpha < 0$. В этом случае движение с общим соударением возможно только при нижних знаках в условиях (21), т. е., если

$$\lim_{r \to +0} r^{2\alpha+1} f(r) = -2\alpha \, [\lim_{r \to +0} r^{2\alpha} F(r) = 1; \quad \alpha > 0]. \tag{21'}$$

Ввиду того, что правая часть четвертого из уравнений (3) в окрестности $t = t_1$ ($\lim_{t \to t_1} I = 0$) сохраняет отрицательный знак, ξ' убывает монотонно и стремится к $-\infty$**); следовательно, ξ в некотором интервале убывает также монотонно.

Такое же заключение получим и относительно I^2 из уравнения (7) при $\alpha \neq 1$, ввиду того, что $\lim_{r \to +0} r^{2\alpha} F_1(r) = 2(1-\alpha)$; это же будет справедливо и при $\alpha = 1$, если $|F_1(r)|$ при $r \to +0$ неограниченно возрастает или стремится к конечному пределу $> -\frac{2I}{\sum m_i m_j}$.

Заметим прежде всего, что при $\alpha > 0$ невозможно, чтобы отношение взаимных расстояний точек стремилось к 0 или ∞, если $I \to +0$. В самом деле, если, например, $\frac{\xi - \mu_0 x}{x} \to 0$, т. е. $\frac{x}{\xi} \to \frac{1}{\mu_0}$, то

---

*) Уравнения (C) пригодны также для установления существования и построения таких решений, для которых $h = 0$, $\Phi \to 0$, $\varphi \to \varphi_1$, где φ_1 есть корень уравнения $\lim V_\varphi = 0$, лежащий между χ и $\frac{\pi}{2}$, в случаях:

a) $\beta < 1$, $I \to +0$, $\gamma = 2(1-\beta)$, причем $t \to +\infty$, $R \to -\sqrt{2V_1}$ и в окрестности $r_k = 0$ имеет место отталкивание $\left(\varphi_1 \text{ может равняться } \chi \text{ или } \frac{\pi}{2}\right)$;

b) $\beta < 0$, $I \to +0$, $\gamma = 2(1-\beta)$, причем $t \to t_1$, $R \to -\sqrt{2V_1}$ и в окрестности $r_k = 0$ имеет место притяжение, а также о случаях (если в условиях (21), (22) положить $r_k \to +\infty$):

c) $\beta > 0$, $I \to +\infty$, $\gamma = 2(1-\beta)$ при $\beta \neq \frac{1}{2}$ и $\gamma > 1$ при $\beta = \frac{1}{2}$, причем $t \to +\infty$ ($\beta \leq 1$) $t \to t_1$ $\left(\beta > 1\text{, причем возможны значения } \varphi_1 = \chi \text{ или } \varphi_1 = \frac{\pi}{2}\right)$, $R \to +\sqrt{2V_1}$ и в окрестности $r_k = +\infty$ имеет место отталкивание;

d) $\beta < 0$, $I \to +\infty$, $\gamma = 2(1-\beta)$, причем $t \to +\infty$, $R \to +\sqrt{2V_1}$ и в окрестности $r_k = +\infty$ имеет место притяжение. В случаях b) и d) $\beta_1 < 0$; следовательно $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$

**) Очевидно, что ξ' не может стремиться к пределу $\xi_1' > 0$, так как тогда в некотором интервале около t_1 ξ' была бы постоянно положительна, что противоречит условию $\xi \to +0$. Если бы было $\xi_1' < 0$, то по (5) и (21') $x' \to -\infty$ и $\frac{\xi'}{x'} \to 0$, что невозможно.

по второму из уравнений (3) $\frac{dx'}{dt} \to +\infty$; следовательно, $x' \to x'_1 \leqslant 0$ и $\frac{x'}{\xi'} \to 0$, что противоречит условию.

Следовательно, при $I \to +0$ φ не может стремиться к χ или $\frac{\pi}{2}$. Если φ неограниченно осциллирует при $t \to t_1$, то она не может иметь максимумов (минимумов), как угодно близких к $\frac{\pi}{2}(\chi)$.

В самом деле, из третьего и четвертого уравнений (9) следует, что при $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ $(\Phi = 0)$ и достаточно малых I и $\frac{\pi}{2} - \varphi$ $(\varphi - \chi)$, по $(10'_1)$, (11), (11′) будет

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} > 0 \quad \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2} < 0\right);$$

следовательно, в окрестности $t = t_1$: $\inf \varphi > \chi$ и $\sup \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Приняв это во внимание, четвертому из уравнений (9) можем придать вид

$$I^{\alpha+1}\frac{d\Phi}{dt} = (\alpha - 1) R\Phi + Q(\varphi) + \varepsilon\,^{*)}, \tag{31}$$

где $\varepsilon \to 0$ при $t \to t_1$ $(I \to +0)$, а

$$Q(\varphi) = -2\alpha \sum \frac{m_i m_j}{p_k^{2\alpha+1}} \frac{dp_k}{d\varphi},$$

причем $\frac{dQ}{d\varphi} > 0$ в интервале $\left(\chi, \frac{\pi}{2}\right)$ [ср. формулу (28)], $Q(\chi) = -\infty$, $Q\left(\frac{\pi}{2}\right) = +\infty$ и, следовательно, в нем Q имеет только один корень φ_1 **).

Докажем, что при неограниченном осциллировании φ максимальные значения ее (φ_M) при $t \to t_1$ стремятся к φ_1.

В самом деле, в противном случае существовало бы такое число $a > 0$, что в моменты достижения максимума, как угодно близкие к t_1, было бы

$$|\varphi_M - \varphi_1| > a.$$

---

*) Отсюда, в случае $f(r) = -2\alpha r^{2\alpha-1}$ $(\varepsilon = 0)$, сразу следует невозможность осциллирования φ при $t \to t_1$. В самом деле, в момент достижения некоторого максимума $\varphi = \varphi_M$: $\Phi = 0$, $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ имеет одинаковый знак с $\frac{d\Phi}{dt}$ и, следовательно, $Q(\varphi_M) \leqslant 0$; в момент достижения смежного минимума $\varphi = \varphi_m$: $\Phi = 0$ и должно быть $Q(\varphi_m) \geqslant 0$, так что $Q(\varphi_M) - Q(\varphi_m) < 0$, что невозможно, так как $Q(\varphi)$ есть функция, возрастающая в интервале $\left(\chi, \frac{\pi}{2}\right)$.

**) Допущения $\inf \varphi > \varphi_1$ или $\sup \varphi < \varphi_1$ противоречат предположению о неограниченном осциллировании φ.

Выберем t^* достаточно близким к t_1, чтобы в этот момент (и позднейшие)

$$|\varepsilon| < \min\,[Q(\varphi_1 + a),\ Q(\varphi_1 - a)]\,^{*)}$$

и допустим, что $\varphi_M > \varphi_1 + a$; тогда $Q(\varphi_M) > Q(\varphi_1 + a) > 0$ и в момент t^* $(\Phi = 0)$ по (31): $\frac{d\Phi}{dt} > 0$, т. е. $\frac{d^2\varphi}{dt^2} > 0$, что противоречит условию.

Если $\varphi_1 > a + \varphi_M$, $\varphi_M < \varphi_1 - a$, то смежный последующий минимум $\varphi_m < \varphi_1 - a$, $Q(\varphi_m) < Q(\varphi_1 - a)$ и в момент достижения этого минимума $(\Phi = 0)$ было бы по (31): $\frac{d\Phi}{dt} < 0$, т. е. $\frac{d^2\varphi}{dt^2} < 0$, что — невозможно. Следовательно, при $t \to t_1$: $\lim \varphi_M = \varphi_1$.

Совершенно подобно докажем, что и минимальные значения φ_m при $t \to t_1$ стремятся к φ_1.

Таким образом, как при монотонном изменении, так и при неограниченном осциллировании, при $t \to t_1$ φ должна стремиться к определенному предельному значению, лежащему между χ и $\frac{\pi}{2}$.

Тогда

$$V \to V_1 > 0, \quad I\frac{\partial V}{\partial I} \to 0 \quad [\text{по } (10') \text{ и } (21')]$$

и уравнение (13) при $\alpha \neq 1$ принимает вид

$$\frac{d(RI^{1-\alpha})}{dt} = \frac{(1-\alpha)\,(2V_1 + \varepsilon)}{I^{2\alpha}},$$

где $\varepsilon \to 0$ при $t \to t_1$ $(I \to +0)$.

Умножив обе части этого уравнения на $2RI^{1-\alpha}dt = 2IdI$ и, положив

$$I^{2(1-\alpha)} = u,$$

получим

$$d(R^2u) = (2V_1 + \varepsilon)\,du,$$

откуда, при $\alpha > 1$ $(u \to +\infty)$:

$$R^2u = 2V_1(u - u_0) + \int_{u_0}^{u} \varepsilon\,du + R_0^2u_0 \qquad (u > u_0),$$

или

$$R^2 = 2V_1 + \frac{u_0(R_0^2 - 2V_1)}{u} + \frac{1}{u}\int_{u_0}^{u} \varepsilon\,du. \tag{32}$$

---

*) Очевидно можно считать, что $a < \min\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1,\ \varphi_1 - \chi\right)$.

При $\alpha < 1$ ($u \to 0$) получим, принимая во внимание, что по (12) $R^2 u \to 0$:

$$R^2 u = 2V_1 u + \int_0^u \varepsilon\, du,$$

или

$$R^2 = 2V_1 + \frac{1}{u}\int_0^u \varepsilon\, du. \tag{32'}$$

Следовательно, во всех случаях при $\alpha \neq 1$, из (32) из (32′) получим

$$\lim_{t \to t_1} R^2 = 2V_1, \tag{33}$$

а тогда, по (12)

$$\lim_{t \to t_1} \Phi = 0 \tag{33'}$$

и по первому и четвертому из уравнений (9): $\lim \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$*) (33″), т. е. предельным значением φ является φ_1 — корень уравнения $Q(\varphi) = 0$ или (14).

В случае $\alpha = 1$ из четвертого уравнения (9)

$$\xi \frac{d\Phi}{d\xi} = \frac{\frac{\partial V}{\partial \varphi}}{\xi\xi'} \left(\frac{\xi}{I}\right)^2,$$

принимая во внимание ограниченность $|\xi\xi'|$ по (5), также найдем, что $\lim \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$ [иначе $|\Phi|$ — неограниченно возрастало бы].

Далее, ввиду того, что

$$\lim_{t \to t_1} I^3 \frac{dx'}{dt} = -\frac{V_1}{\sqrt{\mu_2}} \cos \varphi_1, \quad x' \to -\infty, \quad \lim \frac{x'}{\xi'} = \lim \frac{x''}{\xi''} = q_1,$$

по (8) будем иметь

$$\lim \Phi = \lim \sqrt{\mu_2 \mu_3}\, \xi\xi' \left(q - \frac{x'}{\xi'}\right) = 0;$$

следовательно,

$$\lim R^2 = 2V_1$$

и I убывает монотонно в некотором интервале также и при $\alpha = 1$.

Приняв в (9) I за аргумент, снова будем иметь уравнения (C), (C′), (C_2), (C_3), (C_4) при $\beta = -\alpha$ и

$$R = -\sqrt{2V - \Phi^2 + 2hI^{2\alpha}}.$$

Так как в данном случае $\beta_1 > 0$, то $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$.

---

*) В противном случае Φ неограниченно возрастало бы.

Таким образом, по крайней мере при $\gamma = 2(1+\alpha)$, существует семейство решений, зависящее от одного произвольного параметра (кроме h), таких, что при $I \to +0$: $\Phi \to 0$, $\varphi \to \varphi_1$, где φ_1 есть корень уравнения (14) $\left(\chi < \varphi_1 < \frac{\pi}{2}\right)$.

Если $r^{2\alpha} F(r)$, $r^{2\alpha+1} F(r)$ представляются в окрестности $r = 0$ рядами, расположенными по целым положительным степеням величин

$$r^{\alpha_1},\ r^{\alpha_2}, \dots\ r^{\alpha_n},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ — произвольные действительные положительные числа, из которых ни одно не представляется линейной комбинацией других (с целыми положительными коэфициентами), то искомые решения представляются, в общем случае, в окрестности $I = 0$ рядами, расположенными по целым положительным степеням величин

$$a I^{2\alpha},\ I^{\alpha_1},\ \dots\ I^{\alpha_n},\ a_2 I^{\lambda_2},$$

где a_2 — произвольная постоянная.

§ 11. Поведение величин, определяющих движение, при $I \to +\infty$. Случай 1: $\lim p = 0$

Допустим теперь, что при $0 < t < t_1$ между точками не происходит соударений $\left(\xi > \mu_0 x > 0,\ \ \chi < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ и что

$$\lim_{t \to t_1} I = +\infty;$$

тогда $\xi > \frac{1}{m_0 + m_1}\sqrt{\frac{m_0 M}{m_1 + m_2}}$ и $r_1 = \xi + \mu x$ неограниченно возрастают при $t \to t_1$.

Пусть $f(\ )$ есть функция действительная и аналитическая около всякого действительного положительного значения r, конечная и непрерывная при $r = 0$, обращающаяся при $r \to +\infty$ в положительную бесконечность определенного порядка $2\beta - 1$, так что

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{f(r)}{r^{2\beta - 1}} = 2\beta > 1\ ^{*)} \quad \left| \lim_{r \to +\infty} \frac{F(r)}{r^{2\beta}} = 1 \right|. \tag{34}$$

Очевидно, что при этих условиях функцию $F(r)$ можно считать знакоположительной при $r > 0$.

Правая часть четвертого из уравнений (3), начиная с некоторого момента, делается и остается положительной; следовательно, $\dot{\xi} \to +\infty$ монотонно в некотором интервале, а тогда и ξ, начиная с некоторого момента, возрастает монотонно.

*) Предельное значение $r^{1-2\beta} f(r)$ обозначено через 2β, чтобы не увеличивать числа обозначений.

Такое же заключение получим из уравнений (3) относительно r_1 и из уравнения (7) относительно I, принимая во внимание, что

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{2F(\ )+rf(r)}{r^{2\beta}}=2(1+\beta).$$

На основании указанных условий функция $\frac{U}{\xi^{2\beta}}$ остается ограниченной в соответствующем интервале ($\xi>\xi_0>0$). Тогда по (5) будет ограничено и $\frac{|\xi'|}{\xi^\beta}$ и, если бы было $\beta\leqslant 1$, то и ξ была бы ограничена, что противоречит условию. Следовательно, случай $\lim\limits_{n\to t_1} I=+\infty$ при конечном t_1 возможен только при $\beta>1$.

Обозначим через $\overline{r}$, $\underline{r}$ соответственно большее и меньшее из расстояний r_0, r_2 в момент t $\left(\text{так, что } \overline{r}\geqslant\frac{1}{2}r_1\to+\infty\right)$, через $\overline{m}$, m, $\underline{m}$ — наибольшую, среднюю и наименьшую из масс системы, и через $\overline{p}$, $\underline{p}$ соответственно отношения $\frac{\overline{r}}{I}$, $\frac{\underline{r}}{I}$, так что по (6)

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{M}{\Sigma m_i m}}<\frac{1}{2}p_1\leqslant\overline{p},\quad \overline{p}\leqslant p_1<\sqrt{\frac{M}{m\underline{m}}}. \tag{35}$$

По (10) при $\alpha=-\beta$

$$V\leqslant m\overline{m}I^{-2\beta}[F(r_1)+F(\overline{r})+F(\underline{r})]=m\overline{m}\left[\frac{F(r_1)}{r_1^{2\beta}}p_1^{2\beta}+\frac{F(\overline{r})}{\overline{r}^{2\beta}}\overline{p}^{2\beta}+\frac{F(\underline{r})}{I^{2\beta}}\right].$$

Следовательно, V, а потому по (12) R^2 и Φ^2, остаются ограниченными при $t\to t_1$ (при изменении I от $I_0>0$ до $+\infty$).

Если при $t\to t$ $I\to+\infty$, то a priori возможны следующие случаи: 1) $\lim\limits_{t\to t_1}\underline{p}=0$, 2) нижняя граница $\underline{p}$ в окрестности $t=t_1$ положительна, 3) $\underline{p}$ неограниченно осциллирует между нулем и некоторой конечной верхней границей.

В первом случае, ввиду (35), одно и то же p_k, например, p_2 стремится к нулю; тогда при $t\to t_1$

$$\lim\varphi=\frac{\pi}{2},\quad \lim 2V=\lim(\ ^2+\Phi^2)=$$

$$=2V_1=2\,V\left[\frac{M}{m\ (m_0+m_1)}\right]^{\beta-1},\ \lim\frac{\partial V}{\partial\varphi}=0.$$

Уравнение (7) принимает вид

$$\frac{d(RI^{1+\beta})}{dt}=(1+\beta)I^{2\beta}(2V_1+\varepsilon),$$

где $\varepsilon\to 0$ при $t\to t_1$ $(I\to+\infty)$, откуда, совершенно подобно соображениям § 10, будем иметь

$$\lim R^2=2V_1 \text{ и, следовательно, } \lim\Phi^2=0.$$

§ 12. Поведение R^2 при $I \to +\infty$ (случаи 2-й и 3-й)

Рассмотрим

$$\int_{I'}^{I''} \frac{rf(r) - 2\beta F(r)}{I^{2\beta+1}} dI = \int_{I'}^{I''} p^{2\beta} \frac{rf(r) - 2\beta F(r)}{r^{2\beta}} \frac{dI}{I} =$$

$$= \int_{I'}^{I''} p^{2\beta+1} \frac{d}{d} \left[\frac{F(r)}{r^{2\beta}} \right] dI = J \qquad (I'' > I' > I_0), \tag{36}$$

где $p = \frac{r}{I}$ и $r = r_i$ $(i = 0, 1, 2)$ определяется уравнениями (3), как аналитическая функция t при $0 < t < t_1$ и в интервале монотонного возрастания I $t_0 < t < t_1$ $(I_0 \leq I < +\infty)$ может рассматриваться как аналитическая функция от I.

В случае (2) $\inf p > 0$, $r_i \to +\infty$ $(i = 0, 1, 2)$ и из уравнений (3) легко найдем, что при значениях t, достаточно близких к t_1, $\frac{1}{r^\beta}\frac{dr}{dt}$ ограничена снизу определенным положительным числом. Тогда ввиду ограниченности сверху $\frac{1}{I^\beta}\frac{dI}{dt}$ при $t_0 \leq t < t_1$ и (35), придем к выводу, что при достаточно больших значениях I: $\frac{dr}{dI} > b > 0$ *).

Пусть

$$\text{(a)} \quad \int_{r}^{+\infty} \frac{d}{dr}\left| \frac{F(r)}{r^{2\beta}} \right| dr \quad \text{сходится абсолютно;}$$

тогда

$$|J| = \left| \int_{r'}^{r''} \frac{p^{2\beta+1}}{\frac{dr}{dI}} \frac{d}{dr}\left| \frac{F(r)}{r^{2\beta}} \right| dr \right| < \frac{\left(\sqrt{\frac{M}{m}}\right)^{2\beta+1}}{b} \int_{r'}^{r''} \left| \frac{d}{dr} \frac{F(r)}{r^{2\beta}} \right| dr$$

и при всяком данном как угодно малом $\eta > 0$ можно найти достаточно большое $I'(r')$, для того чтобы было $|J| < \eta$ и, следовательно, $\int_{I}^{+\infty} \frac{rf(r) - 2\beta F(r)}{I^{2\beta+1}} dI$ будет существовать.

Рассмотрим теперь случай (3), когда $\inf p = 0$. Пусть

$$rf(r) - 2\beta F(r) = \omega(r)\theta(r),$$

где (b) при $r > \varrho$ $\omega(r)$ — функция ограниченная: $|\omega(r)| < D$,

* Для $r = r_i$ это будет иметь место во всех трех случаях.

где ϱ, $D(\varrho)$ — некоторые положительные постоянные, а $\theta(r)$ — знакоположительная неубывающая функция такая, что $\int\limits_r^{+\infty} \frac{\theta(r)}{r^{2\beta+1}}\,dr$ существует.

Введем функции $\sigma_1(r)$, $\sigma_2(r)$ такие, что

$$\sigma_1(r) = \omega(r)\,\theta(r) \text{ при } r \leqslant \varrho, \ \sigma_1(r) = 0 \text{ при } r > \varrho,$$

$$\sigma_2(r) = 0 \text{ при } r \leqslant \varrho, \ \sigma_2(r) = \omega(r)\,\theta(r) \text{ при } r > \varrho,$$

так что при всех положительных значениях r

$$|\sigma_1(r)| < N,$$

где N — некоторая положительная постоянная, а при всех $r > 0$

$$|\sigma_2(r)| < D\theta(r).$$

Тогда при всех $r > 0$

$$\omega(r)\,\theta(r) = \sigma_1(r) + \sigma_2(r)$$

и

$$J = \int\limits_{I'}^{I''} \frac{\sigma_1(r)}{I^{2\beta+1}}\,dI + \int\limits_{I'}^{I''} \frac{\sigma_2(r)}{I^{2\beta+1}}\,dI;$$

следовательно

$$|J| < N\int\limits_{I'}^{I''} \frac{dI}{I^{2\beta+1}} + D\int\limits_{I'}^{I''} \frac{\theta(r)}{I^{2\beta+1}}\,dI = \frac{N}{2\beta}\left(\frac{1}{I'^{2\beta}} - \frac{1}{I''^{2\beta}}\right) +$$

$$+ D\int\limits_{I'}^{I''} \frac{\theta(r)}{\theta(gI)} \cdot \frac{\theta(gI)}{I^{2\beta+1}}\,dI < \frac{N}{2\beta I'^{2\beta}} +$$

$$+ Dg^{2\beta}\int\limits_{gI'}^{gI''} \frac{\theta(gI)}{(gI)^{2\beta+1}}\,d(gI) \qquad \left(\frac{r}{I} = p < \sqrt{\frac{M}{mm}} = g\right)$$

и при всяком данном, как угодно малом $\eta > 0$, можно выбрать $I'(\eta)$ достаточно большим для того, чтобы было $|J| < \eta$; тогда

$$\int\limits_{I}^{+\infty} \frac{rf(r) - 2\beta F(r)}{I^{2\beta+1}}\,dI$$

сходится.

Обращаясь теперь к формулам § 3, положим там $\alpha = -\beta$ и, исключив $2V$ из второго уравнения (9) и (12), получим

$$I^{1-\beta}\frac{dR}{dt} = (1+\beta)\,\Phi^2 - 2\beta h I^{-2\beta} + I\frac{\partial V}{\partial I}$$

или, приняв I за аргумент, на основании первого из (9)

$$I\frac{dR^2}{dI} + 4\beta h I^{-2\beta} - 2I\frac{\partial V}{\partial I} = 2(1+\beta)\,\Phi^2.$$

Ввиду того, что

$$\int_{I}^{+\infty} \frac{\partial V}{\partial I} dI = \sum m_i m_j \int_{I}^{+\infty} \frac{r_k f(r_k) - 2\beta F(r_k)}{I^{2\beta+1}} dI$$

существует при условии (a) в случае (2) или при условиях (b) в случае (3), последнее уравнение можно записать в виде

$$I \frac{d\left(R^2 - 2hI^{-2\beta} - 2\int_{\infty}^{I} \frac{\partial V}{\partial I} dI\right)}{dI} = 2(1+\beta)\,\Phi^2; \tag{37}$$

следовательно, при изменении I от I_0 до $+\infty$, функция

$$R^2 - 2hI^{-2\beta} - 2\int_{\infty}^{I} \frac{\partial V}{\partial I} dI$$

монотонно возрастает, оставаясь ограниченной по абсолютному значению, а потому эта функция (и R^2) стремятся к определенному пределу $R_1^2 > 0$ *). Тогда по (37) $\inf \Phi^2 = 0$ в окрестности $t = t_1$ **).

§ 13. Поведение Φ и φ при $I \to +\infty$ (случаи 2-й и 3-й)

Докажем, что при $t \to t_1$ Φ^2 не может осциллировать между нулем и некоторой конечной верхней границей.

В самом деле, если допустить такое предположение, то придем к выводу, что существует такое положительное число a, что непрерывная функция $2V - R_1^2 = \Phi^2 + \varepsilon$ ($\varepsilon \to 0$ при $I \to +\infty$) переходит неограниченное число раз от a до $2a$ и наоборот, при возрастании I от $I^* > I_0$ до $+\infty$, как бы велико не было I^*. Пусть

$$2V' = R_1^2 + a, \quad 2V'' = R_1^2 + 2a,$$

где V' и V'' — значения V при $I = I' > I^*$ и при $I = I'' > I'$ ***), т. е. в интервале $I' < I < I''$ будет

$$R_1^2 + a < 2V < R_1^2 + 2a. \tag{38}$$

Из уравнения (13) будем иметь

$$I^{1-\beta} \frac{dR}{dt} + (1+\beta) R^2 = 2(1+\beta) V + I \frac{\partial V}{\partial I} + 2hI^{-2\beta},$$

---

*) Если бы $R_1^2 = 0$, то $2V = R^2 + \Phi^2 - 2hI^{-2\beta}$ принимала бы в окрестности $t = t_1$ как угодно малые значения, что невозможно, так как $V > mm \left[\frac{F(r_1)}{r_1^2} p_1^{2\beta} + \frac{F(r)}{r^{2\beta}} p^{2\beta} + \frac{F(r)}{r^{2\beta}} \right]$.

**) Эти же выводы получим, приняв вместо (b) условия: при всех r: $rf(r) - 2\beta F(r) > s$ ($s < 0$), а при достаточно больших значениях r: $rf(r) - 2\beta F(r) > -\frac{m}{2m} s$.

***) Причем I'' обозначает ближайшее большее I' значение I, при котором $2V'' - R_1^2 = 2a$.

так что, умножив на $2I^{2\beta+1}$ и приняв I за аргумент

$$I^{2\beta+2}\frac{dR^2}{aI}+2(1+\beta)I^{2\beta+1}R^2-4hI-2I^{2\beta+2}\frac{\partial V}{\partial I}=2V\frac{dI^{2\beta+2}}{dI},$$

или

$$\frac{d}{dI}\left[I^{2(1+\beta)}R^2-2hI^2\right]=\left(2V+\frac{1}{1+\beta}I\frac{\partial V}{\partial I}\right)\frac{dI^{2\beta+2}}{dI}.$$

Положив

$$I^{-2\beta}=K,\quad I^{2(1+\beta)}=L,$$

отсюда будем иметь

$$d\left[L(R^2-2hK)\right]=\left(2V+\frac{1}{1+\beta}I\frac{\partial V}{\partial I}\right)dL$$

или

$$d\left|L\left(R^2-2hK-2\int\limits_{+\infty}^{I}\frac{\partial V}{\partial I}dI\right)\right|=\left(2V-2\int\limits_{+\infty}\frac{\partial V}{\partial I}dI\right)dL.$$

Интегрируя, отсюда получим

$$L''\left(R''^2-2hK''-2\int\limits_{\infty}^{I''}\frac{\partial V}{\partial I}dI\right)-L'\left(R'^2-2hK'-2\int\limits_{\infty}^{I'}\frac{\partial V}{\partial I}dI\right)=$$

$$=\int\limits_{L'}^{L''}\left(2V-2\int\limits_{\infty}^{I}\frac{\partial V}{\partial I}dI\right)dL;$$

но из уравнения (37):

$$R''^2-2hK''-2\int\limits_{\infty}^{I''}\frac{\partial V}{\partial I}dI=R_1^2-\frac{\beta+1}{\beta}\int\limits_{0}^{K''}\frac{\Phi^2}{K}dK,$$

$$R'^2-2hK'-2\int\limits_{\infty}^{I'}\frac{\partial V}{\partial I}dI=R_1^2-\frac{\beta+1}{\beta}\int\limits_{0}^{K'}\frac{\Phi^2}{K}dK,$$

вследствие чего предыдущее равенство примет вид

$$L'\int\limits_{0}^{K'}\frac{\Phi^2}{K}dK-L''\int\limits_{0}^{K''}\frac{\Phi^2}{K}dK=\frac{\beta}{\beta+1}\Bigg[L'R_1^2-L''R_1^2+$$

$$+\int\limits_{L'}^{L''}\left(2V-2\int\limits_{\infty}^{I}\frac{\partial V}{\partial I}dI\right)dL\Bigg]=\frac{\beta}{\beta+1}\int\limits_{L'}^{L''}\left(2V-R_1^2-2\int\limits_{\infty}\frac{\partial V}{\partial I}dI\right)dL.$$

Пусть при $I > I^*$ будет $\left| 2 \int\limits_{\infty} \frac{\partial V}{\partial I} dI \right| < \frac{a}{n}$, где $n > 1$; тогда

$$\int\limits_0^{K'} \frac{\Phi^2}{K} dK > \frac{\beta}{(\beta+1) L'} \int\limits_{L'}^{L''} \left(2V - B_1^2 - \frac{a}{n} \right) dL > \frac{n-1}{n} \, \frac{a\beta}{1+\beta} \, \frac{L'' - L'}{L'} \tag{39}$$

Докажем, что это неравенство при достаточно малом K' приведет к противоречию.

Диференцируя выражение (4) U по t, получим

$$\left| \frac{dU}{dt} \right| \leqslant m_0 m_1 m_2 \sum_{i=0}^{i=2} \frac{1}{m_i} \left| f(r_i) \right| \left| \frac{dr_i}{dt} \right|. \tag{40}$$

Далее, ввиду того, что

$$F(r) = (1+\varepsilon) r^{2\beta}, \quad f(r) = 2\beta\,(1+\varepsilon') r^{2\beta-1} \quad (r = r_i;\ i = 0, 1, 2), \tag{41}$$

где ε и ε' стремятся к нулю при $r \to +\infty$, при достаточно больших значениях r, пусть при $r > \varrho$, будет

$$F(r) > \vartheta r^{2\beta}, \quad 0 < f(r) < 2\beta\,(1+\vartheta') r^{2\beta-1}, \tag{42}$$

где ϑ, ϑ' — некоторые положительные числа, меньшие единицы. Тогда, при $r > \varrho$

$$U > \frac{m_0 m_1 m_2}{m_i} F(r) > \frac{m_0 m_1 m_2}{m_i} \vartheta r^{2\beta}, \quad r^{2\beta-1} < \left(\frac{m_i U}{m_0 m_1 m_2 \vartheta} \right)^{1 - \frac{1}{2\beta}}$$

и

$$f(r) < 2\beta\,(1+\vartheta') \left(\frac{m_i U}{m_0 m_1 m_2 \vartheta} \right)^{1 - \frac{1}{2\beta}}. \tag{43}$$

Кроме того, из (5) следует, что

$$\left| \frac{dr_i}{dt} \right| < \sqrt{\frac{2 M m_i (U + h)}{m_0 m_1 m_2}}. \tag{44}$$

Следовательно, если все $r_i \to +\infty$ *) и I^* выбрано достаточно большим, чтобы было при $I > I^*$: $r_i > \varrho$ $(i = 0, 1, 2)$, $\frac{dr_i}{dt} > 0$, то (43) будет иметь место при всех значениях индекса i; тогда, по (40), (43) и (44)

$$\frac{dU}{dt} < C U^{1 - \frac{1}{2\beta}} \sqrt{2(U+h)}.$$

*) Что всегда имеет место в случае (2).

где

$$C = \frac{2\beta(1+\vartheta')\sqrt{M}}{\vartheta^{1-\frac{1}{2\beta}}(m_0 m_1 m_2)^{\frac{\beta-1}{2\beta}}} \sum_{i=0}^{i=2} m_i^{\frac{\beta-1}{2\beta}}. \tag{45}$$

Далее, выбрав I^* достаточно большим, чтобы при $I > I^*$ было $|R^2+2hK-R_1^2| < \varepsilon$, где ε некоторое, достаточно малое, число $< R_1^2$, будем иметь

$$\frac{dL}{dt} = 2(1+\beta) I^{2\beta+1}\frac{dI}{dt} = 2(1+\beta) I^{3\beta+1} R > 2(1+\beta) I^{3\beta+1}\sqrt{R_1^2+2hK-\varepsilon};$$

следовательно,

$$\frac{dU}{dL} < \frac{C}{2(1+\beta)} \frac{V^{1-\frac{1}{2\beta}}}{KL}\sqrt{\frac{2V+2hK}{R_1^2+2hK-\varepsilon}}$$

и в интервале $I' < I < I''$

$$\frac{dU}{dL} < C_1 \frac{V''^{1-\frac{1}{2\beta}}}{K''L'}, \quad \text{где } C_1 = \frac{C}{2(1+\beta)}\sqrt{1+\frac{2a+\varepsilon}{R_1^2-2|h|K^*-\varepsilon}}$$

На основании этого будем иметь

$$U''-U' < C_1(L''-L')\frac{V''^{1-\frac{1}{2\beta}}}{K''L'}.$$

Отсюда, ввиду того, что

$$U'' = \frac{R_1^2+2a}{2K''}, \quad U' = \frac{R_1^2+a}{2K'} < \frac{R_1^2+a}{2K''},$$

найдем

$$L''-L' > \frac{aL'}{2C_1 V''^{1-\frac{1}{2\beta}}},$$

или

$$\frac{L''-L'}{L'} > C_2, \quad \text{где } C_2 = \frac{a}{2^{\frac{1}{2\beta}} C_1 (R_1^2+2a)^{1-\frac{1}{2\beta}}}.$$

Тогда неравенство (39) перепишется так:

$$\int_0^{K'} \frac{\Phi^2}{K} dK > \frac{a\beta(n-1)}{n(1+\beta)} C_2,$$

---

*) Очевидно I^* можно выбрать достаточно большим, чтобы было: $R_1^2-2|h|K^*-\varepsilon > 0$.

что невозможно, так как β, α, C_2 — положительные постоянные, не зависящие от K', тогда как интеграл в левой части стремится к нулю вместе с K'.

Пусть теперь r не стремится к $+\infty$, так что $\inf p = 0$, но p не стремится к нулю при $I \to +\infty$ *). Тогда можем написать, на основании (40) и (44)

$$\left|\frac{dU}{dt}\right| \leqslant m\bar{m} \sum_{i=0}^{i=2} |f(r_i)| \left|\frac{dr_i}{dt}\right| < m\bar{m} \sqrt{\frac{2M(U+h)}{m\bar{m}}} \left[\,|f(r_1)| + |f(r)| + |f(\bar{r})|\,\right], \tag{40'}$$

при $r>\varrho$ (41) и (42) имеют место при $r=r_1$, $r=r$ и $r=\bar{r}$, а тогда

$$U > m^2 F(r) > m^2 \vartheta r^{2\beta}, \quad r^{2\beta-1} < \frac{1}{(m^2\vartheta)^{1-\frac{1}{2\beta}}} U^{1-\frac{1}{2\beta}}$$

и

$$f(r) < \frac{2\beta(1+\vartheta')}{(m^2\vartheta)^{1-\frac{1}{2\beta}}} U^{1-\frac{1}{2\beta}}. \tag{43'}$$

Так как $|f(r)|$ ограничено в интервале $(0, \varrho)$, то I^*, а следовательно и U, можно выбрать достаточно большим, чтобы для $|f(r)|$ удовлетворялось неравенство (43′) при всяком положительном значении r. Тогда

$$\left|\frac{dU}{dt}\right| < C' U^{1-\frac{1}{2\beta}} \sqrt{2(U+h)},$$

где

$$C' = \frac{6\beta(1+\vartheta')\, m \sqrt{Mm}}{\sqrt{\bar{m}}\,(m^2\vartheta)^{1-\frac{1}{2\beta}}}.$$

Все дальнейшие рассуждения предыдущего случая, начиная с формулы (45), остаются без изменения, с заменой C на C'.

Таким образом, при $I \to +\infty$ $(t \to t_1)$

$$\lim \Phi^2 = 0, \quad \lim 2V = \lim R^2 = R_1^2 > 0, \tag{46}$$

а тогда и $\lim \varphi = \varphi_1$, где φ_1 есть корень уравнения $\lim\limits_{I\to+\infty} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$ **) или (14) при $\alpha = -\beta$. Следовательно, при условиях (b) случай 3-й невозможен, а в случае 1-м [так же, как и при условии (a)] все p_i стремятся к определенным предельным значениям.

*) Иначе получим случай первый.

**) Иначе $|\Phi|$ неограниченно возрастало бы при $I \to +\infty$.

§ 14. Движение с неограниченным расхождением точек

Положив в формулах § 3 $\alpha=-\beta$ и приняв в (9) I за аргумент, получим уравнения (C), (C′) § 9, причем

$$R=+\sqrt{2V+2hI^{-2\beta}-\Phi^2},$$

и формулы (C_2), (C_3), (C_4) этого параграфа.

Пусть при $r\to+\infty$ $\frac{f'(r)}{r^{2\beta-2}}$ стремится к определенному пределу [$=2\beta(2\beta-1)$; $\gamma=2(1-\beta)$], а в случае $\lim\limits_{t\to t_1} p_2=0$ — частные производные 1-го и 2-го порядка функции $\frac{F(x)}{I^{2\beta}}$ по аргументу φ — определенные и непрерывные функции при $I\geqslant I_0$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

Тогда функции $\Phi\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)$, $\frac{V_\varphi}{R}-\frac{(V_{\varphi\varphi})_1}{R_1}(\varphi-\varphi_1)$ и их частные производные по φ, Φ — непрерывны в окрестности $I=+\infty$, $\varphi=\varphi_1$, $\Phi=0$ и стремятся к нулю при $I\to+\infty$, $\varphi\to\varphi_1$, $\Phi\to 0$. Характеристическое уравнение будет иметь вид (29), причем выражения (28) для $R_1^2=2V_1$, (28′) для $\beta_1=-\frac{(V_{\varphi\varphi})_1}{R_1^2}=\lim\limits_{\substack{I\to+\infty\\ \varphi\to\varphi_1}}\frac{\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}}{2V}$ и (30) для $\lambda_{1,2}$ остаются без изменения; в частности при $p=p_2=0$; $\beta_1=-\beta+\beta(2\beta-1)\frac{m_1}{M}$. В рассматриваемом случае ($\beta>1$) множитель при $\beta(2\beta-1)$ в (28′) — меньше единицы, т.е. (ср. примечание *) к стр. 25):

$$-\beta<\beta_1<2\beta(\beta-1)$$

и корни уравнения (29) — действительны.

При $-\beta<\beta_1<0$ оба корни отрицательны, причем

$$0<|\lambda_2|<1<\beta<|\lambda_1|<\beta+1;$$

при $\beta_1=0$:

$$\lambda_1=-(1+\beta),\ \lambda_2=0\ ^{*});$$

при $0<\beta_1<2\beta(\beta-1)$:

$$\lambda_2>0,\ \lambda_1<0\ \text{ и }\ \beta+1<|\lambda_1|<2\beta.$$

Следовательно, семейство решений, соответствующих движению с неограниченным расхождением точек, зависит от трех или четырех произвольных параметров: h, t_1 и одного или двух параметров, соответствующих отрицательным корням уравнения (29).

*) Этот случай требует дополнительного исследования.

Если $\frac{F(r)}{r^{2\beta}}$, $\frac{f(r)}{r^{2\beta-1}}$ разлагаются в окрестности $r = +\infty$ в ряды по целым положительным степеням величин $r^{-a_1}, r^{-a_2}, \ldots r^{-a_n}$ $(a_i > 0)$ *), то искомые решения представляются $\left(\text{при } \varphi_1 \neq \chi, \frac{\pi}{2}\right)$, в общем случае **), в окрестности $I = +\infty$, разложениями по целым положительным степеням величин

$$hI^{-2\beta}, I^{-a_1}, \ldots I^{-a_n}, a_1 I^{\lambda_1}, a_2 I^{\lambda_2},$$

где a_1, a_2 — произвольные постоянные, а λ_1, λ_2, — отрицательные корни уравнения (29).

Если $F(r) = r^{2\beta}$, то при $a_1 = a_2 = 0$ имеем решение: $\varphi = \varphi_1$, $\Phi = 0$ (ср. случай 2 § 4).

В случае $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, если β — целое число и

$$F(r) = r^{2\beta} + \sum_{i=1}^{i=\beta-1} A_i r^{2i},$$

то правые части уравнений (С) — голоморфны относительно $\frac{1}{I}$, $\varphi - \varphi_1$, Φ в окрестности их нулевых значений и искомые решения представляются, в общем случае, около $I = +\infty$ рядами, расположенными по целым положительным степеням величин

$$\frac{1}{I}, \; a_1 I^{\lambda_1}, \; a_2 I^{\lambda_2} \qquad (\text{если } \lambda_2 < 0).$$

Если $a_2 \neq 0$ $(\lambda_2 < 0)$, то $r_2 \to +\infty$, если $a_2 = 0$ (или $\lambda_2 > 0$), то $r_2 \to +0$, а если, к тому же, и $a_1 = 0$, то будем иметь задачу двух тел.

*) Причем ни одно из a_i не может быть представлено линейной комбинацией других (с целыми положительными коэфициентами).

**) Если ни один отрицательный корень не представляется линейной комбинацией другого и величин $-a_i$ (с целыми положительными коэфициентами).