К вопросу об обобщении основной формулы символического метода

И. З. Штокало

§ 1

В цикле работ *), относящихся к теории обобщенного символического изображения решений линейных диференциальных уравнений с переменными коэфициентами, изложен материал, дающий возможность реализации обобщения основной формулы символического метода на случай линейных диференциальных уравнений с квазипериодическими коэфициентами. В указанных исследованиях установлено, при достаточно общих условиях, налагаемых на рассматриваемый класс уравнений, существование одного одинственного решения вида

$$\xi(t, p, \varepsilon)\, e^{pt},$$

где $\xi(t, p, \varepsilon)$ есть некоторый вектор, зависящий от независимой переменной t и от параметров p и ε, причем, как показано в соответствующих теоремах, этот вектор, в случае квазипериодических коэфициентов уравнения, является квазипериодическим относительно t на всей вещественной оси и аналитическим по отношению к p и ε в некоторой области.

Весьма интересным является вопрос об ограниченности вектора $\xi(t, p, \varepsilon)$ относительно параметра p. Установлению этого и посвящена данная статья.

§ 2

Рассмотрим диференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} - [\,A + \varepsilon f(t)\,]\, x = Ce^{pt}, \tag{1}$$

---

*) И. Штокало, Обобщение основной формулы символического метода на случай линейных диференциальных уравнений с переменными коэфициентами, ДАН СССР, т. XLVII, № 1, 1945.

И. З. Штокало, Теория обобщенного символического изображения решений линейных диференциальных уравнений с квазипериодическими коэфициентами, Сборник трудов Ин-та математики, АН УССР № 11, 1948.

И. Штокало, До питання про вирішення лінійних диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами, Збірник праць Ін-ту математики АН УРСР № 9, 1947.

где A — постоянная n-мерная матрица, $f(t)$ — матрица, ограниченная на всей вещественной оси, C — постоянный вектор, а p и ε — комплексные параметры, причем второй из них по модулю достаточно мал.

Примем во внимание две доказанные нами ранее общие теоремы, содержащие результаты, относящиеся к вопросу существования для уравнения (1) единственного решения, вида

$$x = \xi(t, p, \varepsilon) e^{pt}.$$

Займемся теперь вопросом установления ограниченности вектора $\xi(t, p, \varepsilon)$ относительно параметра p. Перед доказательством соответствующей теоремы проделаем некоторые преобразования.

Прежде всего нетрудно убедиться, что вектор $\xi(t, p, \varepsilon)$ является решением уравнения

$$\frac{d\xi(t, p, \varepsilon)}{dt} + [(pE - A) - \varepsilon f(t)]\xi(t, p, \varepsilon) = C, \tag{2}$$

где E — единичная матрица.

Представим решение уравнения (2) в виде

$$\xi(t, p, \varepsilon) = \frac{u_0(t, \varepsilon)}{p} + \frac{u_1(t, \varepsilon)}{p^2} + \ldots + \frac{u_{n-1}(t, \varepsilon)}{p^n} + R_n(t, p, \varepsilon). \tag{3}$$

Подставив выражение (3) в уравнение (2), имеем

$$\frac{1}{p}\frac{du_0(t, \varepsilon)}{dt} + \frac{1}{p^2}\frac{du_1(t, \varepsilon)}{dt} + \ldots + \frac{1}{p^n}\frac{du_{n-1}(t, \varepsilon)}{dt} +$$

$$+ [(pE - A) - \varepsilon f(t)]\left[\frac{u_0(t, \varepsilon)}{p} + \frac{u_1(t, \varepsilon)}{p^2} + \ldots + \frac{u_{n-1}(t, \varepsilon)}{p^n}\right] +$$

$$+ \frac{dR_n(t, p, \varepsilon)}{dt} + [(pE - A) - \varepsilon f(t)]R_n(t, p, \varepsilon) = C, \tag{4}$$

или

$$u_0(t, \varepsilon) + \frac{1}{p}\left\{\frac{du_0(t, \varepsilon)}{dt} - [A + \varepsilon f(t)]u_0(t, \varepsilon) + u_1(t, \varepsilon)\right\} +$$

$$+ \frac{1}{p^2}\left\{\frac{du_1(t, \varepsilon)}{dt} - [A + \varepsilon f(t)]u_1(t, \varepsilon) + u_2(t, \varepsilon)\right\} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{p^n}\left\{\frac{du_{n-1}(t, \varepsilon)}{dt} - [A + \varepsilon f(t)]u_{n-1}(t, \varepsilon) + u_n(t, \varepsilon)\right\} +$$

$$+ \frac{dR_n(t, p, \varepsilon)}{dt} - [A + \varepsilon f(t)]R_n(t, p, \varepsilon) + pR_{n+1}(t, p, \varepsilon) = C. \tag{5}$$

Определим теперь функции $u_0(t, \varepsilon)$, $u_1(t, \varepsilon), \ldots, u_n(t, \varepsilon)$ из уравнений

$$u_0(t, \varepsilon) = C,$$

$$\frac{du_0(t, \varepsilon)}{dt} - [A + \varepsilon f(t)]\, u_0(t, \varepsilon) + u_1(t, \varepsilon) = 0,$$

$$\frac{du_1(t, \varepsilon)}{dt} - [A + \varepsilon f(t)]\, u_1(t, \varepsilon) + u_2(t, \varepsilon) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{du_{n-1}(t, \varepsilon)}{dt} - [A + \varepsilon f(t)]\, u_{n-1}(t, \varepsilon) + u_n(t, \varepsilon) = 0,$$

т. е., другими словами, определим $u_0(t, \varepsilon)$, $u_1(t, \varepsilon), \ldots, u_{k-1}(t, \varepsilon), \ldots$ так, чтобы выражение $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{u_{k-1}(t, \varepsilon)}{p^k}$ было формальным решением уравнения (2).

Тогда из (5) получаем

$$u_0(t, \varepsilon) = C,$$

$$u_1(t, \varepsilon) = [A + \varepsilon f(t)]\, C,$$

$$u_2(t, \varepsilon) = [A + \varepsilon f(t)]\, u_1(t, \varepsilon) - \frac{du_1(t, \varepsilon)}{dt},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_n(t, \varepsilon) = [A + \varepsilon f(t)]\, u_{n-1}(t, \varepsilon) - \frac{du_{n-1}(t, \varepsilon)}{dt}.$$

Отметим здесь же, что при условии, принятом нами в отношении матрицы $f(t)$, матрица $u_n(t, \varepsilon)$ является ограниченной на всей вещественной оси.

Перепишем (4) в виде

$$\frac{dR_n(t, p, \varepsilon)}{dt} + [(pE - A) - \varepsilon f(t)]\, R_n(t, p, \varepsilon) +$$
$$+ \frac{d}{dt}\left[\frac{u_0(t, \varepsilon)}{p} + \frac{u_1(t, \varepsilon)}{p^2} + \ldots + \frac{u_{n-1}(t, \varepsilon)}{p^n}\right] +$$
$$+ [(pE - A) - \varepsilon f(t)]\left[\frac{u_0(t, \varepsilon)}{p} + \frac{u_1(t, \varepsilon)}{p^2} + \ldots + \frac{u_{n-1}(t, \varepsilon)}{p^n}\right] - C = 0.$$

Но

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{u_0(t, \varepsilon)}{p} + \frac{u_1(t, \varepsilon)}{p^2} + \ldots + \frac{u_{n-1}(t, \varepsilon)}{p^n}\right] + [(pE - A) - \varepsilon f(t)]\left[\frac{u_0(t, \varepsilon)}{p} + \right.$$
$$\left. + \frac{u_1(t, \varepsilon)}{p^2} + \ldots + \frac{u_{n-1}(t, \varepsilon)}{p^n}\right] - C = -\frac{u_n(t, \varepsilon)}{p^n}.$$

Поэтому имеем

$$\frac{dR_n(t, p, \varepsilon)}{dt} + [(pE-A) - \varepsilon f(t)] R_n(t, p, \varepsilon) = \frac{u_n(t, \varepsilon)}{p^n}. \tag{6}$$

Положим

$$R_n(t, p, \varepsilon) = \frac{\sigma_n(t, p, \varepsilon)}{p^n}.$$

Тогда уравнение (6) представится в виде

$$\frac{d\sigma_n(t, p, \varepsilon)}{dt} + [(pE-A) - \varepsilon f(t)] \sigma_n(t, p, \varepsilon) = u_n(t, \varepsilon). \tag{7}$$

Возьмем далее выражение

$$\chi_n(t, p, \varepsilon) = \sigma_n(t, p, \varepsilon) e^{pt}.$$

Посредством последнего уравнение (7) сведется к

$$\frac{d\chi_n(t, p, \varepsilon)}{dt} - [A + \varepsilon f(t)] \chi_n(t, p, \varepsilon) = u_n(t, \varepsilon) e^{pt}. \tag{8}$$

§ 3

Докажем теперь следующую теорему.

Если вещественные части параметра p и корней $r_1, r_2, \ldots, r_n$ характеристического уравнения

$$\operatorname{Det} \| pE - A \| = 0$$

не совпадают, то, в случае ограниченности на всей вещественной оси матрицы $f(t)$, уравнение (8) имеет одно единственное решение вида

$$\chi_n(t, p, \varepsilon) = \sigma_n(t, p, \varepsilon) e^{pt}, \tag{9}$$

где

$$| \sigma_n(t, p, \varepsilon) | \leq \text{const} \qquad (-\infty, +\infty).$$

Доказательство. Если бы решение уравнения (8) имело вид (9), то получили бы

$$\frac{d\sigma_n(t, p, \varepsilon)}{dt} - (A - pE) \sigma_n(t, p, \varepsilon) = u_n(t, \varepsilon) + \varepsilon f(t) \sigma_n(t, p, \varepsilon),$$

или, вводя обозначение

$$u_n(t, \varepsilon) + \varepsilon f(t) \sigma_n(t, p, \varepsilon) = F(t, p, \varepsilon),$$

пришли бы к

$$\frac{d\sigma_n(t, p, \varepsilon)}{dt} - (A - pE) \sigma_n(t, p, \varepsilon) = F(t, p, \varepsilon). \tag{10}$$

Обозначая через $V(t, p, \varepsilon)$ интеграл уравнения

$$\frac{d\sigma_n(t, p, \varepsilon)}{dt} - (A - pE) \sigma_n(t, p, \varepsilon) = 0,$$

обращающийся при $t=0$ в единичную матрицу, и отмечая знаками минус и плюс, проставляемыми внизу справа от $V(t, p, \varepsilon)$ те части его, для которых осуществляется соответственно

$$\mathrm{Re}\,(r_k - p) < 0$$

или

$$\mathrm{Re}\,(r_k - p) > 0,$$

получим для уравнения (10)

$$\sigma_n(t, p, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{t} V_-(t-\tau, p, \varepsilon)\, F(\tau, p, \varepsilon)\, d\tau - \int_{t}^{+\infty} V_+(t-\tau, p, \varepsilon)\, F(\tau, p, \varepsilon)\, d\tau,$$

или, иначе

$$\sigma_n(t, p, \varepsilon) = \sigma_n^0(t, p, \varepsilon) + \varepsilon \int_{-\infty}^{t} V_-(t-\tau, p, \varepsilon)\, f(\tau)\, \sigma_n(\tau, p, \varepsilon)\, d\tau -$$

$$- \varepsilon \int_{t}^{+\infty} V_+(t-\tau, p, \varepsilon)\, f(\tau)\, \sigma_n(\tau, p, \varepsilon)\, d\tau, \tag{11}$$

где

$$\sigma_n^0(t, p, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{t} u_n(\tau, \varepsilon)\, V_-(t-\tau, p, \varepsilon)\, d\tau - \int_{t}^{+\infty} u_n(\tau, \varepsilon)\, V_+(t-\tau, p, \varepsilon)\, d\tau.$$

Если установим существование единственного ограниченного решения $\sigma_n(t, p, \varepsilon)$ уравнения (10), то вместе с этим, будет доказано существование единственного решения, вида (9), уравнения (8).

Для осуществления доказательства существования решения $\sigma_n(t, p, \varepsilon)$ уравнения (10) применим метод последовательных приближений. С этой целью будем считать $\sigma_n^0(\ , p, \varepsilon)$ нулевым приближением вектора $\sigma_n(t, p, \varepsilon)$. Определим первое приближение $\sigma_n^1(t, p, \varepsilon)$ этого вектора, пользуясь выражением

$$\sigma_n^1(t, p, \varepsilon) = \sigma_n^0(t, p, \varepsilon) + \varepsilon \int_{-\infty}^{t} V_-(t-\tau, p, \varepsilon)\, f(\tau)\, \sigma_n^0(\tau, p, \varepsilon)\, d\tau -$$

$$- \varepsilon \int_{t}^{+\infty} V_+(t-\tau, p, \varepsilon)\, f(\tau)\, \sigma_n^0(\tau, p, \varepsilon)\, d\tau. \tag{12}$$

Пусть M и N будут числа, ограничивающие на всей вещественной оси соответственно $|\sigma_n^0(t, p, \varepsilon)|$ и $|f(t)|$.

Тогда на основании (12) получим оценку

$$|\sigma_n^1(t, p, \varepsilon)-\sigma_n^0(t, p, \varepsilon)| \leqq |\varepsilon| MN\left\{\int_{-\infty}^{t} |V_-(t-\tau, p, \varepsilon)|\, d\tau + \int_{t}^{+\infty} |V_+(t-\tau, p, \varepsilon)|\, d\tau\right\}.$$

Обозначая

$$\int_{-\infty}^{t} |V_-(t-\tau, p, \varepsilon)|\, d\tau = \int_{0}^{+\infty} |V_-(z, p, \varepsilon)|\, dz = E_1,$$

$$\int_{t}^{+\infty} |V_+(t-\tau, p, \varepsilon)|\, d\tau = \int_{-\infty}^{0} |V_+(z, p, \varepsilon)|\, dz = E_2,$$

приходим к неравенству

$$|\sigma_n^1(t, p, \varepsilon) - \sigma_n^0(t, p, \varepsilon)| \leqq |\varepsilon| MN(E_1 + E\ ). \tag{13}$$

Построим далее второе приближение $\sigma_n^2(t, p, \varepsilon)$

$$\sigma_n^2(t, p, \varepsilon) = \sigma_n^0(t, p, \varepsilon) + \varepsilon \int_{-\infty}^{t} V_-(t-\tau, p, \varepsilon) f(\tau) \sigma_n^1(\tau, p, \varepsilon)\, d\tau -$$

$$- \varepsilon \int_{t}^{+\infty} V_+(t-\tau, p, \varepsilon) f(\tau) \sigma_n^1(\tau, p, \varepsilon)\, d\tau. \tag{14}$$

Используя (14) и (12), а также (13), получим

$$|\sigma_n^2(t, p, \varepsilon)-\sigma_n^1(t, p, \varepsilon)| \leqq |\varepsilon| \left\{\int_{-\infty}^{t} |V_-(t-\tau, p, \varepsilon)| \cdot |f(\tau)| \cdot |\sigma_n^1(\tau, p, \varepsilon) -\right.$$

$$\left. - \sigma_n^0(\tau, p, \varepsilon)|\, d\tau + \int_{t}^{+\infty} |V_+(t-\tau, p, \varepsilon)| \cdot |f(\tau)| \cdot |\sigma_n^1(\tau, p, \varepsilon)-\sigma_n^0(\tau, p, \varepsilon)|\, d\tau\right\} \leqq$$

$$\leqq |\varepsilon|^2 M[N(E_1+E_2)]^2.$$

Покажем справедливость аналогичного неравенства для любого целого положительного m.

В самом деле, допустив справедливость неравенства для $(m-1)$, т. е.

$$|\sigma_n^{m-1}(t, p, \varepsilon) - \sigma_n^{m-2}(t, p, \varepsilon)| \leqq |\varepsilon|^{m-1} M[N(E_1+E_2)]^{m-1},$$

получаем сразу же

$$|\sigma_n^m(t, p, \varepsilon)-\sigma_n^{m-1}(t, p, \varepsilon)| \leqq |\varepsilon|^m M[N(E_1+E_2)]^m.$$

Установим далее существование предела последовательности $\sigma_n^k(t, p, \varepsilon)$ $(k=0, 1, 2,\ldots)$. Для этого рассмотрим ряд

$$\sigma_n^0(t, p, \varepsilon) + [\sigma_n^1(t, p, \varepsilon) - \sigma_n^0(t, p, \varepsilon)] + [\sigma_n^2(t, p, \varepsilon) - \sigma_n^1(t, p, \varepsilon)] +$$

$$+ \ldots + [\sigma_n^m(t, p, \varepsilon) - \sigma_n^{m-1}(t, p, \varepsilon)] + \ldots \tag{15}$$

Вследствие сходимости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\varepsilon|^k [N(E_1+E_2)]^k,$$

при ε, удовлетворяющем неравенству

$$|\varepsilon| < \frac{1}{N(E\ \ +E_2)}, \tag{16}$$

ряд (15) сходится равномерно на всей вещественной оси. Следовательно,

$$\sigma_n(t, p, \varepsilon) = \lim_{k\to\infty} \sigma_n^k(t, p, \varepsilon)$$

существует и является непрерывным относительно t на всей вещественной оси вектором.

Ограниченность $\sigma_n(t, p, \varepsilon)$ относительно t в интервале $(-\infty, +\infty)$ вытекает непосредственно из

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\sigma_n^k(t, p, \varepsilon) - \sigma_n^{k-1}(t, p, \varepsilon)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |\varepsilon|^k [N(E_1+E_2)]^k. \qquad (\sigma_n^{-1}=0).$$

Покажем, наконец, единственность ограниченного в $(-\infty, +\infty)$ решения $\sigma_n(t, p, \varepsilon)$.

Предположим существование, наряду с вектором $\sigma_n(t, p, \varepsilon)$, аналогичного с последним вектора $s_n(t, p, \varepsilon)$. Тогда будем иметь

$$s_n(t, p, \varepsilon) = \sigma_n^0(t, p, \varepsilon) + \varepsilon \int_{-\infty}^{t} V_-(t-\tau, p, \varepsilon) f(\tau) s_n(\tau, p, \varepsilon)\, d\tau -$$

$$- \varepsilon \int_{t}^{+\infty} V_+(t-\tau, p, \varepsilon) f(\tau) s_n(\tau, p, \varepsilon)\, d\tau.$$

Следовательно, получаем

$$|\sigma_n(t, p, \varepsilon) - s_n(t, p, \varepsilon)| \leqslant$$

$$\leqslant |\varepsilon| \left\{ \int_{-\infty}^{t} |V_-(t-\tau, p, \varepsilon)| \cdot |f(\tau)| \cdot |\sigma_n(\tau, p, \varepsilon) - s_n(\tau, p, \varepsilon)|\, d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{t}^{+\infty} |V_+(t-\tau, p, \varepsilon)| \cdot |f(\tau)| \cdot |\sigma_n(\tau, p, \varepsilon) - s_n(\tau, p, \varepsilon)|\, d\tau \right\}. \tag{17}$$

Обозначая

$$\max |\sigma_n(t, p, \varepsilon) - s_n(t, p, \varepsilon)| = T, \qquad (-\infty, +\infty)$$

приходим от неравенства (17) к

$$T \leqslant |\varepsilon| NT(E_1+E_2)$$

или

$$1 \leqslant |\varepsilon| N(E_1+E_2),$$

что невозможно при (16). Поэтому $\sigma_n(t, p, \varepsilon) \equiv s_n(t, p, \varepsilon)$.

Остается еще рассмотреть выражение

$$\chi_n(t, p, \varepsilon) = \sigma_n(t, p, \varepsilon)\, e^{pt}.$$

Покажем, что оно представляет собой решение уравнения (8), а затем установим его единственность.

Для доказательства первого вопроса заметим, что

$$\sigma_n(t, p, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{t} V_-(t-\tau, p, \varepsilon)\, F(\tau, p, \varepsilon)\, d\tau - \int_{t}^{+\infty} V_+(t-\tau, p, \varepsilon)\, F(\tau, p, \varepsilon)\, d\tau,$$

на основании доказанной нами ранее леммы, является решением уравнения

$$\frac{d\sigma_n(t, p, \varepsilon)}{dt} - (A-pE)\,\sigma_n(t, p, \varepsilon) = u_n(t, \varepsilon) + \varepsilon f(t)\,\sigma_n(t, p, \varepsilon)$$

и поэтому

$$\frac{d\chi_n(t, p, \varepsilon)}{dt} = \left|\frac{d\sigma_n(t, p, \varepsilon)}{dt} + p\sigma_n(t, p, \varepsilon)\right| e^{pt} =$$

$$= \{[A + \varepsilon f(t)]\,\sigma_n(t, p, \varepsilon) + u_n(t, \varepsilon)\}\, e^{pt},$$

т. е.

$$\frac{d\chi_n(t, p, \varepsilon)}{dt} - [A + \varepsilon f(t)]\,\chi_n(t, p, \varepsilon) = u_n(t, \varepsilon),$$

чем установлено требуемое.

Для доказательства второго вопроса предположим существование, наряду с решением $\chi_n(t, p, \varepsilon)$, также $X_n(t, p, \varepsilon) = S_n(t, p, \varepsilon)\, e^{pt}$. Тогда будем иметь

$$\frac{dS_n(t, p, \varepsilon)}{dt} - (A-pE)\, S_n(t, p, \varepsilon) = u_n(t, \varepsilon) + \varepsilon f(t)\, S_n(t, p, \varepsilon).$$

Однако, на основании упоминавшейся уже леммы, решение $S_n(t, p, \varepsilon)$ должно иметь вид:

$$S_n(t, p, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{t} V_-(t-\tau, p, \varepsilon)\, \Phi(\tau, p, \varepsilon)\, d\tau - \int_{t}^{+\infty} V_+(t-\tau, p, \varepsilon)\, \Phi(\tau, p, \varepsilon)\, d\tau,$$

$$[\Phi(\tau, p, \varepsilon) = u_n(\tau, \varepsilon) + \varepsilon f(\tau)\, S_n(\tau, p, \varepsilon)],$$

т. е. должно удовлетворять интегральному уравнению

$$S_n(t, p, \varepsilon) = \sigma_n^*(\tau, p, \varepsilon) + \varepsilon \int_{-\infty}^{t} V_-(t-\tau, p, \varepsilon)\, f(\tau)\, S_n(\tau, p, \varepsilon)\, d\tau -$$

$$- \varepsilon \int_{t}^{+\infty} V_+(t-\tau, p, \varepsilon)\, f(\tau)\, S_n(\tau, p, \varepsilon)\, d\tau,$$

где $\sigma_n^0(t, p, \varepsilon)$ то же, что и в (11). Поскольку последнее уравнение, как нами уже установлено, имеет одно единственное решение, то

$$S_n(t, p, \varepsilon) \equiv \sigma_n(t, p, \varepsilon),$$

чем доказана единственность решения

$$\chi_n(t, p, \varepsilon) = \sigma_n(t, p, \varepsilon) e^{pt}$$

уравнения (8).

§ 4

Заметим в конце, что в случае квазипериодичности матрицы $f(t)$ вектор $\xi(t, p, \varepsilon)$ является также квазипериодической функцией от t с тем же частотным базисом. Напомним вместе с тем, что, согласно доказанной нами теореме, помещенной в указанных в сноске работах, полученные результаты могут быть перенесены и на системы, не содержащие малого параметра, для чего следует постоянную матрицу A положить равной 0 и параметр ε равным 1. В этом случае, как нами показано в соответствующей теореме, вектор $\xi(t, p, \varepsilon)$ уступит место вектору $\omega(t, p)$, обладающему теми же свойствами по отношению к величинам t и p, что и первый.

Все эти результаты дают возможность осуществления непосредственного обобщения символического метода на случай систем линейных диференциальных уравнений с квазипериодическими коэфициентами.