

## Пример односвязной римановой поверхности гиперболического типа

*Л. И. Волковыский (Львов)*

### Введение

В настоящей заметке мы строим пример односвязной римановой поверхности гиперболического типа, имеющей две логарифмические точки ветвления, расположенные над точками  $w=0$ ,  $w=1$  и бесконечно много алгебраических точек ветвления, расположенных в  $\infty$ . На существование подобного рода поверхностей гиперболического типа, столь мало разветвленных над всей конечной плоскостью, нами было ранее указано без доказательства. Доказательство гиперболичности конструируемой ниже поверхности нам удалось получить, опираясь на решение некоторой задачи на склеивание бесконечного числа полос с полуплоскостью, задачи, имеющей и самостоятельный интерес.

О постановке задач на склеивание в связи с изучением проблемы типа см., например, [1] и [2].

### § 1. Склеивание бесконечного числа полос с полуплоскостью

1. Постановка задачи. Пусть  $f(t)$  и  $\{\varphi_n(t)\}$  ( $n=1, 2, \dots$ ) вещественные функции, определенные на интервале  $(0, \infty)$ , изменяющиеся от  $-\infty$  до  $+\infty$  при возрастании  $t$  от 0 до  $+\infty$  и имеющие всюду положительные первые производные, удовлетворяющие условию Гельдера на каждом конечном сегменте значений  $t^*$ .

Каждой функции  $\varphi_n(t)$  поставим в соответствие в плоскости  $z = x + iy$  полосу  $S_n$ :  $n-1 < y < n$  и функции  $f(t)$  — полуплоскость  $H$ :  $y < 0$ . Полагая

$$x = f(t), \quad x_n = \varphi_n(t) \quad (1)$$

и рассматривая каждую пару граничных точек  $(x_n, n)$ ,  $(x_{n+1}, n)$  полос  $S_n, S_{n+1}$  ( $n=1, 2, \dots$ ) и каждую пару граничных точек  $(x, 0)$ ,  $(x_1, 0)$  полуплоскости  $H$  и полосы  $S_1$ , как соответствующие друг другу (подлежащие склеиванию), приходим к задаче на склеивание бесконечного числа по-

\*) Т. е. для всяких  $t', t'' \in [a, b] \subset (0, \infty)$  имеем

$$|\varphi_n(t') - \varphi_n(t'')| \leq K |t' - t''|^\alpha,$$

где постоянные  $K$  и  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) зависят от функций  $\varphi_n(t)$  (соответственно  $f(t)$ ) и от отрезка  $[a, b]$ .

лос с полуплоскостью. Условия, наложенные на функции (1), обеспечивают возможность склеивания, т. е. возможность конформного отображения полос  $S_n$  и полуплоскости  $H$  на некоторую односвязную риманову поверхность  $F$ , разбитую на „полосы“ и „полуплоскость“ подобно плоскости  $z$ , причем происходит склеивание, т. е. каждая пара соответствующих друг другу граничных точек переходит в одну и ту же точку на  $F$ . Возникает задача определения типа склеивания, т. е. определение типа поверхности  $F$ . Здесь нас будет интересовать гиперболический тип склеивания.

2. Дополнительные ограничения на функции склеивания. Пусть  $\varphi(t)$  функция, удовлетворяющая тем же условиям, что и функция (1). Ставя этой функции в соответствие полуплоскость  $H^*$ :  $y > 0$  и полагая

$$x^* = \varphi(t), \quad (2)$$

приходим к задаче на склеивание полуплоскостей  $H$  и  $H^*$  с функцией склеивания

$$x = \psi(x^*), \quad (3)$$

определяемой уравнениями  $x = f(t)$ ,  $x^* = \varphi(t)$ .

Если теперь предположить, что функции  $\{\varphi_n(t)\}$  достаточно быстро сходятся к функции  $\varphi(t)$ , то естественно ожидать, что тип склеивания в обеих задачах будет один и тот же. Для случая же склеивания двух полуплоскостей у нас имеются различные признаки типа склеивания, в частности и гиперболического типа (см. [2]).

Введем следующие ограничения на функции (1) и (2):

1) на каждом конечном отрезке значений  $t$

$$\varphi_n(t) \Rightarrow \varphi(t), \quad \varphi'_n(t) \Rightarrow \varphi'(t) \quad (4)$$

(знак  $\Rightarrow$  означает, как обычно, равномерную сходимость);

2) для всех значений  $t$

$$f'(t) \geq \varphi_1'(t) \geq \varphi_2'(t) \geq \dots,$$

или, учитывая (4),

$$f'(t) \geq \varphi_1'(t) \geq \varphi_2'(t) \geq \dots \geq \varphi'(t); \quad (5)$$

3) выполняется предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f'(t)}{\varphi'(t)} = 1. \quad (6)$$

Заметим, что из (5) и (6) для функции склеивания (3) следует, что

$$\psi'(x^*) \geq 1, \quad \lim_{x^* \rightarrow \infty} \psi'(x^*) = 1. \quad (7)$$

Зафиксируем произвольное значение  $t_0$ , для которого

$$f(t_0) > \varphi(t_0) > 0 \quad (8)$$

(существование такого  $t_0$  можно предполагать, не нарушая общности, добавляя, если нужно, к  $f(t)$  постоянную) и определим последовательность значений  $\{t_n\}$  ( $n = 0, 1, \dots$ ), определяемых для  $n \geq 1$  из соотношений

$$f(t_n) = \varphi(t_{n+1}). \quad (9)$$

Потребуем еще от функций (1), (2), чтобы

4) существовало конечное число  $\lambda > 1$ , такое, что для всех  $n = 1, 2, \dots$  выполняется неравенство

$$\sup_{0 < t < t_{n+1}} \frac{\varphi'_n(t)}{\varphi'(t)} < \lambda. \quad (10)$$

Для дальнейшего введем последовательность величин  $\{r_n\}$  ( $n = 0, 1, \dots$ ):

$$r_n = f(t_n) = \varphi(t_{n+1}), \quad (11)$$

а также величины  $\{J_n\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ):

$$J_n = r_n - r_{n-1} = f(t_n) - f(t_{n-1}) = \varphi(t_{n+1}) - \varphi(t_n). \quad (12)$$

Из предыдущего следует, что

$$r_{n+1} = \psi(r_n),$$

поэтому

$$J_{n+1} = \psi(r_n) - \psi(r_{n-1})$$

и, в силу (7),

$$J_{n+1} \geq J_n \geq \dots \geq J_1, \quad (13)$$

откуда следует, что

$$r_n \geq r_0 + nJ_1. \quad (14)$$

3. Частичная деформация и склеивание полос  $\{S_n\}$ . При помощи отрезков, соединяющих точки  $(\varphi_n(t_n), n-1)$ ,  $(\varphi_n(t_{n+1}), n)$  разобьем каждую полосу  $S_n$  на две части:  $S_n'$  — слева и  $S_n''$  — справа.

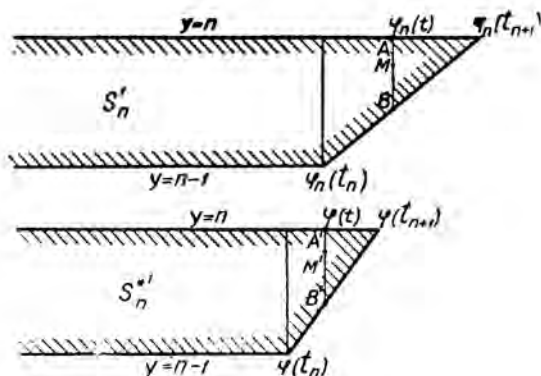
Каждую полуполосу  $S_n'$  преобразуем  $Q$ -квазиконформно\*) в аналогичную полуполосу  $S_n''$ , ограниченную справа отрезком, соединяющим точки  $(\varphi(t_n), n-1)$ ,  $(\varphi(t_{n+1}), n)$ . Для этого вертикальным сечением  $S_n'$  с абсциссами  $\varphi_n(t)$  поставим в соответствие вертикальные сечения  $S_n''$  с абсциссами  $\varphi(t)$ , подвергая последние подходящему сжатию или растяжению (это может оказаться необходимым только для  $t_n < t < t_{n+1}$ , ибо для  $t \leq t_n$  все сечения равны 1). Коэффициент такого сжатия-растяжения для данного  $t$  равен отношению (фиг. 1)

$$\frac{\varphi_n(t_{n+1}) - \varphi_n(t_n)}{\varphi(t_{n+1}) - \varphi(t_n)} \cdot \frac{\varphi_n(t_{n+1}) - \varphi_n(t)}{\varphi(t_{n+1}) - \varphi(t)},$$

откуда, применяя теорему Коши и вспоминая (5), (10), заключаем, что это отношение не превосходит  $\lambda$ . Из тех же соотношений следует, что переход от абсциссы  $\varphi_n(t)$  к абсциссе  $\varphi(t)$  представляет квазиконформное преобразование с характеристикой, не превосходя-

\*) Так мы назовем квазиконформные преобразования с ограниченной характеристикой.

шей  $\lambda$ . Отсюда следует, что указанное преобразование  $S'_n$  в  $S_n^*$  есть квазиконформное преобразование с характеристикой, не превосходящей  $\lambda^2$ .



Фиг. 1.

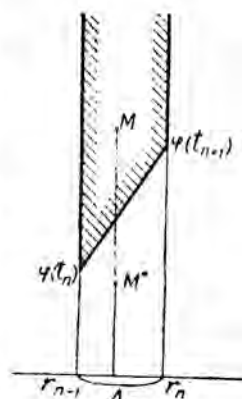
В результате указанных преобразований полуполос  $S'_n$  происходит  $Q$ -квазиконформное их склеивание. Область склеивания  $G^*$ , состоящую из полуполос  $S_n^*$ , отобразим  $Q$ -квазиконформно на верхнюю полуплоскость  $H^*$  так, чтобы не изменилась горизонтальная часть ее границы и каждый граничный ее отрезок испытал равномерное сжатие. Чтобы построить такое преобразование, достаточно вертикальные полуполосы, опирающиеся на указанные отрезки, преобразовать с сохранением длин на боковых сторонах и с равномерным сжатием на граничных отрезках в вертикальные полосы в  $H^*$ , опирающиеся соответственно на проекции указанных отрезков на действительную ось, проекции, которые совпадают с отрезками  $\Delta_n$  (фиг. 2). Для характеристики этих преобразований легко получаем

$$p_n + \frac{1}{p_n} = 2 + \frac{1}{\Delta_n^2},$$

откуда следует равномерная ограниченность  $p_n$ , ибо в силу (8) и (13)

$$\Delta_n > \Delta_1 = f(t_0) - \varphi(t_0) > 0.$$

Из (7) и (8) следует, что полуплоскости  $H$  и  $H^*$  можно считать  $Q$ -квазиконформно склеенными вдоль отрицательной действительной полуоси. Чтобы построить такое склеивание, обозначим через  $\tau_0$  такое значение  $t$ , что  $f(\tau_0) = 0$ , затем вертикали, выходящие из точек  $\varphi(t)$  для всех значений  $t < \tau_0$ , переместим, без изменения ординат, в вертикали, выходящие соответственно из точек  $f(t)$ , и вертикальную полуполосу из  $H^*$ , опираю-

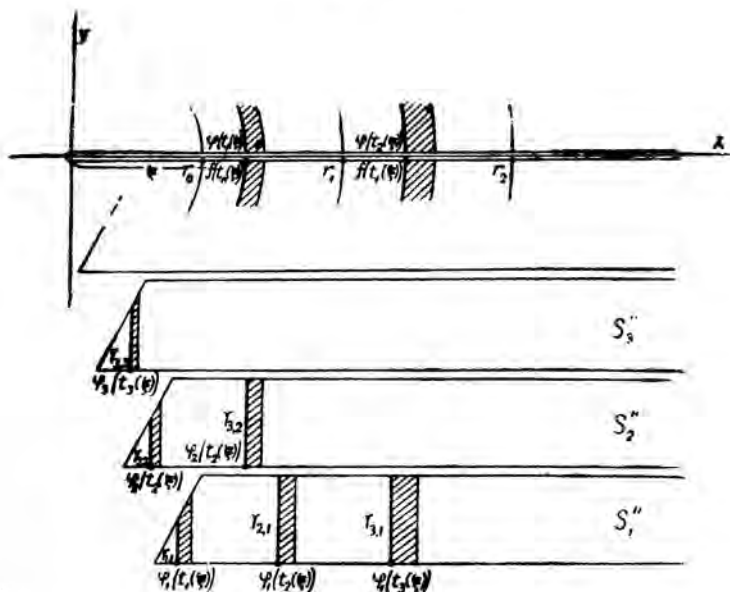


Фиг. 2.



Чтобы применить упомянутый выше признак гиперболического типа, нам нужно оценить интеграл:

$$\int_{P_\xi} \frac{d\xi}{dv} d\lambda, \quad (16)$$



Фиг. 3.

где  $d\lambda$  — элемент дуги линии  $P_\xi$  и  $dv$  — элемент нормали к ней. Так как кольца между окружностями  $C_n(\xi)$  и  $C_n(\xi + d\xi)$  имеют ширину  $dr_n(\xi)$  и длину  $2\pi r_n(\xi)$ , то соответствующая часть интеграла (16) равна

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{C_n(\xi)} \frac{d\xi}{dv} d\lambda = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_n(\xi)}{r'_n(\xi)}.$$

Ширина столбика, примыкающего к произвольному отрезку  $\gamma_{n,n}(\xi)$ , равна  $d\varphi_s[t_n(\xi)]$ , следовательно, в силу (5) не меньше, чем  $d\varphi[t_n(\xi)] = dr_{n-1}(\xi)$ ; длина же такого столбика равна 1 для  $s < n$  и меньше 1 для  $s = n$ . Поэтому для соответствующей части интеграла (16) имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \int_{\gamma_{n,n}(s)} \frac{d\xi}{dv} d\lambda < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{r'_{n-1}(\xi)}.$$

Из полученных оценок следует, что

$$\int_{P_\xi} \frac{d\xi}{dv} d\lambda \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1+2\pi r_n(\xi)}{r'_n(\xi)}$$

Так как очевидно

$$r_{n+1}(\xi) = \psi[r_n(\xi)]$$

то, как в конце п. 2 при выводе (14) убеждаемся, что величина  $r_n(\xi)$  растет не медленнее, чем  $O(1) \cdot n$ , поэтому последний ряд сходится и расходится одновременно с рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_n(\xi)}{r'_n(\xi)}. \quad (17)$$

На основании указанного признака гиперболического типа сходимость ряда (17) является достаточным признаком для гиперболического типа склеивания бесконечного числа полос  $\{S_n\}$  с полуплоскостью  $H$ . Но это же условие является достаточным для гиперболического типа склеивания полуплоскостей  $H$  и  $H^*$  (см. [2], п. 16). Таким образом, мы доказали следующую теорему:

*Если функции  $f(t)$ ,  $\{\varphi_n(t)\}$  и  $\varphi(t)$ , определяющие задачи на основании полуплоскости  $H$  с бесконечным числом полос  $\{S_n\}$ , соответственно с полуплоскостью  $H^*$ , обладают указанными выше дифференциальными свойствами и удовлетворяют четырем условиям п. 2, то склеивание в обеих задачах одновременно гиперболического типа, если сходится ряд (17), члены которого определяются соотношениями (15).*

Примечание 1. В частности ряд (17) сходится, если, начиная с некоторого значения  $t$ , выполняется соотношение

$$\frac{[\ln \varphi(t)]'}{[\ln f(t)]'} > q - 1. \quad (18)$$

Примечание 2. Интересно было бы указать общие условия, обеспечивающие склеивание в обеих вышерассмотренных задачах одного и того же типа независимо от признака, по которому устанавливается тип склеивания полуплоскостей  $H$  и  $H^*$ .

6. Поверхности гиперболического типа. Пусть  $R_1$  поверхность функции  $\sqrt[n]{1-w}$ , на одном из листов которой проведен разрез вдоль отрицательной действительной полуоси от 0 до  $-\infty$ . Склеим бесконечно много таких поверхностей  $R_1, R_2, \dots, R_k, \dots$  так, как склеиваются листы при построении функции  $\ln w$  и к остающемуся свободному краю разреза на  $R_1$  приклеим логарифмический конец, представляющий „половину“ поверхности  $\ln w^k$ . Полученную поверхность обозначим через  $F_{n_1, n_2, \dots}$ .

Отображая поверхности  $R_{nk}$  ( $k=1, 2, \dots$ ) с разрезами посредством функций

$$z_k(w) = \ln \left( n_k \sqrt[n_k]{1-w} \right)$$

соответственно на полосы  $S_k$ :

$$2\pi(k-1) < y < 2\pi k,$$

расположенные в плоскости  $z = x + iy$ , и отображая логарифмический конец, входящий в  $F_{n_1, n_2, \dots}$ , на полуплоскость  $H: y < 0$  посредством функции  $z(w) = \ln w$ , мы приходим к задаче на склеивание бесконечного числа полос  $\{S_k\}$  ( $k=1, 2, \dots$ ) с полуплоскостью  $H$ , с функциями

склеивания, определяемыми уравнениями (возвращаясь к обозначениям п. 1)

$$\begin{aligned} \varphi_k(t) &= \ln \left( n_k \sqrt[n_k]{1+t-1} \right), \\ f(t) &= \ln t, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $t$  означает расстояние от  $w=0$  до точки, пробегающей отрицательную действительную полуось.

При  $n_k \rightarrow \infty$  последовательность функций  $\{\varphi_k(t)\}$  сходится к функции

$$\varphi(t) = \ln \ln(1+t).$$

Этому предельному переходу соответствует предельный переход поверхностей  $F_{n_1, n_2, \dots}$  к поверхности, обозначим ее через  $F$ , которая строится подобно  $F_{n_1, n_2, \dots}$ , только из последовательности поверхностей функции  $\ln(1-w)$ , имеющих такой же разрез, как раньше поверхности  $F_{n_k}$ , и того же логарифмического конца, что и раньше.

Элементарный анализ показывает, что функция (19) и (20) при достаточно быстром монотонном возрастании последовательности  $\{n_k\}$  удовлетворяют всем условиям пп. 1, 2 и примечания 1 к п. 5. Поэтому на основании вышесказанной теоремы заключаем, что  $F$  — гиперболического типа (относительно этого примера см. [2]), а вместе с ней и все поверхности  $F_{n_1, n_2, \dots}$ , для которых последовательности  $\{n_k\}$  растут монотонно и достаточно быстро\*).

Подвергая такую поверхность  $F_{n_1, n_2, \dots}$  гиперболического типа преобразованию  $w' = \frac{1}{1-w}$ , получаем пример поверхности гиперболического типа, имеющей две логарифмические точки ветвления, расположенные соответственно над точками 0, 1 и бесконечно много алгебраических точек ветвления в  $\infty$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Волковьский, К проблеме типа односвязной римановой поверхности. Математический сборник 18 (60), 2 (1946), 185—212.

2. Л. Волковьский, К проблеме типа односвязной римановой поверхности. Украинский математический журнал, т. 1 (1949).

\* ) Скорость роста последовательности  $\{n_k\}$  определяется из условия (10), которое выполняется для  $n_k$ , имеющих рост порядка