Влияние упругого кольца, впаянного в криволинейное отверстие, на однородно напряженное плоское поле

М. П. Шереметьев (Львов)

В данной работе рассматривается частный случай, когда область кольца и пластинки отображается на внешность круга функции $w(z) = A\left(\zeta + \frac{m}{\zeta^n}\right)$. Граничные условия на контуре спая

$$X_n = X_{n1};\quad Y_n = Y_{n1};\quad u + iv = u_1 + iv_1.$$

Это равносильно

$$\overline{\varphi^0(t)} + t\overline{\varphi^{0\prime}(t)} + \overline{\psi^0(t)} = \overline{\varphi_1^0(t)} + t\overline{\varphi_1^{0\prime}(t)} + \overline{\psi_1^0(t)},$$

$$\frac{\varkappa}{\mu}\varphi_0(t) - \frac{1}{\mu}\left[\overline{t\varphi^{0\prime}(t)} + \overline{\psi^0(t)}\right] = \frac{\varkappa_1}{\mu_1}\overline{\varphi_1^0(t)} - \frac{1}{\mu_1}\left[t\overline{\varphi_1^{0\prime}(t)} + \overline{\psi_1^0(t)}\right],$$

где t точка контура.

Отображения будем делать так, чтобы контур спая перешел бы на единичный круг, а внутренний контур кольца — на круг радиуса $R_1 < 1$.

Таким образом, кольцо будет отображено на круговое кольцо радиуса R_1, 1, а пластинка на внешность единичного круга. В результате преобразования контурные условия примут следующий вид

$$\varphi\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\varphi'(\sigma) + \varphi(\sigma) = \varphi_1\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\varphi_1'(\sigma) + \psi_1(\sigma), \tag{1.1}$$

$$\frac{\varkappa}{\mu}\varphi\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \frac{1}{\mu}\left\{\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\varphi'(\sigma) + \psi(\sigma)\right\} = \frac{\varkappa_1}{\mu_1}\varphi_1\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \frac{1}{\mu_1}\left\{\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\varphi'(\sigma) + \psi_1(\sigma)\right\},$$

где σ точка на γ.

Кроме этого, к этим условиям нужно присоединить условия на внутреннем контуре кольца, которое мы напишем несколько ниже. Функции φ_1 и ψ_1 представим как сумму двух функций

$$\varphi_1(\zeta) = P_1(\zeta) + P_2(\zeta),\quad \psi_1(\zeta) = Q_1(\zeta) + Q_2(\zeta).$$

Функции $P_1(\zeta)$ и $Q(\zeta)$ голоморфные функции внутри единичного круга, а функции Q_2 и P_2 вне круга радиуса R_1, включая и бесконечно удаленную точку, $Q_2(\infty) = P_2(\infty) = 0$.

$$\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}} = \frac{\sigma(1 + \beta\sigma^{n+1})}{\sigma^{n+1} - \beta n}.$$

Подставим в граничные условия (1.1) выражение $\frac{\bar{\omega}(\bar{\sigma})}{\omega'(\sigma)}$, получим

$$\bar{\varphi}\left(\frac{1}{\sigma}\right)+\frac{\sigma^{n}(1+\beta\sigma^{n+1})}{\sigma^{n+1}-n\beta}\varphi'(\sigma)+\psi(\sigma)=\bar{\varphi}_1\left(\frac{1}{\sigma}\right)+$$

$$+\frac{\sigma^{n}(1+\beta\sigma^{n+1})}{\sigma^{n+1}-n\beta}\varphi_1'(\sigma)+\psi_1(\sigma),$$

$$\frac{\varkappa}{\mu}\bar{\varphi}\left(\frac{1}{\sigma}\right)-\frac{1}{\mu}\left\{\frac{\sigma^{n}(1+\beta\sigma^{n+1})}{\sigma^{n+1}-n\beta}\varphi'(\sigma)+\psi(\sigma)\right\}=$$

$$=\frac{\varkappa_1}{\mu'}\bar{\varphi}_1\left(\frac{1}{\sigma}\right)-\frac{1}{\mu_1}\left\{\frac{\sigma^{n}(1+\beta\sigma^{n+1})}{\sigma^{n+1}-n\beta}\varphi_1'(\sigma)+\psi_1(\sigma)\right\}. \tag{1.2}$$

Функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ положим равными

$$\varphi(\zeta)=\frac{Rp}{4}\zeta+\varphi_0(\zeta);\quad \psi(\zeta)=-\frac{Rp}{2}\zeta+\psi_0(\zeta),$$

где функции $\varphi_0(\zeta)$, $\psi_0(\zeta)$ голоморфные функции вне круга радиуса R_1 и $\varphi(\infty)+0$. Это равносильно тому, что на бесконечности

$$X_{x\infty}=p;\quad X_{y\infty}=0;\quad Y_{y\infty}=0.$$

Принимая во внимание значение функций φ, ψ, φ_1, ψ_1, преобразуем граничные условия (1.2) к следующему виду:

$$\bar{\varphi}_0\left(\frac{1}{\sigma}\right)+\frac{\sigma^{n}(1+\beta\sigma^{n+1})}{\sigma^{n+1}-n\beta}\varphi_0'(\sigma)+\psi_0(\sigma)+\frac{Rp}{4}\frac{1}{\sigma}+\frac{Rp}{4}\frac{\sigma^{n}(1+\beta\sigma^{n+1})}{\sigma^{n+1}-n\beta}-\frac{Rp}{2}\sigma=$$

$$=\bar{P}_1\left(\frac{1}{\sigma}\right)+\frac{\sigma^{n}(1+\beta\sigma^{n+1})}{\sigma^{n+1}-n\beta}P_1'(\sigma)+Q_1(\sigma)+\bar{P}_2\left(\frac{1}{\sigma}\right)+$$

$$+\frac{\sigma^{n}(1+\beta\sigma^{n+1})}{\sigma^{n+1}-n\beta}P_2'(\sigma)+Q_2(\sigma);$$

$$\frac{\varkappa}{\mu}\bar{\varphi}_0\left(\frac{1}{\sigma}\right)-\frac{1}{\mu}\left\{\frac{\sigma^{n}(1+\beta\sigma^{n+1})}{\sigma^{n+1}-n\beta}\varphi_0'(\sigma)+\varphi_0(\sigma)\right\}+$$

$$+\frac{\varkappa}{\mu}\frac{Rp}{4}\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\mu}\frac{Rp}{4}\frac{\sigma^{n}(1+\beta\sigma^{n+1})}{\sigma^{n+1}-n\beta}+\frac{1}{\mu}\frac{Rp}{2}\sigma=\frac{\varkappa_1}{\mu_1}\bar{P}_1\left(\frac{1}{\sigma}\right)-$$

$$-\frac{1}{\mu_1}\left\{\frac{\sigma^{n}(1+\beta\sigma^{n+1})}{\sigma^{n+1}-n\beta}P_1'(\sigma)+Q(\sigma)\right\}+\frac{\varkappa_1}{\mu_1}P_2\left(\frac{1}{\sigma}\right)-$$

$$-\frac{1}{\mu_1}\left\{\frac{\sigma^{n}(1+\beta\sigma^{n+1})}{\sigma^{n+1}-n\beta}P_2'(\sigma)+Q_2\right\}; \tag{1.3}$$

Умножим (1.3) на $\frac{1}{2\pi i}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$ и проинтегрируем обе части этих равенств. Если $|\zeta|>1$, то в результате интегрирования будем иметь

$$\frac{\zeta^n(1+\beta\zeta^{n+1})}{\zeta^{n+1}-n\beta}\varphi_0'(\zeta)-\beta\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu a_\nu\zeta^{n-(\nu+1)}-\psi_0(\zeta)+b_0-\frac{Rp}{4}\frac{1}{\zeta}$$

$$-\frac{Rp}{4}\frac{(1+n\beta^2)\zeta^n}{\zeta^{n+1}-n\beta}=-P_1\left(\frac{1}{\zeta}\right)+C_0-\frac{1+\beta^2n}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{P_1'(\alpha_k)}{\zeta-\alpha_k}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\sigma^n(1+\beta\sigma^{n+1})}{\sigma^{n+1}-n\beta}P_2(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}-Q_2(\zeta);$$

$$\frac{1}{\mu}\left\{\frac{\zeta^n(1+\beta\zeta^{n+1})}{\zeta^{n+1}-n\beta}\varphi_0'(\zeta)+\psi_0(\zeta)\right\}+\frac{1}{\mu}\beta\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu a_\nu\zeta^{n-\nu+1}-\frac{1}{\mu}b_0-\frac{\varkappa}{\mu}\frac{Rp}{4}\frac{1}{\zeta}$$

$$-\frac{1}{\mu}\frac{Rp}{4}\frac{(1+n\beta^2)\zeta^n}{\zeta^{n+1}-n\beta}=-\frac{\varkappa_1}{\mu_1}P_1\left(\frac{1}{\zeta}\right)+\frac{\varkappa_1}{\mu_1}C_0+\frac{1}{\mu_1}\frac{1+\beta^2n}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{P_1'(\alpha_k)}{\zeta-\alpha_k}-$$

$$-\frac{1}{\mu_1}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\sigma^n(1+\beta\sigma^{n+1})}{\sigma^{n+1}-n\beta}\frac{P_2'(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}+\frac{1}{\mu_1}Q_2(\zeta). \tag{1.4}$$

Если же $|\zeta|<1$, то в результате интегрирования получим еще два соотношения:

$$\varphi_0\left(\frac{1}{\zeta}\right)-\beta\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu a_\nu\zeta^{n-\nu+1}+b_0+\frac{Rp}{4}\beta\zeta^n-\frac{Rp}{2}\zeta=\bar c_0+\frac{\zeta^n(1+\beta\zeta^{n+1})}{\zeta^{n+1}-n\beta}P_1'(\zeta)-$$

$$-\frac{1+\beta^2n}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{P_1'(\alpha_k)}{\zeta-\alpha_k}+Q(\zeta)+\frac{1}{\mu_1}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\sigma^n(1+\beta\sigma^{n+1})}{\sigma^{n+1}-n\beta}\frac{P_2'(\sigma)\,d(\sigma)}{\sigma-\zeta}+P_2\left(\frac{1}{\zeta}\right);$$

$$\frac{\varkappa}{\mu}\varphi_0\left(\frac{1}{\zeta}\right)+\frac{1}{\mu}\beta\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu a_\nu\zeta^{n-\nu+1}-\frac{1}{\mu}b_0-\frac{1}{\mu}\frac{Rp}{4}\beta\zeta^n+\frac{1}{\mu}\frac{Rp}{2}\zeta=$$

$$=\frac{\varkappa_1}{\mu_1}c_0-\frac{1}{\mu_1}\left\{\frac{\zeta^n(1+\beta\zeta^{n+1})}{\zeta^{n+1}-n\beta}P_1'(\zeta)-\frac{1+\beta^2n}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{P_1'(\alpha_k)}{\zeta-\alpha_k}\right\}$$

$$-\frac{1}{\mu_1}Q_1(\zeta)+\frac{\varkappa_1}{\mu_1}P_2\left(\frac{1}{\zeta}\right)-\frac{1}{\mu_1}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\sigma^n(1+\beta\sigma^{n+1})}{\sigma^{n+1}-n\beta}\frac{P_2'(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}, \tag{1.5}$$

где обозначено a_ν, b_ν, c_ν коэфициенты функций φ_0, ψ_0, P_1, а α_k корни знаменателя, $\alpha_k=\sqrt[n+1]{n\beta}\left(\cos\frac{2k\pi}{n+1}+i\sin\frac{2k\pi}{n+1}\right)$, $k=0, 1, \ldots, n$.

Решим полученные уравнения относительно функций P_1, P_2, Q и Q_2. Для этой цели умножим первое на $\frac{1}{\mu_1}$ и сложим со вторым. Если в полученном результате положить $\zeta=\frac{1}{\zeta}$ и взять сопряженное значение, предварительно поделив обе части равенства на $-\frac{\varkappa_1+1}{\mu\mu_1}$, то найдем выражение для функции $P_1(\zeta)$ через функции φ_0, ψ_0.

$$P_1(z) = \frac{\varkappa\mu_1+\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}\zeta - \frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}\frac{(1+n\beta^2)\zeta}{1-n\beta\zeta^{n+1}} -$$

$$-\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\left\{\beta\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu a_\nu\zeta^{-n+(\nu+1)} - \bar{b}_0\right\} -$$

$$\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\left\{\frac{\zeta^{n+1}+\beta}{\zeta^n(1-n\beta\zeta^{n+1})}\varphi_0'\left(\frac{1}{\zeta}\right)+\psi_0\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right\}+c_0; \tag{1.6}$$

из этих же уравнений определим так же и функцию $Q_2(\zeta)$:

$$Q_2(\zeta) = \frac{Rp}{4}\frac{\varkappa_1\mu-\varkappa\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{1}{\zeta} + \frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}\frac{(1+n\beta^2)\zeta^n}{\zeta^{n+1}-n\beta} +$$

$$+\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\left\{\frac{\zeta^n(1+\beta\zeta^{n+1})}{\zeta^{n+1}-n\beta}\varphi_0'(\zeta)+\psi_0(\zeta)+\beta\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu a_\nu\zeta^{n-(\nu+1)}-b_0\right\}+$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\sigma^n(1+\beta\sigma^{n+1})P_2'(\sigma)\,d\sigma}{(\sigma^{n+1}-n\beta)(\sigma-\zeta)} - \frac{1+\beta^2 n}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{P_1'(\alpha_k)}{\zeta-\alpha_k}. \tag{1.7}$$

Из второй группы, уравнений, т. е. из уравнений (1.5) определяются функции P_2 и Q_1.

$$P_2(\zeta) = \frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\left\{\beta\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu a_\nu\zeta^{-n+(\nu+1)} - \frac{Rp}{4}\beta\zeta^{-n}+\frac{Rp}{2}\zeta^{-1}-\bar{b}_0\right\}+$$

$$+\frac{\varkappa\mu_1+\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\varphi_0(\zeta) - c_0; \tag{1.8}$$

$$Q_1(\zeta) = \frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}\beta\zeta^n - \frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{2}\zeta -$$

$$-\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\beta\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu a_\nu\zeta^{n-(\nu+1)} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\sigma^n(1+\beta\sigma^{n+1})}{\sigma^{n+1}-n\beta}\frac{P_2'(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}+$$

$$\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}b_0 - \frac{\zeta^n(1+\beta\zeta^{n+1})}{\zeta^{n+1}-n\beta}P_1'(\zeta)+$$

$$+\frac{1+\beta^2 n}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{P_1'(\alpha_k)}{\zeta-\alpha_k}+\frac{\varkappa_1\mu-\varkappa\mu_1}{\mu(\varkappa_1-1)}\bar{\varphi}_0\left(\frac{1}{\zeta}\right). \tag{1.9}$$

Возьмем теперь исходные уравнения (1.3), умножим их на $\frac{1}{2\pi i}\frac{d\sigma}{\sigma}$ и проинтегрируем оба по единичной окружности, получим два соотношения между свободными членами введенных нами функций

$$-\beta(n-1)a_{n-1}+b_0=c_0+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\sigma^n(1+\beta\sigma^{n+1})}{\sigma^{n+1}-n\beta}P_1'(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma}+l_0-\beta(n-1)d_{n-1}, \tag{1.10}$$

$$\frac{\beta}{\mu}(n-1)a_{n-1}-\frac{b_0}{\mu}=$$
$$=\frac{\varkappa_1}{\mu_1}c_0-\frac{1}{\mu_1}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\sigma^n(1+\beta\sigma^{n+1})}{\sigma^{n+1}-n\beta}P_1'(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma}-\frac{1}{\mu_1}l_0+\frac{\beta}{\mu_1}(n-1)d_{n-1},$$

где a_{n-1}, b_0, c_0, d_{n-1}, l_0 коэфициенты функций φ_0, ψ_0, P_1, P_2, Q_1.

Что касается входящего в эти равенства интеграла, то его можно представить

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\sigma^n(1+\beta\sigma^{n+1})P_1'(\sigma)}{\sigma^{n+1}-n\beta}\frac{d\sigma}{\sigma}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\beta\sigma^n P_1'(\sigma)}{\sigma}d\sigma+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{(1+n\beta^2)\sigma^n}{\sigma^{n+1}-n\beta}\frac{P_1'(\sigma)}{\sigma}d\sigma=\frac{1+n\beta^2}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{P_1'(\alpha_k)}{\alpha_k}. \tag{1.11}$$

Уравнения (1.10) после подстановки в них вычисленного значения интеграла, примут вид

$$-\beta(n-1)a_{n-1}+b_0=c_0+\frac{1+n\beta^2}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{P_1'(\alpha_k)}{\alpha_k}+l_0-\beta(n-1)d_{n-1};$$
$$\frac{\beta}{\mu}(n-1)a_{n-1}-\frac{b_0}{\mu}=\frac{\varkappa_1}{\mu_1}c_0-\frac{1}{\mu_1}\frac{1+np^2}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{P_1'(\alpha_k)}{\alpha_k}-\frac{1}{\mu_1}l_0+\frac{\beta}{\beta_1}(n-1)d_{n-1}. \tag{1.12}$$

Из этих уравнений определяются коэфициенты l_0 и c_0. Подставим значение c_0 и c_0 в функции P_1 и P_2, получим

$$P_1(\zeta)=\frac{\varkappa\mu_1+\mu}{\mu_1(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}\zeta-\frac{Rp}{4}\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa+1)}\frac{(1+\beta^2 n)\zeta}{1-n\beta\zeta^{n+1}}-\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\beta\sum_{\nu=1}^{n-2}\nu a_\nu\zeta^{-n+\nu+1}-$$
$$-\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\left\{\frac{\zeta^{n+1}+\beta}{\zeta^n(1-n\beta\zeta^{n+1})}\varphi_0'\left(\frac{1}{\zeta}\right)+\psi_0\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right\}; \tag{1.13}$$

$$P_2(\zeta)=\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\left\{\beta\sum_{\nu=1}^{n-2}\nu a_\nu\zeta^{-n+(\nu+1)}-\right.$$
$$\left.-\frac{Rp}{4}\beta\zeta^{-n}+\frac{Rp}{2}\zeta^{-1}\right\}+\frac{\varkappa\mu_1+\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\varphi_0(\zeta). \tag{1.14}$$

Напишем граничные условия на внутреннем контуре кольца. Внутренний контур для простоты вычислений возьмем свободным от воздействия внешних сил, следовательно, на внутреннем контуре должно быть

$$\bar{\varphi}_1(\bar{\sigma}_1) + \frac{\bar{\omega}(\bar{\sigma}_1)}{\omega'(\sigma_1)} \varphi'_1(\sigma_1) + \psi_1(\sigma_1) = 0$$

или

$$P_1\left(\frac{R_1}{\sigma}\right) + \frac{(R_1^{n+1} + \beta\sigma^{n+1}) R_1 \sigma^n}{R_1^{n+1}\sigma^{n+1} - n\beta} P'_1(R, \sigma) + Q_1(R, \sigma) + \bar{P}_2\left(\frac{R}{\sigma}\right) +$$
$$+ \frac{(R_1^{n+1} + \beta\,\sigma^{n+1}) R_1 \sigma^n}{R_1^{n+1}\sigma^{n+1} - n\beta} P'_2(R, \sigma) + Q_2(R, \sigma) = 0. \qquad (1.15)$$

Проинтегрируем это граничное условие по γ, предварительно умножив его на $\frac{1}{2\pi i}\frac{d\sigma}{\sigma - \eta}$. Если $|\eta| > 1$, то результат интегрирования будет следующий:

$$-\bar{P}_1\left(\frac{R_1}{\eta}\right) + \bar{c}_0 - \frac{R_1^{2(n+1)} + \beta^2 n}{(n+1) R_1^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \frac{P'_1(\alpha_k)}{R_1\eta - \alpha_k} +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{(R_1^{n+1} + \beta\sigma^{n+1}) R_1 \sigma^n}{R_1^{n+1}\sigma^{n+1} - n\beta} P'_2(R_1 \sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \eta} - Q_2(R_1\eta) = 0. \qquad (1.16)$$

При $|\eta| < 1$ результат интегрирования даст второе условие для определения коэфициентов функций φ_0 и ψ_0.

$$\frac{(R_1^{n+1} + \beta\eta^{n+1}) R_1 \eta^n}{R_1^{n+1}\eta^{n+1} - n\beta} P'_1(R_1\eta) - \frac{R_1^{2(n+1)} + n\beta^2}{(n+1) R_1^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \frac{P'_1(\alpha_k)}{R_1\eta - \alpha_k} +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{(R_1^{n+1} + \beta\sigma^{n+1}) R_1 \sigma^n}{R_1^{n+1}\sigma^{n+1} - n\beta} P'_2(R_1\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \eta} + \bar{P}_2\left(\frac{R_1}{\eta}\right) + Q_1(R_1\eta) + \bar{c}_0 = 0. \quad (1.17)$$

Вычислим теперь входящий в выражение функций $Q_2(\zeta)$ и $Q_1(\zeta)$ интеграл $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{\sigma^n (1 + \beta\sigma^{n+1})}{\sigma^{n+1} - n\beta} \frac{P'_2(\sigma)\, d\sigma}{\sigma - \zeta} = J$. Если $|\zeta| > 1$, то

$$J = -\frac{\varkappa\mu_1 + \mu}{\mu(\varkappa_1 + 1)} \frac{\zeta^n (1 + \beta\zeta^{n+1})}{\zeta^{n+1} - n\beta} \varphi'_0(\zeta) - \frac{\varkappa\mu_1 - \mu}{\mu(\varkappa_1 + 1)} \beta \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu a_\nu \zeta^{n-(\nu+1)} -$$
$$- \frac{\mu_1 - \mu}{\mu(\varkappa_1 + 1)} \frac{(1 + n\beta^2)\zeta^n}{\zeta^{n+1} - n\beta} \beta \sum_{\nu=1}^{n-2} \nu(\nu + 1 - n) \bar{a}_\nu \zeta^{\nu - n} -$$
$$- \frac{Rp}{4} \frac{\mu_1 - \mu}{\mu(\varkappa_1 + 1)} \frac{n\beta(1 + \beta\zeta^{n+1})}{\zeta(\zeta^{n+1} - n\beta)} - \frac{Rp}{2} \frac{\mu_1 - \mu}{\mu(\varkappa_1 + 1)} \mathfrak{G}_{2n}(\zeta), \qquad (1.18)$$

где

$$\mathfrak{G}_{2n}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{\sigma^{n-2}(1 + \beta\sigma^{n+1})}{\sigma^{n+1} - n\beta} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}, \qquad (1.19)$$

Если же $|\zeta| < 1$, то

$$J = -\frac{\varkappa\mu_1+\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\beta\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu a_\nu\zeta^{n-(\nu+1)} + \frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\beta^2\sum_{\nu=1}^{n-2}\nu(\nu+1-n)\zeta^\nu a_\nu -$$

$$-\frac{Rp}{2}\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\mathfrak{G}_{1n}(\zeta), \tag{1.20}$$

где

$$\mathfrak{G}_{1n}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sigma^{n-2}(1+\beta\sigma^{n+1})}{\sigma^{n+1}-n\beta}\,\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}. \tag{1.21}$$

Функции Q_1 и Q_2, определяемые формулами (1.7) и (1.9), после подстановки в их выражения значения интеграла, взятого из (1.18), (1.20), определятся нижеследующими формулами:

$$Q_1(\zeta) = \frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}\beta\zeta^n - \frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{2}\zeta - \frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{2}\mathfrak{G}_{1n}(\zeta) + \frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}b_0 -$$

$$-\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\beta^2\sum_{\nu=1}^{n-2}\nu(\nu+1-n)\zeta^\nu a_\nu + \frac{(\varkappa_1-1)\mu-(\varkappa-1)\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\beta\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu a_\nu\zeta^{n-(\nu+1)} -$$

$$-\frac{\varkappa_1\mu-\varkappa\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\varphi_0\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \frac{\zeta^n(1+\beta\zeta^{n+1})}{\zeta^{n+1}-n\beta}P_1(\zeta) + \frac{1+n\beta^2}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{P_1(\alpha_k)}{\zeta-\alpha_k}; \tag{1.21}$$

$$Q_2(\zeta) = \frac{Rp}{4}\frac{\varkappa_1\mu-\varkappa\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{1}{\zeta} + \frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}\frac{(1+n\beta^2)\zeta^n}{\zeta^{n+1}-n\beta} -$$

$$-\frac{Rp}{4}\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{n\beta(1+\beta\zeta^{n+1})}{\zeta(\zeta^{n+1}-n\beta)} - \frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{2}\mathfrak{G}_{2n}(\zeta) +$$

$$+\frac{(\varkappa_1-1)\mu-(\varkappa-1)\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{\zeta^n(1+\beta\zeta^{n+1})}{\zeta^{n+1}-n\beta}\varphi_0'(\zeta) +$$

$$+\frac{(\varkappa_1-1)\mu-(\varkappa-1)\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\beta\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu a_\nu\zeta^{n-\nu+1} -$$

$$-\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{(1+n\beta^2)\zeta^n}{\zeta^{n+1}-n\beta}\beta^2\sum_{\nu=1}^{n-2}\nu(\nu+1-n)a_\nu\zeta^{\nu-n} +$$

$$+\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}[\varphi_0(\zeta)-b_0] - \frac{1+\beta^2 n}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{P_1'(\alpha_k)}{\zeta-\alpha_k}; \tag{1.22}$$

Интеграл, входящий в равенство (1.16) и (1.17), вычисляется так же легко. Его значение при $|\eta|>1$ будет следующее

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{(R_1^{n+1}+\beta\sigma^{n+1})R_1\sigma^n}{R_1^{n+1}\sigma^{n+1}-n\beta}\frac{R_2'(R,\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\eta}=$$

$$-\frac{\varkappa\mu_1+\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{(R_1^{n+1}+\beta\eta^{n+1})R_1\eta^n}{R_1^{n+1}\eta^{n+1}-n\beta}\varphi_0'(R_1\eta)-\frac{\varkappa\mu_1+\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\beta\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu a_\nu R_1^{-(n+\nu+1)}\eta^{n-(\nu+1)}-$$

$$\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{R_1^{2(n+1)}+n\beta^2}{R_1^n}\frac{\eta^n}{(R_1\eta)^{n+1}-n\beta}\beta\sum_{\nu=1}^{n-2}\nu(\nu+1-n)a_\nu R_1^{\nu-n}\eta^{\nu-n}-$$

$$-\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}\frac{(R_1^{n+1}+\beta\eta^{n+1})\beta n}{R_1^n\eta(R_1^{n+1}\eta^{n+1}-n\beta)}\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{2}\mathfrak{G}_{2n}^0(\eta),\qquad(1.23)$$

где

$$\mathfrak{G}_{2n}^0(\eta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{(R_1^{n+1}+\beta\sigma^{n+1})\sigma^{n-2}}{R_1(R_1^{n+1}\sigma^{n+1}-n\beta)}\frac{d\sigma}{\sigma-\eta}.\qquad(1.24)$$

Если же $|\eta|<1$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{(R_1^{n+1}+\beta\sigma^{n+1})R_1\sigma^n}{R_1^{n+1}\sigma^{n+1}-n\beta}\frac{P_2'(R,\sigma)}{\sigma-\eta}d\sigma=\frac{\varkappa\mu_1+\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\eta\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu a_\nu R_1^{-(n+\nu+1)}\eta^{n-(\nu+1)}+$$

$$\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\beta^2\sum_{\nu=1}^{n-2}\nu(\nu+1-n)a_\nu R_1^{\nu-2n}\eta^\nu-\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{2}\mathfrak{G}_{1n}^0(\eta),\qquad(1.25)$$

где $\mathfrak{G}_{1n}^0(\eta)$ определяется интегралом

$$\mathfrak{G}_{1n}^0=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{(R_1^{n+1}+\beta\sigma^{n+1})\sigma^{n-2}}{R_1(R_1^{n+1}\sigma^{n+1}-n\beta)}\frac{d\sigma}{\sigma-\eta}.\qquad(1.26)$$

Подставляя в равенство (1.17), (1.16) как значение входящего в эти равенства интеграла, определяемого формулами (1.25) и (1.23), так и значение функций Q_1, Q_2, P_1, P_2, взятых из (1.22), (1.21), (1.6) и (1.8), получим два эквивалентных граничному условию (1.16) соотношения.

Для $|\eta|>1$

$$\frac{(\varkappa_1-1)\mu-(\varkappa-1)\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{R_1^n\eta^n(1+\beta R_1^{n+1}\eta^{n+1})}{R_1^{n+1}\eta^{n+1}-n\beta}\varphi_0'(R_1\eta)+$$

$$-\frac{\varkappa\mu_1+\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{(R_1^{n+1}+\beta\eta^{n+1})R_1\eta^n}{R_1^{n+1}\eta^{n+1}-n\beta}\varphi_0'(R_1\eta)-\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{(R_1^{n+1}+\beta\eta^{n+1})\eta^n}{(\eta^{n+1}-n\beta R_1^{n+1})R_1^n}\varphi_0'\left(\frac{\eta}{R_1}\right)$$

$$+\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\psi_0(R_1\eta)\quad\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\psi_0\left(\frac{\eta}{R_1}\right)\quad b_0+$$

$$+\frac{(\varkappa_1-1)\mu-(\varkappa-1)\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\beta\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu a_\nu R_1^{n-(\nu+1)}\eta^{n-(\nu+1)}+$$

$$+\frac{\varkappa\mu_1+\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\beta\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu a_\nu R_1^{-(n+\nu+1)}\eta^{n-\nu+1}-\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\beta\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu a_\nu R_1^{\nu+1-n}\eta^{n-(\nu+1)}+$$

$$+\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{n\beta^2(1-R_1^{2n})-R_1^{2n}(1+R_1^2)}{R_1^n}\frac{\eta^n}{R_1^{n+1}\eta^{n+1}-n\beta}\beta^2\cdot$$

$$\cdot\sum_{\nu=1}^{n-2}\nu(\nu+1-n)a_\nu R_1^{\nu-n}\eta^{\nu-n}=\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{2}\{\mathfrak{G}_{2n}(R_1\eta)-\mathfrak{G}^0_{2n}(\eta)\}-$$

$$-\frac{n\beta^2(1-R_1^{2n})-R_1^{2n}(1-R_1^2)}{R_1^{2n}(1+n)}\sum_{k=0}^{n}\frac{P_1'(\alpha_k)}{R_1\eta-\alpha_k}-$$

$$-\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\cdot\frac{Rp}{4}\frac{\{\beta\eta^{n+1}(1-R_1^{2n})-R_1^{n-1}(1-R_1^2)\}n\beta}{R_1^n\eta(R_1^{n+1}\eta^{n+1}-n\beta)}-$$

$$-\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}\frac{(1+n\beta^2)R_1^n\eta^n}{R_1^{n+1}\eta^{n+1}-n\beta}+\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}\frac{(1+n\beta^2)R_1\eta^n}{\eta^{n+1}-n\beta R_1^{n+1}}-$$

$$-\frac{\varkappa\mu_1+\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}\frac{R_1}{\eta}-\frac{\varkappa_1\mu-\mu_1\varkappa}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}\frac{1}{R_1\eta}. \tag{1.27}$$

И для $|\eta|\leqslant 1$

$$\frac{\varkappa_1\mu-\varkappa\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\varphi_0\left(\frac{1}{R_1\eta}\right)+\frac{\varkappa\mu_1+\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\varphi_0\left(\frac{R_1}{\eta}\right)+\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\beta\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu a_\nu R_1^{\nu+1-n}\eta^{n-\nu+1}-$$

$$-\frac{\varkappa\mu_1+\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\beta\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu a_\nu R_1^{-(n+\nu+1)}\eta^{n-\nu+1}-$$

$$-\frac{(\varkappa_1+1)\mu-(\varkappa+1)\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\beta\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu a_\nu R_1^{n-(\nu+1)}\eta^{n-(\nu+1)}-$$

$$-\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\beta^2\sum_{\nu=1}^{n-2}\nu(\nu+1-n)a_\nu(R_1^{\nu-2n}-R_1^\nu)\eta^\nu+$$

$$+\frac{\eta^n\{\beta R_1\eta^{n+1}(1-R_1^{2n})-(1-R_1^2)R_1^n\}P_1'(R_1\eta)}{R_1^{n+1}\eta^{n+1}-n\beta}+b_0-$$

$$-\frac{n\beta^2(1-R_1^{2n})-R_1^{2n}(1-R_1^2)}{R_1^{2n}(n+1)}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{P_1'(\alpha_k)}{R_1\eta-\alpha_k}=\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\left\{\frac{Rp}{4}\beta\frac{\eta^n}{R_1^n}-\frac{Rp}{2}\frac{\eta}{R_1}\right\}+$$

$$+\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}\{\mathfrak{G}^0_{1n}(\eta)-\mathfrak{G}_{1n}(R_1\eta)\}-\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}\beta R_1^n\eta^n+$$

$$+\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{2}R_1\eta=\frac{Rp}{2}\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\{\mathfrak{G}^0_{1n}(\eta)-\mathfrak{G}_{1n}(R_1\eta)\}+$$

$$+\frac{[(\mu_1-\mu)-(\varkappa_1\mu+\mu_1)R_1^{2n}]\beta}{\mu(\varkappa_1+1)}\cdot\frac{Rp}{4}\cdot\frac{\eta^n}{R_1^n}-\frac{[(\mu_1-\mu)-(\varkappa_1\mu+\mu_1)R_1^2]}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{2}\frac{\eta}{R_1}. \tag{1.28}$$

Легко видеть, что при изменении условий на бесконечности изменятся только правые части равенств (1.27), (1.28), левые же останутся без изменений.

Если разложим каждый член равенства (1.28) около нуля и сравним коэфициенты при одинаковых степенях η, то при изменении показателя η от нуля до $n-1$ из (1.28) получим систему n уравнений с n неизвестными, $n-1$ коэфициент функции φ_0 — $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ и b_0. Это будет потому, что член, содержащий функцию $P_1'(R_1\eta)$, в нуле имеет нуль n-го порядка, а следовательно, при изменении показателя η от 1 до $n-1$ коэфициенты функции $P_1(\zeta)$ в эти уравнения входить не будут. В равенстве же (1.28) коэфициенты функций $\psi_0(\zeta)$ входят только через функцию $P_1'(R_1\eta)$ (см. формулу 1.13).

При сравнении коэфициентов при степени η, равной n, получится уравнение, в котором, помимо коэфициента a_n, будет уже входить коэфициент b_1 функции ψ_0. При более высоких степенях η будут входить коэфициенты функции φ_0 и ψ_0 с большими индексами.

Таким образом, только в первых n уравнениях, полученных из (1.28), не будут входить, за исключением b_0, коэфициенты функции ψ_0. При решении этой системы, определятся все $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ и b_0.

Если теперь взять равенство (1.27) и разложить каждый его член около бесконечно удаленной точки, то уже в уравнении, полученном при сравнении коэфициентов при первой степени η, будут содержаться коэфициенты функции φ_0 от a_1 до a_n и коэфициент b_1 функции ψ_0. Вставляя в это уравнение значение коэфициентов функции φ_0 от a_1 до a_{n-1} включительно, определенных из первых n уравнений равенства (1.28), получим в конечном счете уравнение с двумя неизвестными коэфициентами a_n и b_1.

Присоединим к нему уравнение, полученное из (1.29) при сравнении коэфициентов при n-ой степени η, которая тоже будет содержать коэфициенты a_n и b_1. Коэфициенты с большими индексами функции φ_0, ψ_0 содержаться в этом уравнении не будут, коэфициенты же с меньшими индексами все уже определены. Таким образом, коэфициенты a_n и b_1 определятся при совместном решении этих двух уравнений.

Для определения a_{n+1} и b_2 придется решать опять два уравнения: одно, полученное из (1.28) при сравнении коэфициентов при второй степени η, а второе, полученное из (1.29) при сравнении коэфициентов η степени $n+1$ и т. д.

Таким путем можно определить такое число коэфициентов функции φ_0 и ψ_0, которое обеспечивает нужную точность при вычислениях. Пусть для этой цели нужно m коэфициентов функции φ_0 и l коэфициентов функций ψ_0, так что $a_{m+1} = b_{l+1} = 0$.

Все коэфициенты a_ν и b_s, $\nu = 1, 2, \ldots, m$; $s = 1, 2, \ldots, l$ определятся через неизвестные числа $P_1'(\alpha_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Общий вид выражений для a_ν и b_s будет следующий:

$$a_\nu = \delta_\nu + \sum_{m=0}^{n} \gamma_{\nu m} P'(\alpha_m); \qquad b_s = \delta_s' + \sum_{m=0}^{n} \gamma_{sm}' P'(\alpha_k),$$

где δ_ν, δ_ν', $\gamma_{\gamma m}$, γ_{sm}' известные числа.

Возьмем значение функций $P_1(\zeta)$ из (1.13) и заменим функции $\varphi_0\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ и $\psi_0\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ соответствующими рядами, удержав при этом l коэфициентов функции ψ_0 и m коэфициентов функции φ_0. В результате этого функция $P_1(\zeta)$ будет содержать $n+1$ неизвестных чисел $P_1'(\alpha_m)$. Продиференцировав полученное выражение для функции $P_1(\zeta)$ по ζ и подставив в $P_1'(\zeta)$, $\zeta=\alpha_m$, $m=0, 1, \ldots, n$, получим $n+1$ уравнение для определения $P_1'(\alpha_m)$. Если некоторые из чисел окажутся равными, то уравнений будет меньше.

Полученные значения $P_1'(\alpha)$ нужно подставить в выражения для коэфициентов функции φ_0 и ψ_0. Таким образом, все нужные нам коэфициенты функций φ_0 и ψ_0 и числа $P_1'(\alpha_m)$ будут определены с нужной при вычислении степенью точности. Зная числовые значения коэфициентов a_ν и b_s и $P_1'(\alpha_m)$, легко определить все коэфициенты введенных функций. И задача, таким образом, решена.

Если в равенстве (1.27) и (1.28) положить $\beta=m$, $n=1$, то получим условия, из которых определяются коэфициенты функций φ_0 и ψ_0 при решении задачи о растяжении бесконечной пластинки, с вязанным эллиптическим кольцом. Эти условия будут следующие.

При $|\tau_i|\geq 1$

$$\frac{(\varkappa_1-1)\mu-(\varkappa-1)\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{R_1\tau_i(1+mR_1^2\tau_i^2)}{R_1^2\tau_i^2-m}\varphi_0'(R_1\tau_i)+$$

$$+\frac{\varkappa\mu_1+\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{(R_1^2+m\tau_i^2)R_1\tau_i}{R_1^2\tau_i^2-m}\varphi_0'(R_1\tau_i)-\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{(R_1^2+m\tau_i^2)\tau_i}{(\tau_i^2-mR_1^2)R_1}\psi_0'\left(\frac{\tau_i}{R_1}\right)+$$

$$+\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\varphi_0(R_1\tau_i)-\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\psi_0\left(\frac{\tau_i}{R_1}\right)=$$

$$=\frac{(1-R_1^2)(R_1^2-m^2)}{R_1^2}\frac{R_1\tau_i}{R_1^2\tau_i^2-m}P_1'(\sqrt{m})+\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}\frac{(1+m^2)R_1\tau_i}{\tau_i^2-mR_1^2}+$$

$$+\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}(2-m)\frac{(1-R_1^2)(m\tau_i^2-1)}{R_1\tau_i(R_1^2\tau_i^2-m)}$$

$$-\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}\frac{(1+m^2)R_1\tau_i}{R_1^2\tau_i^2-m}-\frac{\varkappa\mu_1+\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}\frac{R_1}{\tau_i}-\frac{\varkappa_1\mu-\varkappa\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{1}{R_1\tau_i}.$$

При $|\tau_i|\leq 1$

$$\frac{\varkappa_1\mu-\varkappa\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\varphi_0\left(\frac{1}{R_1\tau_i}\right)+\frac{\varkappa\mu_1+\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\varphi_0\left(\frac{R_1}{\tau_i}\right)=$$

$$+\frac{(1+R_1^2)R_1\tau_i(m\tau_i^2-1)P_1'(R_1\tau_i)}{R_1^2\tau_i^2-m}+\frac{(1-R_1^2)}{R_1^2}\frac{(R_1^2-m^2)R_1\tau_i\cdot P_1'(\sqrt{m})}{R_1^2\tau_i^2-m}-$$

$$-\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}(m-2)\frac{\tau_i}{R_1}-\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}mR_1\tau_i+\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{2}R_1\tau_i\,*).$$

*) В статье [3] вкралась неточность, эта формула исправляет ее.

Ниже даны таблицы числовых значений напряжений в отдельных точках, расположенных как по контуру спая, так и по внутреннему контуру кольца при следующих данных: $m = 0{,}23560$, $R_1 = 0{,}68644$. При этом условии отношения $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 1{,}2$, где α_1 и α_2 соответствующие полуоси конфокальных эллипсов, ограничивающих кольцо.

Первая таблица составлена для случая, когда пластинка растягивается вдоль оси X, вторая, когда пластинка растягивается вдоль оси Y; упругие постоянные равны: $\mu_1 = 8{,}10 \cdot 10^5$, $\mu = 4{,}42 \cdot 10^5$; $\varkappa = \varkappa_1 = 2{,}08$.

Материал пластинки — медь; кольца — сталь.

Таблица 1

Растяжение вдоль оси OX

Градусы	В пластинке напряжение по контуру спая			В кольце: по контуру спая	В кольце: по свободному контуру
	$\widehat{\theta\theta}/P$	$\widehat{\varrho\varrho}/P$	$\widehat{\varrho\theta}/P$	$\widehat{\theta\theta}/P$	$\widehat{\theta\theta}/P$
0	0,234	0,618	−0,00000	0,250	−5,88
10	0,270	0,598	−0,399	0,342	−3,97
20	0,365	0,545	−0,646	0,556	−1,13
30	0,491	0,468	−0,712	0,792	0,672
40	0,621	0,382	−0,657	1,03	1,67
50	0,737	0,303	−0,548	1,26	2,23
60	0,823	0,243	−0,416	1,46	2,55
70	0,883	0,201	−0,277	1,52	2,72
80	0,919	0,175	−0,137	1,63	2,81
90	0,932	0,165	−0,00000	1,64	2,82

Таблица 2

Растяжение вдоль оси OY

Градусы	В пластинке напряжение по контуру спая			В кольце: по контуру спая	В кольце: по свободному контуру
	$\widehat{\theta\theta}/P$	$\widehat{\varrho\varrho}/P$	$\widehat{\varrho\theta}/P$	$\widehat{\theta\theta}/P$	$\widehat{\theta\theta}/P$
0	1,258	1,15	0,0000	2,01	10,4
10	1,22	1,01	0,656	1,99	7,70
20	1,11	0,719	1,01	1,89	3,77
30	0,896	0,461	1,06	1,52	1,34
40	0,653	0,289	0,950	1,13	0,0275
50	0,429	0,190	0,764	0,753	−0,714
60	0,246	0,141	0,562	0,411	−1,14
70	0,113	0,120	0,369	0,164	−1,38
80	0,0379	0,109	0,184	0,0435	−1,49
90	0,0142	0,104	0,00000	0,0144	−1,52

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Мусхелишвили, Некоторые задачи математической теории упругости, Изд-во АН СССР, 1935.

2. Г. Н. Савин, О некоторых контактных задачах теории упругости, Труды Тбилисского математического института, т. XIV, 1946.

3. М. П. Шереметьев, Розтяг безконечної пластинки з впаяним еліптичним кільцем. ДАН УРСР № 1, 1948.