Об общем решении в конечной форме линейных диференциальных уравнений

К. Я. Латышева

В 1885 г. появилась работа Альфана [1], трактующая о возможности представления общего решения уравнения

$$\sum_{s=0}^{n} P_s(x)\, y^{(n-s)} = 0, \tag{1}$$

где $P_s(x)$ — многочлены, в виде

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\alpha_i x} S_i(x), \tag{2}$$

где C_i — постоянные интегрирования, α_i — определенные постоянные, которые не должны быть все неравны, а функции $S_i(x)$ рациональны.

Ограничения, наложенные Альфаном, весьма суживают класс уравнений (1), для которых возможны общие решения вида (2). Дальнейшие обобщения [2] не облегчили главной трудности: неумения находить частные решения уравнения (1) в виде

$$e^{\alpha_i x} S_i(x). \tag{3}$$

В данной статье автор указывает условия, определяющие решения уравнения (1) вида (3); дает способ их нахождения для общего класса уравнений (1).

§ 1. Необходимое условие существования решения в конечной форме

Предположим, что показатели всех особых точек, к которым принадлежат решения линейного диференциального уравнения

$$\sum_{s=0}^{n} P_s(x)\, y^{(n-s)} = 0 \tag{4}$$

с полиномиальными коэфициентами

$$P_s(x) = \sum_{\mu=\pi_s}^{\beta_s} b_{s\mu} x^{\mu}$$

положительны. Подобное условие не является ограничением, ибо если имеется несколько полюсов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ с кратностями $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ на конечном расстоянии, то преобразование

$$y = \frac{z}{(x-a_1)^{\mu_1} \ldots (x-a_k)^{\mu_k}},$$

где z — новая неизвестная функция, сводит имеющееся уравнение к такому, показатели решений которого все положительны.

Приступим теперь к нахождению для данного уравнения необходимых и достаточных условий существования решений вида

$$y = e^{Q(x)} x^{\alpha} S(x),$$
$$Q(x) = \sum_{s=1}^{p} \frac{a_s x^s}{s}, \tag{5}$$

где $S(x)$ — многочлен некоторой степени. Начнем с нахождения необходимых условий; p — ранг уравнения (4).

Предположим, что степень многочлена $S(x)$ равна q (целое число или нуль) и перепишем (5) в двух видах:

$$1)\quad y = e^{Q(x)} x^{\alpha} (a_0 + a_1 x + \ldots + a_q x^q), \tag{6}$$

$$2)\quad y = e^{Q(x)} x^{\beta} \left(a_q + \frac{a_{q-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^q}\right), \tag{7}$$

где $a_0, \ldots a_q$ — некоторые постоянные, $a_0 \neq 0$; $a_q \neq 0$, $\beta = \alpha + q$.

Выражение решения в виде (7) показывает, что уравнение имеет нормальное (оборвавшееся на некотором члене) решение, причем β — один из показателей решения уравнения в окрестности точки $x = \infty$.

Таким образом, мы имеем:

Если уравнение (1) *имеет решение вида* (5), *где* $S(x)$ — *многочлен, то среди показателей* α *решений уравнения в окрестности точки* $x = 0$ *и показателей* β *решений в окрестности точки* $x = \infty$ *необходимо найдутся такие, для которых* $\beta - \alpha = q$ *степени многочлена* $S(x)$.

В дальнейшем для простоты рассуждений возьмем, что $\beta = \beta_1$ — наибольший из показателей решений в окрестности точки $x = \infty$, а $\alpha = \alpha_1$ — наименьший из показателей решений в окрестностях точки $x = 0$. При выводе этого необходимого условия мы не пользовались ни рангом, ни антирангом уравнения; следовательно, это необходимое условие существования решения уравнения в конечном виде годится для всех классов [3] уравнений.

Однако выведенное нами необходимое условие не является и достаточным.

§ 2. Размах коэфициентов уравнения

Чтобы понять, в чем дело, обратимся к рекуррентным уравнениям

$$\begin{gathered}
a_0 f_0(\alpha) = 0, \\
a_1 f_0(\alpha+1) + a_0 f_1(\alpha) = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_j f_0(\alpha+j) + \ldots + a_0 f_j(\alpha) = 0, \\
a_q f_0(\alpha+q) + a_{q-1} f_1(\alpha+q-1) + \ldots + a_0 f_q(\alpha) = 0, \\
a_{q+1} f_0(\alpha+q+1) + a_q f_1(\alpha+q) + \ldots + a_0 f_{q+1}(\alpha) = 0. \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered} \tag{8}$$

$$c_0\varphi_0(\beta)=0$$
$$c_1\varphi_0(\beta-1)+c_0\varphi_1(\beta)=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$c_\tau\varphi_0(\beta-\tau)+\ldots+c_0\varphi_\tau(\beta)=0, \tag{9}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$c_q\varphi_0(\beta-q)+c_{q-1}\varphi_1(\beta-q+1)+\ldots+c_0\varphi_q(\beta)=0,$$
$$c_{q+1}\varphi_0(\beta-q-1)+c_q\varphi_1(\beta-q)+\ldots+c_0\varphi_{q+1}(\beta)=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

из которых определяем коэфициенты a_μ и c_μ рядов

$$u=x^r\sum_{\mu=0}^{\infty}a_\mu x^\mu;$$
$$u=x^s\sum_{\mu=0}^{\infty}c_\mu x^{-\mu}, \tag{10}$$

которыми представлены решения в окрестности точки $x=0$ соответственно $x=\infty$ уравнения

$$\sum_{s=0}^{n}R_s(x)\frac{d^{n-s}u}{dx^{n-s}}=0, \tag{11}$$

в которое превратилось (1) после преобразования

$$y=u\exp Q(x). \tag{12}$$

Уравнение (11) предполагается для простоты рассуждений *уравнением наименьшего ранга.*

Существование решения вида (6) или, что то же самое, вида (7) требует, чтобы, во-первых, по крайней мере одна из систем (8) или (9) определила бы q коэфициентов a_i, поскольку

$$c_i=a_{q-i} \qquad (0\leqslant i\leqslant q); \tag{13}$$

во-вторых чтобы рекуррентные формулы (8) и (9) одновременно обрывались бы для рассматриваемых значений α и β. Вследствие (13) неопределенными коэфициентами могут быть как $a_q=c_0$, так и $a_0=c_q$, т. е. у нас возможны такие случаи:

$$1)\quad f_0(\alpha+q)=0,\qquad \varphi_0(\beta-q)\neq 0, \tag{14}$$
$$2)\quad f_0(\alpha+q)\neq 0,\qquad \varphi_0(\beta-q)=0, \tag{15}$$
$$3)\quad f_0(\alpha+q)=0,\qquad \varphi_0(\beta-q)\neq 0, \tag{16}$$
$$4)\quad f_0(\alpha+q)\neq 0,\qquad \varphi_0(\beta-q)=0. \tag{17}$$

Перед тем как исследовать эти случаи, рассмотрим более *подробно* рекуррентные формулы (8) и (9). Поскольку коэфициенты уравнения (1) — многочлены, то число слагаемых как в (8), так и в (9) не увеличивается до бесконечности. Обозначим наибольшее число слагаемых в рекуррентных формулах через $\nu+1$ и назовем его **размахом коэфициентов уравнения**. Число $\nu+1$ определяется очень просто по степеням коэфициентов уравнения, так как каждое произведение $y^{(i)}x^{s+i}$ относится к s'-ой рекуррентной формуле. Число различных s, имеющихся в уравнении, и дает $\nu+1$. Например, в уравнении

$$(1-x^2)\, y'' - xy' + 9y = 0$$

слагаемое y'' принадлежит к $s=-2$, x^2y'', xy', $9y$ принадлежат $s=0$. Следовательно, $\nu+1=3$; $(s=-2, -1, 0)$; $\nu=2$, или иначе ν есть степень характеристической функции

$$L(x^r) = x^{r-\nu} \sum_{s=0}^{\nu} f_s(r)\, x^s,$$

получающейся, после подстановки x^r вместо y в (1), r — неопределенно; функции $f_s(r)$ — те же, что в рекуррентных формулах (8).

Тогда рекуррентные формулы (8) имеют вид

$$\begin{gathered} a_0 f_0(\alpha) = 0, \\ a_1 f_0(\alpha+1) + a_0 f_1(\alpha) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_\nu f_0(\alpha+\nu) + \dots + a_0 f_\nu(\alpha) = 0, \\ a_{\nu+j} f_0(\alpha+\nu+j) + \dots + a_j f_\nu(\alpha+j) = 0 \quad (j=1, 2, \dots). \end{gathered} \tag{18}$$

Все

$$f_{\nu+j}(\gamma) \equiv 0 \qquad (j \geqslant 1). \tag{19}$$

Подобное имеем и для (9), причем

$$\varphi_{\nu+j}(\gamma) \equiv 0 \qquad (j \geqslant 1). \tag{20}$$

Пользуясь размахом $\nu+1$, получим соотношение между рекуррентными функциями φ и f. В (8) выражение $f_0(\alpha)$ — коэфициент при наинизшей степени x, а $f_\nu(\alpha)$ — многочлен, в который впервые входят наивысшие степени x коэфициентов уравнения. Подобное же рассуждение относительно (9) приводит к тождеству

$$f_{\nu-j}(\gamma) = \varphi_j(\gamma), \qquad (0 \leqslant j \leqslant \nu). \tag{21}$$

§ 3. Случай I

Приступим теперь к исследованию (14). Одновременный обрыв рекуррентных формул (8) и (9) для $\alpha=\alpha_1$ и $\beta=\beta_1=\alpha_1+q$ требует, чтобы тождественно на основании первых q строчек (8) и $(q+1)$ строчек (9) удовлетворялись бы равенства

$$a_{q-1} f_1(\alpha_1+q) + \dots + a_0 f_q(\alpha_1) = 0, \tag{22}$$

$$a_{q+j} f_0(\alpha_1+q+j) + \dots + a_0 f_{q+j}(\alpha_1) = 0 \tag{23}$$

$$(j=1, 2, \dots)$$

и одновременно

$$c_{q+j}\varphi_0(\beta_1-q-j)+\ldots+c_0\varphi_{q+j}(\beta_1)=0 \tag{24}$$
$$(j=1,\ 2,\ldots).$$

Предположим вначале, что $\nu\leqslant q$.

Воспользуемся (19): тогда от (22) и (23) останется

$$\begin{gathered} a_{q-1}f_1(\alpha_1+q-1)+\ldots+a_{q-\nu}f_\nu(\alpha_1+q-\nu)=0,\\ a_{q+j}f_0(\alpha_1+q+j)+\ldots+a_{q+j-\nu}f_\nu(\alpha_1+q+j-\nu)=0.\end{gathered} \tag{25}$$
$$(j=1,\ 2,\ldots).$$

Применим (21) и (13) к системе (25), получаем

$$\begin{gathered} c_1\varphi_{\nu-1}(\beta_1-1)+\ldots+c_\nu\varphi_0(\beta_1-\nu)=0,\\ a_{q+j}f_0(\alpha_1+q+j)+\ldots+a_{q+1}f_{j-1}(\alpha_1+q+1)+c_0\varphi_{\nu-j}(\beta_1)+\\ +c_1\varphi_{\nu-j-1}(\beta_1-1)+\ldots+c_{\nu-j}\varphi_0(\beta_1+j-\nu)=0 \qquad (j=1,\ 2,\ldots).\end{gathered} \tag{26}$$

Выпишем из всех строчек системы (26) члены с q:

$$\begin{gathered} c_1\varphi_{\nu-1}(\beta_1-1)+\ldots+c_\nu\varphi_0(\beta_1-\nu),\\ c_0\varphi_{\nu-1}(\beta_1)+c_1\varphi_{\nu-2}(\beta_1-1)+\ldots+c_{\nu-1}\varphi_0(\beta_1+1-\nu),\\ c_0\varphi_{\nu-2}(\beta_1)+c_1\varphi_{\nu-2}(\beta_1-1)+\ldots+c_{\nu-2}\varphi_0(\beta_1+2-\nu),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ c_0\varphi_0(\beta_1).\end{gathered} \tag{27}$$

Приняв во внимание, что по (14) и (21) $\varphi_\nu(\beta_1)=f_0(\alpha_1+q)=0$, видим, что каждая из строчек (27) равна 0 вследствие первых $\nu+1$ строчек (9), т. е. от (25) остается только

$$\begin{gathered} a_qf_0(\alpha_1+q)=0,\\ a_{q+1}f_0(\alpha_1+q+1)+a_qf_1(\alpha_1+q)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{gathered} \tag{28}$$

что является рекуррентными формулами относительно 2-го корня, определяющего уравнения показателей решений в окрестности $x=0$.

Применяя (13), (20), (21), (28) к системе (24), получаем

$$a_0f_{\nu-j}(\alpha_1)+\ldots+a_{\nu-j}f_0(\alpha_1+\nu-j)=0$$
$$(j=1,\ 2,\ldots,\nu),$$

что удовлетворяется вследствие (8), поскольку $\nu\leqslant q$.

Рассмотрим теперь случай; $\nu>q$ $(\nu\neq 1)$; пусть для определенности $\nu=q+\tau$ $(\tau\geqslant 1)$. Применяя (19) и (28), перепишем (22) и (23) так:

$$\begin{gathered} a_{q-1}f_1(\alpha_1+q-1)+\ldots+a_0f_q(\alpha_1)=0,\\ a_qf_1(\alpha_1+q)+\ldots+a_0f_{q+1}(\alpha_1)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_qf_\tau(\alpha_1+q)+\ldots+a_0f_\nu(\alpha_1)=0,\\ a_qf_{\tau+j}(\alpha_1+q)+\ldots+a_jf_\nu(\alpha_1+j)=0,\end{gathered} \tag{29}$$
$$(j=1,\ 2,\ldots).$$

Вследствие (13) и (21) система (29) перепишется:

$$c_1\varphi_{r-1}(\beta_1)+\ldots+c_q\varphi_{r-q}(\beta_1-q)=0$$
$$c_0\varphi_{r-1}(\beta_1)+\ldots+c_q\varphi_{r-q-1}(\beta_1-q)=0 \tag{30}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_0\varphi_q(\beta_1)+\ldots+c_q\varphi_0(\beta_1-q)=0$$
$$c_0\varphi_{q-1}(\beta_1)+\ldots+c_{q-1}\varphi_0(\beta_1-q+1)=0 \tag{31}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$c_0\varphi_0(\beta_1)=0.$$

Система (31) удовлетворяется сама собой на основании $(q+1)$ первых строчек (9). Что же касается системы (30), то она может удовлетворяться в общем случае только тогда, когда $c_{q+j}=0$ $(j=1, 2, \ldots)$, т. е. когда нет больше значения $\beta_2<\beta_1$ и отличающегося от β_1 на целое число (т. е. в частном случае, когда β_1 — единственный корень определяющего показатели решений в окрестности точки $x=\infty$ уравнения) или когда $\beta_2=\beta_1-q$.

Рассмотрим теперь случай $r=1$. Рекуррентные формулы (8) имеют здесь вид

$$a_0f_0(\alpha_1)=0$$
$$a_1f_0(\alpha_1+1)+a_0f_1(\alpha_1)=0,$$
$$a_2f_0(\alpha_1+2)+a_1f_1(\alpha_1+1)=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_qf_0(\alpha_1+q)+a_{q-1}f_1(\alpha_1+q-1)=0,$$
$$a_{q+1}f_0(\alpha_1+q+1)+a_qf_1(\alpha_1+q)=0.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Но, вследствие (21):

$$f_1(\alpha_1+q)=f_1(\beta_1)=\varphi_0(\beta_1)=0.$$

Отсюда, если $f_0(\alpha_1+q+1)\neq 0$, вытекает, что

$$a_{q+j}=0 \quad (j=1, 2, \ldots).$$

Из строчки

$$a_qf_0(\alpha_1+q)+a_{q-1}f_1(\alpha_1+q-1)=0,$$

вследствие равенства $\alpha_2=\alpha_1+q$, вытекает, если $f_1(\alpha_1+q-1)\neq 0$, что $a_{q-1}=0$ и т. д.

Если бы какое-либо $f_1(\alpha_1+j)=0$ $(0\leqslant j<q-1)$, то это значило бы, что решение является многочленом степени меньшей, нежели α_1+q, что невозможно. Следовательно, в этом случае приходится констатировать, что $a_0=a_1=\ldots=a_{q-1}=0$, и корень $\alpha_1=\beta_1-q$ не дает желаемого решения. Но поскольку здесь $\beta_1=\alpha_2$, уравнение имеет решение $y=x^{\alpha_2}=x^{\beta_1}$.

Следовательно: А. Если

$$\beta_1 - \alpha_1 = q = \alpha_2 - \alpha_1,$$

то достаточным условием существования решения в конечном виде является или

а) $\nu \leqslant q$

или б) если $\nu > q$ $(\nu \neq 1)$, то или *отсутствие другого корня* $\beta_2 < \beta_1$, *отличающегося от* β_1 *на целое число, не равное* 0, или $\beta_2 = \beta_1 - q - 1$;

в) в том случае, *когда* $\nu = 1$, *решение имеет вид* $y = x^{\alpha_1} = x^{\beta_1}$.

Примечание 1. Отсутствие второго корня $\beta_2 < \beta_1$, отличающегося от β_1 на целое число, не гарантирует вместе с этим, что уже для значения $j = 1$ имеем $c_{q+1} = 0$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Следовательно, в этом случае нужны добавочные исследования.

Примечание 2. При решении примеров значения α, β, ν, p, m удобнее иметь в виде таблички: назовем ее определяющей табличкой. Ее левая половина представляет собою данные функции Римана, т. е. значения особых точек и величины корней соответствующих определяющих уравнений (корни определяющего уравнения для решения в окрестности точки $x = \infty$ берутся с тем знаком, с каким получаются).

Примеры:

1. Из определяющей таблички

$$\left|\begin{array}{cccc} x = 0 & x = 2 & x = \infty & \nu = 2 \\ \alpha_1 = 0 & x = 0 & \beta_1 = 2 & p = 1 \\ \alpha_2 = 2 & x = 2 & \text{нет} & m = 0 \end{array}\right|$$

уравнения

$$x(2 - x)y'' + (x^2 - 2)y' + 2(1 - x)y = 0$$

видим, что удовлетворяются условия а). Уравнение имеет решение $y = x^2$.

2. Из определяющей таблички

$$\left|\begin{array}{ccc} x = 0 & \infty & \nu = 4 \\ x = 0 & 1 & \\ x = 1 & \text{нет} & \end{array}\right|$$

уравнения

$$(x^5 + 1)y'' + (x^2 - x^3)y' + x^2 y = 0$$

видим, что удовлетворяется условие б). Уравнение имеет решение $y = x - 1$.

§ 4. Случай II

Рассуждения относительно (15) аналогичны и приводят к подобным результатам:

Б. Если

$$\beta_1 - \alpha_1 = q = \beta_1 - \beta_2,$$

то достаточным условием существования решения в конечном виде является или

а) $\nu \leqslant q$,

или б) *если* $\nu > q$ $(\nu \neq 1)$, *то или отсутствие другого корня* $\alpha_2 > \alpha_1$, *отличающегося от* α_1 *на целое число, не равное* 0, *или* $\alpha_2 = \alpha_1 + q + 1$;

в) *в том случае, когда* $\nu = 1$, *решение таково:*

$$y = x^{\alpha_1} = x^{\alpha_1}.$$

Здесь снова надо заметить, что отсутствие $\alpha_2 = \alpha_1 + \iota$, где ι — целое положительное число, не гарантирует того, что $a_{q+1} = 0$.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$x^6 y''' + 6x^5 y'' - y = 0 \tag{32}$$

с определяющей табличкой

$x = 0$	∞	
нет	1	$p = 0$
нет	0	$m = 1$
нет	4	$\nu = 3$

Необходимое условие не выполняется, надо ожидать, что решения уравнения (32) без определяющего множителя представляются бесконечными рядами. Действительно, находим

$$y_1 = x^{-4}\left(1 - \frac{1}{168\,x} + \ldots\right),$$

$$y_2 = 1 - \frac{1}{12\,x^3} + \frac{1}{7 \cdot 12^2 x^6} - \ldots,$$

$$y_3 = x\left(1 + \frac{1}{12\,x^3} + \frac{1}{360\,x^6} + \ldots\right).$$

Ряды сходятся для $|x| > 0$. Замечая, что уравнение (32) имеет антиранг $m = 1$, применяем к нему преобразование $y = e^{\frac{a}{x}} u$. Получаем $\alpha_1 = -1$, $\alpha_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ и соответствующее уравнение

$$x^4 u''' + x^2(6x - 3a)\,u'' + (3a^2 - 6ax)\,u' - 6au = 0$$

с определяющей табличкой

0	∞	$m = 1$
0	1	$p = 0$
нет	0	$\nu = 2$
нет	4	

В данном случае $\beta_1-\alpha_1=1=\beta_1-\beta_2$ и удовлетворяется условие б) для всех значений α. Уравнение (32) имеет решения:

$$y_1=e^{-\frac{1}{x}}(2x+1),$$

$$y_2=e^{\frac{1}{2x}}\left\{(1-x)\cos\frac{\sqrt{3}}{2x}-x\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2x}\right\},$$

$$y_3=e^{\frac{1}{2x}}\left\{(1-x)\sin\frac{\sqrt{3}}{2x}+x\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2x}\right\}.$$

§ 5. Случай III

Переходим к (16)

$$f_0(\alpha_1+q)\neq 0,\quad \varphi_0(\beta_1-q)\neq 0.$$

Тут возможны случаи:

1) существуют

$$\alpha_2=\alpha_1+q+s,$$
$$\beta_2=\beta_1-q-\tau,$$

где s, τ, q — целые положительные числа такие, что

$$f_0(\alpha_2)=0,\quad \varphi_0(\beta_2)=0;$$

2) существует только одно число $\alpha_2=\alpha_1+q+s$, для которого $f_0(\alpha_2)=0$ и нет такого $\beta<\beta_1$, отличающегося от него на целое число и для которого $\varphi_0(\beta)=0$.

3) существует такое число

$$\beta_2=\beta_1-q-\tau,$$

которое удовлетворяет $\varphi_0(\beta_2)=0$, q, τ — целые положительные числа и нет числа $\alpha>\alpha_1$, отличающегося от него на целое число и удовлетворяющегося уравнению $f_0(\alpha_2)=0$.

4) Нет ни числа $\beta_2<\beta_1$, ни числа $\alpha_2>\alpha_1$ таких, что $\varphi_0(\beta)\equiv 0$, $f_0(\alpha_2)\equiv 0$, причем как $\beta_1-\beta_2$, так $\alpha_2-\alpha_1$ равны целым положительным числам.

Во всех этих случаях вследствие (16) требуется, чтоб система уравнений

$$a_{q+j}f_0(\alpha_1+q+j)+\ldots+a_0f_{q+j}(\alpha_1)=0 \tag{33}$$
$$(j=1, 2, \ldots)$$

и одновременно с нею система уравнений

$$c_{q+j}\varphi_0(\beta_1-q-j)+\ldots+c_0\varphi_{q+j}(\beta_1)=0 \tag{34}$$
$$(j=1, 2, \ldots)$$

удовлетворялись бы, считая, что первых $(q+1)$ строчек (8) и (9) определяют коэфициенты многочлена.

Предположим вначале, что

$$\nu \leqq q.$$

Система (33) вследствие (19) перепишется

$$\begin{aligned} &a_{q+1} f_0(\alpha_1+q+1) + a_q f_1(\alpha_1+q) + \dots a_{q-\nu+1} f_\nu(\alpha_1+q-\nu+1) = 0 \\ &a_{q+2} f_0(\alpha_1+q+2) + a_{q+1} f_1(\alpha_1+q+1) + \\ &+ a_q f_2(\alpha_1+q) + \dots + a_{q-\nu+2} f_\nu(\alpha_1+q-\nu+2) = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{q+s} f_0(\alpha_1+q+s) + \dots + a_{q-\nu+s} f_\nu(\alpha_1+q-\nu+s) = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{35}$$

В системе (35) рассмотрим в каждом уравнении суммы тех слагаемых, у которых коэфициенты равны $a_q, a_{q-1}, \dots, a_0$:

$$\begin{aligned} &a_q f_1(\alpha_1+q) + \dots + a_{q-\nu+1} f_\nu(\alpha_1+q-\nu+1), \\ &a_q f_2(\alpha_1+q) + \dots + a_{q-\nu+2} f_\nu(\alpha_1+q-\nu+2), \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &a_q f_\nu(\alpha_1+q). \end{aligned} \tag{36}$$

Вследствие (13) и (21) выражения (36) перепишутся

$$\begin{aligned} &c_0 \varphi_{\nu-1}(\beta_1) + \dots + c_{\nu-1} \varphi_0(\beta_1-\nu+1) \\ &c_0 \varphi_{\nu-2}(\beta_1) + \dots + c_{\nu-2} \varphi_0(\beta_1-\nu+2), \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &c_0 \varphi_0(\beta_1). \end{aligned} \tag{37}$$

Поскольку $\nu \leqq q$, то выражения (37) вследствие (9) тождественно равны нулю. Следовательно, от системы (35) остается

$$\begin{aligned} &a_{q+1} f_0(\alpha_1+q+1) = 0, \\ &a_{q+2} f_0(\alpha_1+q+2) + a_{q+1} f_1(\alpha_1+q+1) = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{38}$$

Из системы (38) следует, что или

а) $f_0(\alpha_1+q+1) = 0$;

или б) $f_0(\alpha_1+q+1) \neq 0$, $a_{q+1} = \dots = a_{q+s-1} = 0$, $f_0(\alpha_1+q+s) = 0$;

или в) $f_0(\alpha_1+q+1) \neq 0$, $a_{q+j} = 0$ $(j \geq 1)$,

т. е. система (38) так или иначе удовлетворяется. Подобное мы имеем и для системы (34) при $\nu \leqq q$.

Пусть теперь $\nu > q$; $\nu = q + \tau$, $\tau \geqslant 1$. Система (33) по (19) перепишется

$$a_{q+1} f_0(\alpha_1 + q + 1) + \ldots + a_0 f_{q+1}(\alpha_1) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{q+\tau} f_0(\alpha_1 + q + \tau) + \ldots + a_0 f_\nu(\alpha_1) = 0 \tag{39}$$
$$a_{q+\tau+1} f_0(\alpha_1 + q + \tau + 1) + \ldots + a_1 f_\nu(\alpha_1 + 1) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Выпишем, как и раньше, из каждой строчки (39) сумму тех слагаемых, коэфициентами которых являются $a_q, a_{q-1}, \ldots, a_0$:

$$a_q f_1(\alpha_1 + q) + \ldots + a_0 f_{q+1}(\alpha_1),$$
$$a_q f_2(\alpha_1 + q) + \ldots + a_0 f_{q+2}(\alpha_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_q f_\tau(\alpha_1 + q) + \ldots + a_0 f_\nu(\alpha_1), \tag{40}$$
$$a_q f_{\tau+1}(\alpha_1 + q) + \ldots + a_1 f_\nu(\alpha_1 + 1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_0 f_\nu(\alpha_1 + q).$$

Вследствие (13) и (21) выражения (40) перепишутся.

$$c_0 \varphi_{\nu-1}(\beta_1) + \ldots + c_q \varphi_{\tau-1}(\beta_1 - q),$$
$$c_0 \varphi_{\nu-2}(\beta_1) + \ldots + c_q \varphi_{\tau-2}(\beta_1 - q), \tag{41}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$c_0 \varphi_{\nu-q+1}(\beta_1) + \ldots + c_q \varphi_1(\beta_1 - q),$$
$$c_0 \varphi_{\nu-q}(\beta_1) + \ldots + c_q \varphi_0(\beta_1 - q),$$
$$c_0 \varphi_{\nu-q-1}(\beta_1) + \ldots + c_{q-1} \varphi_0(\beta_1 - q + 1), \tag{42}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$c_0 \varphi_0(\beta_1).$$

Строчки (42) тождественно равны нулю на основании (9). Строчки (41) равны нулю в двух случаях: или если

$$c_i = 0 \qquad (q + 1 \leqslant i \leqslant q + \tau - 1),$$

или если

$$\varphi_0(\beta_1 - q - 1) \equiv 0.$$

Возвращаясь к (39), мы видим, чтобы они удовлетворялись, нам надо прибавить еще условия, а именно: или

$$\alpha_2 = \alpha_1 + q + 1,$$

или

$$a_{q+j} = 0 \qquad (j \geqslant 1).$$

Заметим, что c_{q+j} $(j=1, 2, \ldots, \iota-1)$ могут равняться нулю по нескольким причинам:

1) нет больше значений $\beta < \beta_1$ и отличающихся от β_1 на целое число, не равное 0 или 2) $\beta_2 = \beta_1 - q - \iota$.

Первый случай нас не интересует, ибо из классической теории известно, что, если нет корней определяющего уравнения, отличающегося на целое число, то каковы бы сами эти корни ни были, мы имеем вообще бесконечные ряды. Аналогичные рассуждения имеются и для системы (34). Подытоживая, имеем

В. а) *Если $\beta_1 - \alpha_1 = q$ — целое положительное число, причем $f_0(\alpha_1+q) \neq 0$, $\varphi_0(\beta_1-q) \neq 0$, то для существования решения в конечной форме достаточно, чтобы $\nu \leqslant q$.*

б) *Если же $\nu > q$, $\beta_1 - \alpha_1 = q$ — целое положительное число, для которого $f_0(\alpha_1+q) = 0$, $\varphi_0(\beta_1-q) \neq 0$, то достаточно, чтобы удовлетворялось одно из восьми условий:*

1) $\beta_2=\beta_1-q-1$;	$\alpha_2=\alpha_1+q+1$;	
2) $\beta_2=\beta_1-q-1$;	α_2	не существует;
3) $\beta_2=\beta_1-q-\iota$;	$\alpha_2=\alpha_1+q+1$	
4) $\beta_2=\beta_1-q-\iota$;	α_2	не существует;
5) $\alpha_2=\alpha_1+q+1$;	β_2	не существует;
6) $\alpha_2=\alpha_1+\iota$	$\beta_2=\beta_1-q-1$;	
7) $\alpha_2=\alpha_1+\iota$;	β_2	не существует;
8) α_2 и	β_2	не существуют;

где α_2 и β_2 — *следующие по величине и отличающиеся соответственно на целое число от α_1 и β_1 $(\alpha_2 > \alpha_1;\ \beta_2 < \beta_1)$ корни соответствующих определяющих уравнений; $\iota = \nu - q$.*

Примечание. В случаях 2, 4, 7, 8. возможно, нужны добавочные условия (см. примечание 1 к А).

Пример. Уравнение

$$x^2y'' + x^2y' - 2y = 0$$

с определяющей табличкой

$$\left|\begin{array}{ccc} 0 & / & \iota=1 \\ 1 & 0 & p=1 \\ 2 & \text{нет} & m=0 \end{array}\right|$$

имеет решение $y_1 = 1 - \dfrac{2}{x}$. Второе решение в конечном виде

$$y_2 = e^{-x}\left(1 + \frac{2}{x}\right)$$

получим, используя преобразование (12) и соединенное уравнение [3].

§ 6. Случай IV

Переходим к (17). Поскольку $f_0(\alpha_1+q)=0$, $\varphi_0(\beta_1-q)=0$, то для существования решений в конечном виде одновременно должны удовлетворяться такие системы уравнений

$$a_{q-1}f_j(\alpha_1+q-1)+\ldots+a_0 f_{q-1+j}(\alpha_1)=0 \quad (j=1,2\ldots) \tag{43}$$

и

$$c_{q-1}\varphi_j(\beta_1-q+1)+\ldots+c_0\varphi_{q-1+j}(\beta_1)=0 \quad (j=1,2,\ldots). \tag{44}$$

Когда $\nu\leqslant q$, то вследствие (13), (19), (20) и (21) системы (43) и (44) удовлетворяются как $(q+1)$ первых строчек соответственно систем (8) и (9).

Пусть теперь $\nu>q$: $\nu=q+\tau$ (τ — целое число $\geqslant 1$). Система (43) перепишется

$$\begin{gathered}
a_{q-1}f_{1+s}(\alpha_1+q-1)+\ldots+a_0 f_{q+s}(\alpha_1)=0\\
(s=0,1,\ldots,\tau-1);\\
a_{q-1}f_{\tau+1}(\alpha_1+q-1)+\ldots+a_0 f_{q+\tau}(\alpha_1)=0;\\
a_{q-1}f_{\tau+2}(\alpha_1+q-1)+\ldots+a_1 f_{q+\tau}(\alpha_1+1)=0;\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{q-1}f_{q+\tau}(\alpha_1+q-1)=0
\end{gathered}$$

или, вследствие (13) и (21)

$$\begin{gathered}
c_1\varphi_{\nu-1}(\beta_1-1)+\ldots+c_q\varphi_{\nu-q}(\beta_1-q)=0;\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
c_1\varphi_{q+1}(\beta_1-1)+\ldots+c_q\varphi_2(\beta_1-q)=0;\\
c_1\varphi_q(\beta_1-1)+\ldots+c_q\varphi_1(\beta_1-q)=0;
\end{gathered} \tag{45}$$

$$\begin{gathered}
c_1\varphi_{\nu-\tau-1}(\beta_1-1)+\ldots+c_q\varphi_0(\beta_1-q)=0;\\
c_1\varphi_{\nu-\tau-2}(\beta_1-1)+\ldots+c_{q-1}\varphi_0(\beta_1-q+1)=0;\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
c_1\varphi_1(\beta_1-1)+c_2\varphi_0(\beta_1-2)=0;\\
c_1\varphi_0(\beta_1-1)=0.
\end{gathered} \tag{46}$$

Уравнения (46) удовлетворяются, если $\beta_2=\beta_1-1$; $q=1$. В этом случае система (45) дает

$$c_1\varphi_i(\beta_1-1)=0 \quad (i=1,2,\ldots\overline{\nu-1}),$$

т. е. все

$$\varphi_i(\beta_1-1)=0 \quad (1\leqslant i\leqslant\nu-1).$$

Подобные рассуждения мы имеем относительно системы (44). Следовательно,

Г. а) *Если*

$$\beta_1 - \alpha_1 - q = \alpha_2 - \alpha_1 = \beta_1 - \beta_2$$

целое положительное число, то достаточным условием существования решения в конечном виде является $\nu \leq q$, а если $\nu > q$,

$$\beta_1 - \beta_2 = \alpha_2 - \alpha_1 = \beta_1 - \alpha_1 = 1,$$

то должны еще удовлетворяться

$$\varphi_j(\beta_2) = f_j(\alpha_2) = 0 \qquad (1 \leq j \leq \nu - 1).$$

Пример.

Из определяющей таблички

$$\left\{\begin{matrix} 0 & \infty & \nu = 2 \\ 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \end{matrix}\right\}$$

уравнения $x(1-x)^2 y'' = 2y$ имеем

$$\beta_1 - \alpha_1 = \alpha_2 - \alpha_1 = \beta_1 - \beta_2 = 1; \qquad 2 = \nu > q = 1;$$

но

$$f_1(1) = -2 \neq 0;$$

следовательно, уравнение не имеет решения в виде многочлена по степеням x, что и оправдывается на самом деле. Однако данное уравнение имеет еще особую точку $x = 1$. Составляя новую определяющую табличку

$$\left\{\begin{matrix} 1 & \infty & \nu = 1 \\ 1 & 1 & \\ 2 & 0 & \end{matrix}\right\}$$

видим, что удовлетворяются условия В. а). Действительно, имеется решение

$$y = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}.$$

§ 7. Дополнения, частные случаи

1. Как необходимые, так и достаточные условия выведены в предположении, что *показатели коэфициентов уравнения наиболее возможно сближены* [3]. В противном случае достаточные условия могут показаться ошибочными.

Уравнение

$$x(2+x^2)y'' - y' - 6xy = 0 \tag{47}$$

с определяющей табличкой

$$\left\{\begin{matrix} 0 & \infty & p = 0 \\ 0 & 3 & \nu = 2 \\ \frac{3}{2} & -2 & m = 0 \end{matrix}\right\}$$

удовлетворяет всем необходимым и достаточным условиям случая В. а). Однако, как легко убедиться, уравнение (47) не имеет решений в конечном виде. Причина подобного факта станет сразу ясной, если заметим, что показатели коэфициентов уравнения (47) не сближены. Произведя замену $x^2=t$, получаем уравнение

$$2t(2+t)y'' + (1+t)y' - 3y = 0 \tag{48}$$

с определяющей табличкой

$$\left\{\begin{array}{ccc} 0 & \sim & \nu=1 \\ 0 & \frac{2}{3} & m=0 \\ \frac{3}{4} & -1 & p=0 \end{array}\right\}$$

из которой видим, что для уравнения (48) не удовлетворяются даже необходимые условия существования решения в конечном виде.

2. Особый случай представляют уравнения, в которых коэфициенты $R_0(x), \dots R_{n-1}(x)$ удовлетворяют условию сближения показателей коэфициентов, а выражение для $R_n(x)$ ему не подчиняется. В этом случае число уравнений, необходимых для определения q коэфициентов a_i больше q, и, несмотря на то, что удовлетворяются необходимые и достаточные условия существования решения в конечном виде, уравнение их не имеет. Это станет вполне понятным, если вспомнить, что уравнение с несближенными показателями коэфициентов дает больше уравнений для определения a_i, чем уравнение со сближенными показателями, и что преобразование $x^q=t$ меняет коэфициенты у $t^k (k=0, 1 \dots)$ выражений $R_0(t), \dots R_{n-1}(t)$, но не $R_n(t)$.

Пример. Уравнение

$$x^3y'' + x(x^3+1)y' + (3 - 2x - x^2)y = 0$$

удовлетворяет всем требованиям, как это видно из определяющей таблички

$$\left\{\begin{array}{ccc} 0 & \sim & \nu=3 \\ 3 & 0 & p=0 \\ \text{нет} & 0 & m=3 \end{array}\right\}$$

достаточных и необходимых условий. Разыскивая решение в виде многочлена

$$y = a_0x^{-3} + a_1x^{-2} + a_2x^{-1} + a_3,$$

получим шесть несовместимых уравнений для определения

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3.$$

3. Линейные уравнения с постоянными коэфициентами являются частным случаем рассматриваемых. Они имеют ранг $p=1$, антиранг $m=0$. Подстановка $y=e^{\alpha x}u$ превращает уравнение

$$\sum_{s=0}^{n} a_s y^{(n-s)} = 0,$$

где $a_s (0 \leqslant s \leqslant n)$ — некоторые определенные постоянные, в уравнение

$$a_0 u^{(n)} + \dots + (a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_n) u = 0.$$

Разыскивая значения α, нам приходится приравнять нулю весь коэфициент при u. Остающееся уравнение удовлетворяется $u_i = C_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ (C_i — произвольная постоянная). Коэфициент при u есть обычное характеристическое уравнение, дающее n корней. В случае n различных корней имеем

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\alpha_i x}.$$

4. Другим частным случаем являются уравнения Эйлера

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} y^{(n-i)} = 0, \tag{49}$$

где a_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ — определенные постоянные. Определяющая табличка этого уравнения, если все α_i различны, такова:

$$\left|\begin{array}{ccc} 0 & \infty & r=0 \\ \alpha_1 & \alpha_n & m=0 \\ \alpha_2 & \alpha_{n-1} & p=0 \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \\ \alpha_{n-1} & \alpha_2 & \\ \alpha_n & \alpha_1 & \end{array}\right|$$

т. е. решения уравнения относятся к случаю *B*. a):

$$q = \alpha_i - \alpha_i = 0 = r.$$

Следовательно, если все α_i различны, мы имеем n конечных решений вида

$$y_i = x^{\alpha_i} \quad (i=1, 2, \dots n).$$

Пример.

Для уравнения

$$x^2 y'' - 2y = 0$$

с определяющей табличкой

$$\left|\begin{array}{ccc} 0 & \infty & p=0 \\ 1 & 2 & r=0 \\ 2 & 1 & m=0 \end{array}\right|$$

имеем решения

$$y_1 = \frac{1}{x}, \quad y_2 = x^2.$$

5. Мы получим конечную форму функций Бесселя $J_{\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)}$, потребовав, чтобы разность $\beta-\alpha=q$ равнялась целому положительному числу, где β и α являются корнями соответствующих определяющих уравнений для показателей решений уравнений

$$x^2u''+xu'(\pm 2xi+1)+u(\pm xi-\nu^2)=0,$$

полученных из

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$$

преобразованиями

$$y=e^{\pm xi}u.$$

Эта конечная форма функций Бесселя после небольших преобразований совпадает с данной у Ватсона [4].

$$J_{n+\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}}\left|\sin\left(z-\frac{n\pi}{2}\right)\sum_{r=0}^{\frac{n}{2}}\frac{(-1)^r(n+2r)!}{(2r)!(n-2r)!(2z)^{2r}} + \right.$$

$$\left. + \cos\left(z-\frac{n\pi}{2}\right)\sum_{r=0}^{\frac{1}{2}(n-1)}\frac{(-1)^r(n+2r+1)!}{(2r+1)!(n-2r-1)!(2z)^{2r+1}}\right|,$$

$$J_{-n-\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}}\left|\cos\left(z+\frac{n\pi}{2}\right)\sum_{r=0}^{\frac{n}{2}}\frac{(-1)^r(n+2r)!}{(2r)!(n-2r)!(2z)^{2r}} - \right.$$

$$\left. - \sin\left(z+\frac{n\pi}{2}\right)\sum_{r=0}^{\frac{n-1}{2}}\frac{(-1)^r(n+2r+1)!}{(2r+1)!(n-2r-1)!(2z)^{2r+1}}\right|.$$

§ 8. Линейная независимость решений в конечном виде

Предположим, что линейное диференциальное уравнение

$$\sum_{s=0}^{n} P_s(x)\, y^{(n-s)} = 0 \tag{50}$$

с полиномиальными коэфициентами

$$P_s(x) = \sum_{\mu=\alpha_s}^{\beta_s} b_{\mu s} x^{\mu} \qquad (0 \leqslant s \leqslant n)$$

имеет решения в конечном виде

$$y_i = x^{\alpha_i} e^{Q_i(x)} S_i(x) \tag{51}$$

$$(i=0,\ 2,\ \ldots\ n_1;\quad n_1 \leqslant n),$$

где $S_i(x)$, $Q_i(x)$ — многочлены. Покажем, что *система решений* (51) *линейно независима.*

Для доказательства предположим обратное, а именно, предположим существование таких постоянных C_i не всех равных 0, что тождественно

$$\sum_{i=1}^{n_1} C_i x^{\rho_i} e^{Q_i(x)} S_i(x) = 0$$

или

$$C_1 S_1(x) + C_2 e^{Q_2-Q_1} S_2(x) + \ldots + C_{n_1} e^{Q_{n_1}-Q_1} S_{n_1}(x) = 0.$$

Диференцируем последнее тождество столько раз, пока не исчезнет член, свободный от показательной функции. В результате получим

$$C_2 S_2^{(1)}(x) + C_3 e^{Q_3-Q_2} S_3^{(1)}(x) + \ldots + C_{n_1} e^{Q_{n_1}-Q_2} S_{n_1}^{(1)}(x) = 0. \tag{52}$$

Степени многочленов $S_k^{(i)}(x)$ $(k=2, 3 \ldots n_1)$ не уменьшились по сравнению с степенями многочленов $S_k(x)$. Диференцируем (52) столько раз, пока не исчезнет член, свободный от показательной функции и т. д.

В конце концов будем иметь тождество

$$C_{n_1} e^{Q_{n_1}-Q_{n_1-1}} S_{n_1}^{(n-2)}(x) = 0,$$

что невозможно, ибо $C_{n_1} \neq 0$, по предположению, $S_{n_1}^{(n-2)}$ — многочлен не равный тождественно нулю.

В том случае, когда $n_1 = n$, система (51) составляет, следовательно, фундаментальную систему.

§ 9. Теорема Альфана

Теорема Альфана указывает условия [1) общий интеграл уравнений однозначен,

2) ранг (в моей терминологии) уравнения равен единице,

3) особые точки уравнения на конечном расстоянии — точка регулярности решений; точка на ∞ может быть нерегулярной], при которой фундаментальная система решений линейного диференциального уравнений образована функциями вида (51).

Теорема Альфана отжила свой век, ибо решения (51) могут образовать фундаментальную систему для любого ранга $p > 0$ (антиранга $m > 0$), если только выполняются какие-либо из вышеприведенных условий А, Б, В, Г. Если же к этим условиям прибавить условия отсутствия логарифмических решений [3] и требование показателям решений быть целыми числами, то этим обеспечуется и однозначность решений.

Регулярность точек на конечном расстоянии и нерегулярность точки на ∞ тоже не играют никакой роли. Может быть — наоборот, а может быть, что и все особые точки — точки регулярности (как например, для уравнения типа Эйлера).

Наконец, решения (51) существуют и для того случая, когда их показатели не целые числа, т. е. решения не однозначны.

Подведем итог в виде теоремы. Предварительно вспомним, что мы *рассматривали* только те уравнения, для которых корни определяющего уравнений относительно каждой из особых точек уравнения положительны, чего всегда можно добиться с помощью преобразования

$$y = \frac{z}{(x-a_1)^{\mu_1}\dots(x-a_k)^{\mu_k}},$$

где $a_1, \dots a_k$ — полюсы решений, $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ — их кратности, z — новая неизвестная функция.

Теорема.

Если данное уравнение

$$\sum_{s=0}^{n} P_s(x)\, y^{(n-s)} = 0$$

с полиномиальными коэфициентами порождает с помощью преобразования

$$y(x) = u(x) \exp Q(x)$$

n соединенных линейных диференциальных уравнений, и если показатели решений, принадлежащих точкам $x=0$ и $x=\infty$ всех n соединенных уравнений и размах $(\nu+1)$ их коэфициентов удовлетворяют необходимому и достаточным условиям существования решения в конечной форме (теоремы А, Б, В, Г), *то данное уравнение* (1) *имеет общее решение вида*

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{Q_i} S_i(x),$$

где $S_i(x)$ — рациональные функции, Q_i многочлены от x или от $\frac{1}{x}$ в зависимости от того, что не равно нулю — ранг p или антиранг m уравнения, C_i — произвольные постоянные.

1) Применяя вышеизложенный метод к уравнению

$$xy'' - 2y' + xy = 0 \tag{53}$$

с табличкой

$$\left|\begin{array}{ccc} 0 & \infty & \nu=2 \\ 0 & \text{нет} & p=1 \\ 3 & \text{нет} & m=0 \end{array}\right|$$

получим пару соединенных уравнений

$$xu'' + u'(\pm 2ix - 2) \pm 2iu = 0,$$

соответственно двум значениям определяющего множителя: e^{ix} и e^{-ix} с одинаковой определяющей табличкой

$$\left|\begin{array}{ccc} 0 & \infty & \nu=1 \\ 0 & 1 & p=1 \\ 3 & \text{нет} & m=0 \end{array}\right|$$

Фундаментальная система решений уравнения (53) такова:

$$y_1 = x\cos x - \sin x,$$

$$y_2 = \cos x + x \sin x.$$

Этот вид решений (другим путем) рассматривался также в курсе Д. М. Синцова [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Альфан, Сообщения Парижской академии наук. 101 (1885), 1238.

2. Г. Гогайзель. Журнал для чистой и прикладной математики. 153 (1924), 228—244.

3. К. Латишева. Наукові записки КДУ. Математичний збірник № 4.

4. Г. Н. Ватсон. Исследование по теории функций Бесселя. изд. 2. 1945. стр. 38—55.

5. К. Латишева. Наукові записки КДУ. Математичний збірник № 5.

6. Д. М. Синцов. Елементарний курс інтегрування диференціальних рівнянь. 1930. сс. 227—228.