Проблема моментов А. А. Маркова относительно любого числа интервалов

Н. И. Ахиезер

1. Обозначим через E точечное множество, состоящее из $m<\infty$ интервалов числовой оси

$$[-1, \alpha_1], [\beta_1, \alpha_2], \ldots, [\beta_{m-2}, \alpha_{m-1}], [\beta_{m-1}, 1]$$
$$(-1<\alpha_1<\beta_1<\ldots<\beta_{m-1}<1).$$

Под проблемой моментов А. А. Маркова относительно этих интервалов мы понимаем в первую очередь задачу нахождения тех условий для чисел

$$c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1},$$

при которых существует функция $f(u)$ $(u\in E)$, удовлетворяющая уравнениям

$$c_k=\int_E u^k f(u)\,du \qquad (k=0, 1, 2, \ldots, n-1) \tag{1}$$

и неравенству

$$|f(u)|\leqslant L, \tag{2}$$

где L — заданное число.

В ряде работ М. Г. Крейна и автора настоящей статьи *) проблема моментов А. А. Маркова (или L-проблема моментов) изучена для случая $m=1$, а также для случая $m=2$. Незадолго до войны А. М. Данилевский рассмотрел случай произвольного m. Однако он не успел ни опубликовать, ни доложить свои результаты. Во время войны А. М. Данилевский умер. Поэтому вопрос о критерии разрешимости L-проблемы в случае произвольного числа интервалов оставался открытым. Настоящая заметка имеет целью этот критерий установить.

2. Мы начнем с формулировки некоторых определений и предложений, которые мы заимствуем из упомянутых выше работ.

А. Последовательность чисел

$$s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n$$

*) См. монографию Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн, О некоторых вопросах теории моментов (Харьков, 1938), где имеются указания и на другие работы.

называют позитивной относительно интервала $[-1, 1]$ или P-последовательностью, если для всякого вещественного полинома

$$A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \ldots + A_n t^n,$$

не равного нулю тождественно и неотрицательного в интервале $[-1, 1]$, имеет место неравенство

$$A_0 s_0 + A_1 s_1 + A_2 s_2 + \ldots + A_n s_n > 0.$$

Если в этом соотношении возможен знак $=$, то последовательность $\{s_i\}$ будем называть сингулярной позитивной последовательностью относительно интервала $[-1, 1]$ или SP-последовательностью.

Б$_1$. Для того чтобы последовательность

$$s_0, \; s_1, \; s_2, \ldots, \; s_{2p} \tag{3}$$

была P-последовательностью, необходимо и достаточно, чтобы были позитивны обе формы

$$\sum_{i, k=0}^{p} s_{i+k} \xi_i \xi_k, \quad \sum_{i, k=0}^{p-1} (s_{i+k} - s_{i+k+2}) \xi_i \xi_k. \tag{4}$$

Б$_2$. Для того чтобы последовательность (3) была SP-последовательностью, необходимо и достаточно, чтобы формы (4) были ненегативны и чтобы по крайней мере одна из них была сингулярной.

В. Если (3) есть SP-последовательность, то однозначно определяется представление

$$s_k = \sum_{i=1}^{q} \mu_i x_i^k, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, 2p), \tag{5}$$

где q — ранг первой из форм (4) и $\mu_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, q)$, причем

$$-1 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_q \leqslant 1.$$

Что касается знаков $=$ в последнем соотношении, то они обязательно имеют место одновременно, если $q = p+1$.

Г. Пусть функция $\varphi(u)$ $(-1 \leqslant u \leqslant 1)$ удовлетворяет неравенству

$$0 \leqslant \varphi(u) \leqslant 1$$

и пусть

$$\frac{1}{z+1} \exp \left\{ \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(u)\, du}{z-u} \right\} = \frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \ldots + \frac{s_n}{z^{n+1}} + \ldots$$

В таком случае $\{s_i\}_0^n$ есть P-последовательность или SP-последовательность.

Предложения Б$_1$, Б$_2$, В относятся к случаю четного n. Аналогичные предложения имеют место и для нечетного n.

3. Дальнейшие рассуждения опираются на одно построение, которому мы посвятим настоящий параграф.

Пусть дана SP-последовательность

$$s_0,\ s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_{2p} \qquad (s_0=1). \tag{3}$$

По B имеет место представление

$$s_k=\sum_{i=1}^{q}\mu_i x_i^k \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2p). \tag{5}$$

Построим функцию

$$S(z)=\sum_{i=1}^{q}\frac{\mu_i}{z-x_i}=\frac{s_0}{z}+\frac{s_1}{z^2}+\ldots+\frac{s_{2p}}{z^{2p+1}}+\ldots,$$

которая может быть представлена в виде

$$S(z)=\frac{(z-y_1)(z-y_2)\ldots(z-y_{q-1})}{(z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_q)},$$

где

$$x_1<y_1<x_2<y_2<\ldots<y_{q-1}<x_q,$$

поскольку все μ_i положительны.

Пусть, кроме последовательности (3), рассматривается вторая последовательность

$$t_0,\ t_1,\ \ldots,\ t_{2p} \qquad (t_0=1), \tag{6}$$

определяемая соотношениями

$$t_k-at_{k-1}=s_k-bs_{k-1} \qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ldots,\ 2p), \tag{7}$$

где a, b — заданные числа из интервала $(-1, 1)$. Пусть известно, что (6) есть P-последовательность или SP-последовательность. Мы утверждаем, что при этих условиях ни одно из чисел x_i, y_i не попадет внутрь интервала с концами в точках a, b.

Займемся доказательством этого утверждения.

Положим

$$\sigma_k=a^2t_k-2at_{k+1}+t_{k+2} \qquad (k=0,1,2,\ldots,2p-2),$$

$$\tau_k=\sigma_k-\sigma_{k+2} \qquad (k=0,1,2,\ldots,2p-4).$$

В силу соотношений (7)

$$\sigma_k=abs_k-(a+b)s_{k+1}+s_{k+2}$$

$$\tau_k=abs_k-(a+b)s_{k+1}+(1-ab)s_{k+2}+(a+b)s_{k+3}-s_{k+4}.$$

Введем в рассмотрение формы

$$F_1=\sum_{i,k=0}^{p-1}\sigma_{i+k}\xi_i\xi_k;$$

$$F_2=\sum_{i,k=0}^{p-2}\tau_{i+k}\zeta_i\zeta_k.$$

Учитывая выражения величин σ_k, τ_k через величины s_i, а также представления (5), получаем

$$F_1 = \sum_{j=1}^{q} \mu_j (x_j - a)(x_j - b)(\xi_0 + \xi_1 x_j + \ldots + \xi_{p-1} x_j^{p-1})^2; \qquad (8_1)$$

$$F_2 = \sum_{j=1}^{q} \mu_j (1 - x_j^2)(x_j - a)(x_j - b)(\xi_0 + \xi_1 x_j + \ldots + \xi_{p-2} x_j^{p-2})^2. \qquad (8_2)$$

С другой стороны, полагая

$$\eta_0 = a\xi_0$$
$$\eta_k = a\xi_k - \xi_{k-1}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, r - 2)$$
$$\eta_{r-1} = -\xi_{r-2},$$

где $r = p+1$ для формы F_1 и $r = p$ для формы F_2, и учитывая выражения величин σ_k, τ_k через величины t_i, находим

$$F_1 = \sum_{i, k=0}^{p} t_{i+k} \eta_i \eta_k;$$

$$F_2 = \sum_{i, k=0}^{p-1} (t_{i+k} - t_{i+k+2}) \eta_i \eta_k.$$

В силу условия эти величины неотрицательны, каковы бы ни были числа ξ_i. Таким образом, при любых ξ_i неотрицательны формы (8). Отсюда нетрудно заключить, что внутрь интервала с концами a, b не попадет ни одно из чисел x_j. В самом деле, если бы имело место неравенство $(x_i - a)(x_i - b) < 0$, то при $q \leq p$ можно было бы сделать отрицательной функцию (8_1), определяя числа ξ_i с помощью равенств

$$\xi_0 + \xi_1 x_j + \ldots + \xi_{p-1} x_j^{p-1} = 0 \qquad (j \neq i,\ j = 1, 2, \ldots, q).$$

Если же $q = p+1$, то в силу В обязательно $x_1 = -1$, $x_q = 1$ и значит можно было бы сделать отрицательной функцию (8_2), определяя числа ξ_i так, чтобы

$$\xi_0 + \xi_1 x_j + \ldots + \xi_{p-2} x_j^{p-2} = 0 \qquad (j \neq i,\ j = 2, 3, \ldots, p).$$

Теперь докажем, что ни одно из чисел x не может равняться a (но может равняться b).

Пусть $x_i = a$. Тогда при $q \leq p$ форма (8_1) имеет ранг $q - 1 \leq p - 1$, а при $q = p+1$ форма (8_2) имеет ранг $p - 2$. Поэтому в первом случае форма

$$\sum_{i, k=0}^{p} t_{i+k} \xi_i \xi_k,$$

а во втором случае форма

$$\sum_{i, k=0}^{p-1} (t_{i+k} - t_{i+k+2}) \xi_i \xi_k$$

сингулярна. Следовательно, $\{t_l\}_0^{2p}$ есть SP-последовательность и как таковая допускает единственное представление

$$t_k = \sum_{i=1}^{\bar{q}} \bar{\mu}_i \bar{x}_i^k \qquad (k=0, 1, 2, \ldots, 2p),$$

где $\mu_i > 0$. Введем функцию

$$T(z) = \sum_{i=1}^{\bar{q}}{}' \frac{\bar{\mu}_i}{z - \bar{x}_i} = \frac{t_0}{z} + \frac{t_1}{z^2} + \ldots + \frac{t_{2p}}{z^{2p+1}} + \ldots$$

и заметим, что между всеми коэфициентами t_l разложения $T(z)$ и коэфициентами s_i разложения $S(z)$ существуют соотношения

$$t_k - at_{k-1} = s_k - bs_{k-1},$$

в силу чего должно иметь место равенство

$$\frac{z-b}{z-a} S(z) = T(z),$$

что абсурдно, так как для функции слева $x_\nu = a$ есть двукратный полюс, а правая часть имеет только простые полюсы.

Таким образом, равенство $x_\nu = a$ невозможно.

Теперь обратимся к числам y_i. Как уже отмечалось

$$\frac{z-b}{z-a} S(z) = \frac{(z-b)(z-y_1)\ldots(z-y_{q-1})}{(z-a)(z-x_1)\ldots(z-x_q)} = \frac{t_0}{z} + \frac{t_1}{z^2} + \ldots + \frac{t_{2p}}{z^{2p+1}} + \ldots$$

Знаменатель рассматриваемой рациональной дроби имеет по доказанному только простые корни. Поэтому эта дробь равна

$$\sum_{i=1}^{q+1} \frac{\mu_i^*}{z - x_i^*} = \frac{(z-y_1^*)(z-y_2^*)\ldots(z-y_q^*)}{(z-x_1^*)(z-x_2^*)\ldots(z-x_{q+1}^*)},$$

где одно из x_i^* совпадает с a, а остальные с x_j $(j=1, 2, \ldots, q)$, и, подобным образом, одно из y_i^* совпадает с b, а остальные с y. Отсюда

$$t_k = \sum_{j=1}^{q+1} \mu_j^* x_j^{*k} \qquad (k=0, 1, 2, \ldots, 2p).$$

Докажем, что $\mu_i^* \geqslant 0$. Если $q \leqslant p$, то в силу ненегативности формы

$$\sum_{i, k=0}^{p} t_{i+k} \xi_i \xi_k$$

все μ_j^* должны быть неотрицательны. Если же $q = p+1$, так что $x_1^* = -1$, $x_{q+1}^* = 1$, то в силу ненегативности формы

$$\sum_{i, k=0}^{p-1} (t_{i+k} - t_{i+k+2}) \xi_i \xi_k$$

должны быть неотрицательны $\mu_2^*, \dots, \mu_q^*$. Но легко видеть, что μ_1^*, μ_{q+1}^* в этом случае будут обязательно положительны. В самом деле,

$$\mu_1^* = \frac{1+b}{1+a}\mu_1, \quad \mu_{q+1}^* = \frac{1-b}{1-a}\mu_q.$$

Итак, доказано, что $\mu_j^* \geq 0$ $(j=1, 2, \dots, q+1)$. Отсюда следует, что числа y^* перемежаются с числами x_j^*, то-есть перемежаются не только

$$y_1, y_2, \dots, y_{q-1} \quad \text{с} \quad x_1, x_2, \dots, x_q,$$

но и

$$b, y_1, y_2, \dots, y_{q-1} \quad \text{с} \quad a, x_1, x_2, \dots, x_q.$$

Это возможно лишь при

$$x_1 < y_1 < \dots < y_{\nu-1} \leq a < b \leq x_\nu < y_\nu < \dots < x_q,$$

если $a < b$, и при

$$x_1 < y_1 < \dots < x_{\nu-1} \leq b < a \leq y_{\nu-1} < x_\nu < \dots < x_q,$$

если $b<a$. В обоих случаях внутри интервала с концами в точках a, b нет ни одной из точек x_j и ни одной из точек y_j. Наше утверждение доказано.

Аналогичные рассмотрения можно провести в случае нечетного n.

4. Теперь займемся установлением критерия разрешимости L-проблемы.

Пусть функция $f(u)$, удовлетворяющая соотношениям (1), (2), существует. Положим

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{du}{z-u} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m-1}\int_{a_i}^{b_i}\frac{\delta_i\,du}{z-u} + \frac{1}{2L}\int_{E}\frac{f(u)}{z-u}\,du\right\} =$$

$$= \exp\left\{\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(u)}{z-u}\,du\right\} = G(z; \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{m-1}),$$

где каждое из чисел δ_i есть ± 1, так что функция $\varphi(u)$ удовлетворяет неравенству

$$0 \leq \varphi(u) \leq 1 \qquad (-1 \leq u \leq 1).$$

Всех функций этого вида 2^{m-1}. При этом

$$\frac{1}{z+1}\,G(z; \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{m-1}) = \frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \dots + \frac{s_n}{z^{n+1}} + \dots,$$

где s_i $(s_0=1,\ i=0, 1, \dots, n)$ — известные функции от $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$; L; $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{m-1}$.

В силу положения Г последовательность

$$s_0,\ s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n \tag{9}$$

должна быть P- или SP-последовательностью. Беря все возможные комбинации чисел δ_i, мы получим 2^{m-1} последовательностей типа (9). Каждая из них должна быть P- или SP-последовательностью. Как видим, необходимым условием для разрешимости L-проблемы (1), (2) является ненегативность 2^m квадратичных форм.

Теперь мы докажем, что это условие не только необходимо, но и достаточно.

При этом мы ограничимся приведением доказательства для случая четного n $(=2p)$.

5. Итак, примем, что

$$\sum_{i,k=0}^{p} t_{i+k}\xi_i\xi_k \geqslant 0, \tag{10_1}$$

$$\sum_{i,k=0}^{p-1} (t_{i+k} - t_{i+k+2})\,\xi_i\xi_k \geqslant 0, \tag{10_2}$$

где $\{t_k\}_0^{2p}$ пробегает совокупность всех последовательностей, порождаемых разложением в ряд по убывающим степеням z функции

$$\frac{1}{z+1}\exp\left\{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{du}{z-u} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m-1}\int_{\alpha_i}^{\beta_i}\frac{\delta_i\,du}{z-u} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2L}\left(\frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \ldots + \frac{c_{n-1}}{z^n}\right)\right\} = H(z;\ \delta_1,\ \delta_2,\ \ldots,\ \delta_{m-1})$$

при всевозможных комбинациях чисел δ_i. Величины t_i являются регулярными функциями от положительного параметра L. Будем этот параметр уменьшать.

Простой подсчет показывает, что

$$t_0 = 1,\quad t_1 = \frac{c_0}{2L}(1+\ldots),\quad t_2 = \frac{c_0^2}{8L^2}(1+\ldots),$$

где точками обозначены бесконечно малые при $L \to 0$. Поэтому форма (10_2) при достаточно малом $L > 0$ наверно не будет ненегативной. Отсюда вытекает, что найдется такое значение L, назовем его λ, при котором все рассматриваемые формы (числом 2^m) ненегативны, а одна из них сингулярна. Мы докажем, что существует функция $f(u)$, удовлетворяющая соотношениям (1) и неравенству

$$|f(u)| \leqslant \lambda, \tag{2bis}$$

так что неравенство (2) будет выполнено и подавно.

Пусть сингулярна и имеет наименьший ранг одна из форм (10), отвечающих функции

$$H(z;\ \delta_1,\ \delta_2,\ \ldots,\ \delta_{m-1}) \equiv H(z).$$

Введем в рассмотрение $m-1$ функций.

$$H(z;\ -\delta_1,\ \delta_2, \ldots, \delta_{m-1}) = H_1(z),$$
$$H(z;\ \delta_1,\ \ \delta_2, \ldots, \delta_{m-1}) = H_2(z),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$H(z;\ \delta_1,\ \delta_2, \ldots,\ \ \delta_{m-1}) = H_{m-1}(z)$$

и отвечающие им последовательности

$$\{t_i^{(1)}\}_0^{2p},\quad \{t_i^{(2)}\}_0^{2p}, \ldots, \{t_i^{(m-1)}\}_0^{2p}.$$

Так как одна из форм (10) сингулярна, то в силу B имеет место единственное представление

$$t_k = \sum_{i=1}^{q} \mu_i x_i^k \qquad (k=0,\ 1,\ 2, \ldots, 2p),$$

где $q \leqslant p+1$ есть ранг формы (10_1), $\mu_i > 0$, $-1 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_q \leqslant 1$. При этом обязательно имеют место оба равенства $x_1 = -1$, $x_q = 1$, если $q = p+1$.

В силу этого представления

$$H(z) = \sum_{i=1}^{q} \frac{\mu_i}{z-x_i} = \frac{(z-y_1)(z-y_2)\ldots(z-y_{q-1})}{(z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_q)}, \tag{11}$$

где

$$-1 \leqslant x_1 < y_1 < x_2 < \ldots < x_{q-1} < y_{q-1} < x_q \leqslant 1.$$

Заметим теперь, что

$$H_\nu(z) = \left(\frac{z-\beta_\nu}{z-\alpha_\nu}\right)^{\delta_\nu} H(z).$$

При этом

$$t_k - \beta_\nu t_{k-1} = t_k^{(\nu)} - \alpha_\nu t_{k-1}^{(\nu)} \qquad (k=1,\ 2, \ldots, 2p),$$

если $\delta_\nu = 1$ и

$$t_k - \alpha_\nu t_{k-1} = t_k^{(\nu)} - \beta_\nu t_{k-1}^{(\nu)} \qquad (k=1,\ 2, \ldots, 2p),$$

если $\delta_\nu = -1$.

Так как $\{t_k^{(\nu)}\}_0^{2p}$ есть P- или SP-последовательность, то рассмотрения параграфа 3 применимы и показывают, что ни одна из точек x_i, y_i представления (11) не попадает внутрь интервала (α_ν, β_ν) и что имеют место неравенства

$$y_{k-1} \leqslant \alpha_\nu < \beta_\nu \leqslant x_k$$

при $\delta_\nu = 1$ и неравенства

$$x_{i-1} \leqslant \alpha_\nu < \beta_\nu \leqslant y_{i-1}$$

при $\delta_\nu = -1$.

Положим теперь

$$\Phi(u)=\begin{cases}1 & (y_{i-1}<u<x_i)\\ 0 & (x_i<u<y_i)\end{cases}$$

$$(i=1,2,\ldots,q;\quad y_0=-1,\ y_q=1).$$

Тогда, как легко видеть,

$$\exp\left\{\int_{-1}^{1}\frac{\Phi(u)\,du}{z-u}\right\}=\frac{(z+1)(z-y_1)\ldots(z-y_{q-1})}{(z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_q)}.$$

Отсюда вытекает, что обе функции

$$\int_{-1}^{1}\frac{\Phi(u)}{z-u}\,du,$$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{du}{z-u}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m-1}\int_{\alpha_i}^{\beta_i}\frac{\delta_i\,du}{z-u}+\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{c_0}{z}+\frac{c}{z^2}+\ldots+\frac{c_{n-1}}{z^n}\right)$$

имеют одинаковые коэфициенты в разложениях по убывающим степеням z до члена с $\frac{1}{z^n}$ включительно. Иначе говоря,

$$\frac{1}{2\lambda}\int_{-1}^{1}\frac{F(u)\,du}{z-u}\equiv\int_{-1}^{1}\frac{\Phi(u)\,du}{z-u}-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{du}{z-u}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m-1}\int_{\alpha_i}^{\beta_i}\frac{\delta_i\,du}{z-u}=$$

$$=\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{c_0}{z}+\frac{c_1}{z^2}+\ldots+\frac{c_{n-1}}{z^n}+\ldots\right).$$

Из этого соотношения следует, что

$$\int_{-1}^{1}u^kF(u)\,du=c_k\qquad(k=0,1,2,\ldots,n-1),$$

и наша теорема будет доказана, если мы докажем, что

a) $F(u)=0$ в каждом из интервалов (α_ν,β_ν)

b) $|F(u)|\leqslant\lambda$ всюду в интервале $(-1,1)$.

Возьмем интервал

$$y_{i-1}<u<x_i$$

и допустим, что в этом интервале нет точек α_ν, β_ν. Тогда в этом интервале

$$\frac{F(u)}{2\lambda}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Подобным образом, если в интервале

$$x_i < u < y_i$$

нет точек α_ν, β_ν, то в нем

$$\frac{F(u)}{2\lambda} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\ .$$

Нам остается еще рассмотреть интервал

$$y_{k-1} < u < x_k, \tag{12}$$

для которого

$$y_{k-1} \leqslant \alpha_\nu < \beta_\nu \leqslant x_k,$$

и интервал

$$x_k < u < y_k, \tag{13}$$

для которого

$$x_k \leqslant \alpha_\nu < \beta_\nu \leqslant y_k.$$

При этом в первом случае $\delta_\nu = 1$, а во втором случае $\delta_\nu = -1$. Если u лежит в интервале (12), то

$$\frac{F(u)}{2\lambda} \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} & (y_{k-1} < u < \alpha_\nu) \\ 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 & (\alpha_\nu < u < \beta_\nu) \\ 1 - \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} & (\beta_\nu < u < x_k). \end{cases}$$

Если же u лежит в интервале (13), то

$$\frac{F(u)}{2\lambda} = \begin{cases} -\frac{1}{2} - 0 = -\frac{1}{2} & (x_k < u < \alpha_\nu) \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 & (\alpha_\nu < u < \beta_\nu) \\ -\frac{1}{2} - 0 = -\frac{1}{2} & (\beta_\nu < u < y_k). \end{cases}$$

Мы видим, что оба свойства **a)**, **b)** доказаны. Вместе с тем доказана и наша теорема.