DOI: 10.37863/umzh.v73i6.6580

УДК 512.55

Ю. А. Дрозд (Ін-т математики НАН України, Київ)

ЛЕМА ПРО ВИКИДАННЯ І МАЙЖЕ РОЗЩЕПЛЮВАНІ ПОСЛІДОВНОСТІ

We study the behavior of almost split sequences and Auslander – Reiten quivers of an order under rejection of bijective modules as defined in [Ю. А. Дрозд, В. В. Кириченко, *О квазибассовых порядках*, Изв. АН СССР. Сер. мат., **36**, 328 – 370 (1972)]. In particular, we establish relations of stable categories and almost split sequences for an order A and the order A' obtained from A by such a rejection. These results are refined for the Gorenstein and Frobenius cases.

Вивчається поведінка майже розщеплюваних послідовностей і сагайдаків Ауслендера – Райтен порядків при викиданні бієктивних модулів згідно з результатами статті [Ю. А. Дрозд, В. В. Кириченко, *О квазибассовых порядках*, Изв. АН СССР. Сер. мат., **36**, 328 – 370 (1972)]. Зокрема, встановлено зв'язки стабільних категорій і майже розщеплюваних послідовностей порядку A та порядку A', одержаного з A таким викиданням. Ці результати уточнено для ґоренштейнових і фробеніусових порядків.

1. Вступ. Бієктивні модулі і „лема про викидання” [6] відіграють важливу роль у теорії порядків і ґраток, так само, як ґоренштейнові (тобто самобієктивні) порядки (див., наприклад, [6, 7, 11, 12, 17]). Так само важливу роль відіграють майже розщеплювані послідовності та сагайдаки Ауслендера – Райтен. У цій статті ми розглянемо поведінку майже розщеплюваних послідовностей і сагайдаків Ауслендера – Райтен при викиданні бієктивних модулів. У пункті 2 ми нагадаємо загальні факти про порядки, ґратки та двоїстість. Наші розгляди більш загальні, оскільки ми не вважаємо базове комутативне кільце кільцем дискретної оцінки, але фактично всі основні результати „класичної” теорії (як у [4]) залишаються правильними. У пункті 3 ми вводимо бієктивні ґратки та ґоренштейнові порядки і доводимо лему про викидання у більш узагальненій формі та деякі пов'язані з нею результати. Зокрема, ми встановлюємо, які ґратки стають проєктивними та ін'єктивними після викидання (теорема 3.1). Пункт 4 присвячено *бассовим порядкам*, тобто таким, всі надкільця яких є ґоренштейновими. Основним результатом цього пункту є теорема 4.1, яка істотно узагальнює критерій бассовості з роботи [6]. У пункті 5 ми розглядаємо стабільні категорії та зв'язок стабільної категорії порядку A і стабільної категорії порядку A', отриманого викиданням бієктивного модуля (теорема 5.1). У пункті 6 вивчаються майже розщеплювані послідовності й встановлюється, як майже розщеплювані послідовності для порядку A можна описати в термінах A'-модулів (твердження 6.2 і теорема 6.1). Насамкінець, у пункті 7 ми уточнюємо ці результати у випадку ґоренштейнових та фробеніусових порядків.

Цю статтю присвячено пам'яті мого друга, колеги й багаторічного співавтора Володимира Кириченка, з яким 50 *років тому ми захоплено „лазили по структурі модулів” і поділяли радість від відкриття леми про викидання.*

2. Порядки, ґратки і двоїстість. Далі R позначає *повне локальне комутативне нетерове кільце без нільпотентних ідеалів розмірності Крулля* 1 з максимальним ідеалом $\mathfrak{m}$, полем лишків $\Bbbk = R/\mathfrak{m}$ і повним кільцем часток K. З [3] випливає, що таке кільце є коен-маколеєвим. Через R-mod позначимо категорію скінченнопороджених R-модулів, а через R-lat — її повну підкатегорію, яка складається з R-*ґраток*, тобто R-модулів M *без скруту*, або таких, що канонічне відображення $M \to K \otimes_R M$ є зануренням. Тоді ми пишемо KM замість $K \otimes_R M$

і ототожнюємо M з $1 \otimes M \subseteq KM$. Зауважимо, що в цьому випадку R-ґратки — те саме, що *максимальні коен-маколеєві модулі.* Оскільки R повне, у нього є *канонічний модуль* [3] (наслідок 3.3.8), тобто така R-ґратка ω_R, що $\operatorname{inj.dim}_R \omega_R = 1$ і $\operatorname{Ext}^1_R(\Bbbk, \omega_R) = \Bbbk$. Функтор $D\colon M \mapsto \operatorname{Hom}_R(M, \omega_R)$ є *точною двоїстістю* у категорії R-lat [3] (теорема 3.3.10). Це означає, що, якщо $0 \to N \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} L \to 0$ — точна послідовність ґраток, послідовність $0 \to DL \xrightarrow{D\beta} DM \xrightarrow{D\alpha} DN \to 0$ також є точною, а природне відображення $M \to DDM$ є ізоморфізмом. Оскільки $\operatorname{End}_R(\omega_R) \simeq \operatorname{End}_R R \simeq R$ і $\operatorname{End}_K KM \simeq K \operatorname{End}_R M$ для кожної ґратки M, то $K\omega_R \simeq K$, і ми ототожнюємо ω_R з його образом у K. Зауважимо також, що K є прямим добутком полів: $K = \prod_{i=1}^{s} K_i$, де K_i — поле часток кільця $R/\mathfrak{p}_i$, а $\mathfrak{p}_i$ пробігає мінімальні первинні ідеали кільця R.

R-порядком, або просто *порядком*, якщо R фіксоване, називають напівпервинну R-алгебру A, яка є R-ґраткою. Нагадаємо, що *напівпервинне* — це таке кільце, яке не має нільпотентних ідеалів. Тоді KA є напівпростою K-алгеброю. Кажуть, що A — це *R-порядок у KA*. Ми позначаємо через $Z(A)$ центр A і називаємо A *центральним*, якщо природне відображення $R \to Z(A)$ є ізоморфізмом. Якщо A *зв'язний*, тобто не розкладається як кільце, його центр локальний, і навпаки. Позначимо через A-mod категорію скінченнопороджених R-модулів, а через A-lat її повну підкатегорію *A-ґраток*, тобто (лівих) A-модулів, які є R-ґратками. Обмеження функтора двоїстості D на категорію A-lat дає точну двоїстість між A-lat та A^{op}-lat, яку ми розглядаємо як категорію *правих* A-ґраток. Покладемо $\omega_A = \operatorname{Hom}_R(A, \omega_R)$. Це A-бімодуль, причому для кожної A-ґратки M (лівої або правої) її двоїста ґратка DM ототожнюється з $\operatorname{Hom}_A(M, \omega_A)$. *Скінченними модулями* ми називаємо модулі *скінченної довжини* і позначаємо через $\ell_A(M)$ довжину такого модуля, а *шириною* A-ґратки M — довжину $\ell_{KA}(KM)$ і позначаємо її через $\operatorname{wd}_A(M)$. Легко бачити, що $\operatorname{wd}_A(M)$ — це максимальне число m, таке що M містить пряму суму m ненульових підмодулів, або, що те саме, містить ланцюг підмодулів $M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_m$, в якому всі фактори M_i/M_{i+1} є ґратками. Ґратки ширини 1 називатимемо *L-незвідними*[1].

Оскільки кільце R є повним, кожна *скінченна R-алгебра* (тобто скінченнопороджена як R-модуль) є напівдосконалою [14]. Тому категорія скінченнопороджених модулів над такою алгеброю A є категорією Крулля – Шмідта. Зокрема, кожен нерозкладний проєктивний A-модуль ізоморфний прямому доданку A й існує бієкція між класами ізоморфізму нерозкладних проєктивних модулів (які називаються *головними* A-модулями) і класами ізоморфізму простих A-модулів, яка співставляє головному модулю P модуль $P/\mathfrak{r}P$, де $\mathfrak{r} = \operatorname{rad} A$. Для кожного скінченнопородженого A-модуля M існує епіморфізм $\pi\colon P \to M$, де P є проєктивним, а $\operatorname{Ker}\pi \subseteq \mathfrak{r}P$. Тут модуль P визначено з точністю до ізоморфізму. Він називається *проєктивним накриттям* модуля M і позначається $P_A(M)$. Інколи епіморфізм π також називають проєктивним накриттям M, хоча він визначений лише з точністю до множника, який є автоморфізмом P. Очевидно, π індукує ізоморфізм $P/\mathfrak{r}P \simeq M/\mathfrak{r}M$.

Надкільцем R-порядку A називається такий R-порядок A', що $A \subseteq A' \subset KA$. Тоді A'/A є скінченним модулем, а A'-lat — повною підкатегорією в A-lat. Порядок називається *максимальним*, якщо він не має власних надкілець. Надкільце порядку A, яке є максимальним порядком, називається його *максимальним надкільцем*. Так само, *надмодулем* A-ґратки M називається така A-ґратка M', що $M \subseteq M' \subset KM$. Якщо A' — надкільце A, а M — A-ґратка, яка розглядається як підмодуль у KM, то визначено A'-ґратку $A'M$, яка є надмодулем M.

[1] Часто такі ґратки називають *незвідними*, але далі це слово буде використано в іншому контексті.

Наступний факт є, мабуть, відомим. У випадку, коли R — кільце дискретної оцінки, його доведено у [4]. Загальний випадок легко до цього зводиться, хоча нам не вдалося знайти посилання в літературі.

Твердження 2.1. 1. *Кожен R-порядок A має максимальне надкільце.*

2. *Центр максимального порядку є добутком кілець дискретної оцінки.*

3. *Зв'язний максимальний порядок має, з точністю до ізоморфізму, єдину нерозкладну ґратку, яка є й L-незвідною.*

4. *Навпаки, якщо порядок має єдину нерозкладну ґратку, він є зв'язним і максимальним.*

Доведення. Можна вважати, що A є зв'язним. Його центр $Z(A)$ є повним і локальним, а кожне надкільце A є $Z(A)$-порядком, тож можна вважати, що $Z(A) = R$. Тоді $Z(KA) = K$. Нехай S — ціле замикання R у K. Оскільки R повне й локальне, воно є *чудовим* кільцем [16], зокрема, S є скінченнопородженим R-модулем. Оскільки воно цілозамкнене, воно є прямим добутком кілець дискретної оцінки. Кільце SA є S-порядком і надкільцем A. Воно розкладається у прямий добуток порядків, центри яких є кільцями дискретної оцінки. Тоді з теореми 26.5 [4] випливає, що SA, а тому й A, має максимальне надкільце A' і $Z(A') = S$. Тепер усі інші твердження також випливають із [4].

Твердження 2.1 доведено.

Оскільки алгебра KA є напівпростою, кожен скінченнопороджений KA-модуль вкладається у скінченнопороджений вільний модуль. Звідси легко випливає, що й кожна A-ґратка M вкладається у вільний A-модуль. Отже, A-ґратки — це те саме, що підмодулі вільних модулів.

Твердження 2.2. *Нехай $I \in A\text{-lat}$. Тоді рівносильні такі умови*:

(1) $\operatorname{inj.dim}_A I = 1$;

(2) $\operatorname{Ext}^1_A(M, I) = 0$ *для всіх* $M \in A\text{-lat}$;

(3) $\operatorname{Ext}^i_A(M, I) = 0$ *для всіх* $M \in A\text{-lat}$ *і всіх* $i \geq 1$;

(4) *будь-яка точна послідовність* $0 \to I \to N \to M \to 0$, *де* $M \in A\text{-lat}$, *розщеплюється*;

(5) $I \simeq DP$, *де P — скінченнопороджений проєктивний A^{op}-модуль*;

(6) *I — прямий доданок ω_A^m для деякого m.*

Ґратку, яка задовольняє ці умови, назвемо *L-ін'єктивною.* Якщо L-ін'єктивна ґратка нерозкладна, називатимемо її *коголовною.*

Доведення. (3) $\Rightarrow$ (2) і (2) $\Leftrightarrow$ (4) є очевидними.

(2) $\Rightarrow$ (3), оскільки у проєктивній резольвенті

$$\ldots \to P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \ldots \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \to M \to 0$$

модуля M всі модулі $M_i = \operatorname{Im} d_i$ є ґратками і $\operatorname{Ext}^i_A(M, I) \simeq \operatorname{Ext}^1_A(M_{i-1}, I)$ при $i > 1$.

(4) $\Rightarrow$ (5). За двоїстістю умова (4) означає, що кожна точна послідовність $0 \to M \to N \to \to DI \to 0$ розщеплюється. Оскільки завжди існує така послідовність з проєктивним модулем N, з цього випливає, що $P = DI$ є проєктивним, а $I \simeq DP$.

(5) $\Rightarrow$ (6). Оскільки проєктивний модуль P є прямим доданком вільного модуля A^m, модуль $I = DP$ є прямим доданком $D(A^m) = \omega_A^m$.

(6) $\Rightarrow$ (2). Нехай M — A-ґратка. Розглянемо точну послідовність $0 \to N \to P \to M \to 0$ з проєктивним модулем P. Оскільки всі ці модулі є ґратками, індукована послідовність

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(M, \omega_A) \to \operatorname{Hom}_A(P, \omega_A) \to \operatorname{Hom}_A(N, \omega_A) \to 0$$

також є точною, звідки $\mathrm{Ext}^1_A(M,\omega_A)=0$. Те саме виконується для модуля ω_A^m і для його прямого доданка I.

(3) $\Leftrightarrow$ (1). Відомо, що

$$\mathrm{inj.dim}\, I=\sup\left\{i \mid \mathrm{Ext}^i_A(A/L,I)\neq 0 \text{ для деякого лівого ідеалу } L\right\}=$$
$$=\sup\left\{i \mid \mathrm{Ext}^{i-1}_A(L,I)\neq 0 \text{ для деякого лівого ідеалу } L\right\}.$$

Оскільки кожен ідеал є ґраткою, (3) $\Rightarrow$ (1). Навпаки, якщо виконано умову (1) і M є ґраткою, вкладемо її у проєктивний модуль P. Тоді $\mathrm{Ext}^i_A(M,I)=\mathrm{Ext}^{i+1}_A(P/M,I)=0$ при $i\geq 1$, тобто виконується умова (3).

Твердження 2.2 доведено.

Категорія A-lat стає *точною* в розумінні [13], якщо ми будемо вважати *точними парами* (*конфляціями*) звичайні короткі точні послідовності, тобто трійки $N\xrightarrow{\alpha}M\xrightarrow{\beta}L$, де $\alpha=\mathrm{Ker}\,\beta$ і $\beta=\mathrm{Cok}\,\alpha$. Отже, в цій категорії *дефляції* — це епіморфізми модулів, а *інфляції* — це мономорфізми з ядрами без скруту (ми будемо часто користуватися цією термінологією). Ця точна категорія має достатньо проєктивних і ін'єктивних об'єктів, а саме, її проєктивними об'єктами є скінченнопороджені проєктивні модулі, а ін'єктивними об'єктами — L-ін'єктивні ґратки. Щоб побудувати конфляцію $M\to I\to N$ з L-ін'єктивною I, достатньо дуалізувати точну послідовність $0\to L\to P\to DM\to 0$ з проєктивним P.

Для ґраток M,N ми писатимемо $M\searrow N$ (відповідно $N\nearrow M$), якщо існує дефляція $M^r\to N$ (відповідно інфляція $N\to M^r$) для деякого r. Зокрема, $A\searrow M$ і, дуально, $M\nearrow\omega_A$ для будь-якої ґратки M. Ми писатимемо $N\Subset M$, якщо N є прямим доданком M^r для деякого r, і $M\bowtie N$, якщо і $M\Subset N$, і $N\Subset M$. Оскільки A-lat — категорія Крулля – Шмідта, то запис $N\Subset M$ для нерозкладної ґратки N означає, що N є прямим доданком M, а $M\bowtie N$ означає, що M і N мають ту саму множину нерозкладних прямих доданків. Зауважимо, що відношення $\searrow,\nearrow$ і $\Subset$ транзитивні, а $\bowtie$ є відношенням еквівалентності.

Означення 2.1. *Нехай M — A-ґратка, $E=\mathrm{End}_A M$ і $O(M)=\mathrm{End}_E M$. Якщо природне відображення $A\to O(M)$ є ізоморфізмом, назвемо M строгою A-ґраткою. Очевидно, тоді M є точним модулем.*

Очевидно, $O(M)$ є надкільцем порядку $A/\mathrm{Ann}_A M$. За теоремою Бернсайда про щільність [8] (теорема 2.6.7) $O(M)$ можна ототожнити з підмножиною $\{a\in KA/\mathrm{Ann}\,KM \mid aM\subseteq M\}$. Зокрема, точна A-ґратка M є строгою тоді й тільки тоді, коли $\{a\in KA\mid aM\subseteq M\}=A$. Якщо ґратка N точна й $M\searrow N$ або $N\nearrow M$, то й M точна і $O(N)\supseteq O(M)$.

Твердження 2.3. *Для кожної A-ґратки M існує точна послідовність*

$$0\to O(M)\to M^n\to M^m \tag{2.1}$$

для деяких m,n. Зокрема, M є строгою тоді й тільки тоді, коли існує точна послідовність

$$0\to A\xrightarrow{\alpha}M^n\xrightarrow{\beta}M^m, \tag{2.2}$$

тобто $A\nearrow M$.

Доведення. Якщо $E=\mathrm{End}_A M$, то існує точна послідовність E-модулів $E^m\to E^n\to M\to 0$. Застосовуючи функтор $\mathrm{Hom}_E(\_,M)$, отримуємо точну послідовність (2.1). Якщо M строга, вона збігається з (2.2). Навпаки, якщо $A\nearrow M$, то, як зазначено вище, $A=O(A)\supseteq O(M)$, звідки $O(M)=A$.

Твердження 2.3 доведено.

***Наслідок* 2.1.** *A-ґратка M є строгою тоді й тільки тоді, коли існує точна послідовність*

$$M^m \to M^n \to \omega_A \to 0, \tag{2.3}$$

тобто $M \searrow \omega_A$.

Ми будемо також використовувати ще одну двоїстість, аналогічну двоїстості Метліса [15].

Теорема 2.1. *Покладемо $T_R = K\omega_R/\omega_R$ і позначимо $\hat{M} = \mathrm{Hom}_R(M, T_R)$. Функтор $M \mapsto \hat{M}$ індукує точну двоїстість між категоріями нетерових і артинових R-модулів.*

Доведення. *Крок* 1. Позначимо через γ_M природне відображення $M \to \hat{\hat{M}}$. Кожен KR-модуль V є ін'єктивним R-модулем і $\mathrm{Hom}_R(V, M) = 0 = \mathrm{Hom}_R(L, V)$ для будь-якого нетерова модуля M і для будь-якого періодичного R-модуля L. Оскільки $\mathrm{inj.dim}_R\, \omega_R = 1$, T_R також є ін'єктивним R-модулем. Тому функтор $M \mapsto \hat{M}$ є точним. Якщо R-модуль L періодичний, то застосуємо функтор $\mathrm{Hom}_R(L, \_)$ до точної послідовності $0 \to \omega_R \to K\omega_R \to T_R \to 0$. В результаті отримаємо, що $\hat{L} \simeq \mathrm{Ext}^1_R(L, \omega_R)$. Зокрема, $\hat{\hat{R}} = \hat{T}_R \simeq \mathrm{Ext}^1_R(T_R, \omega_R)$. Застосуємо до тієї ж точної послідовності функтор $\mathrm{Hom}_R(\_, \omega_R)$. Це дає $R = \mathrm{Hom}_R(\omega_R, \omega_R) \simeq \mathrm{Ext}^1_R(T_R, \omega_R) = \hat{T}_R$. Отже, γ_R і γ_{T_R} — ізоморфізми. Звичайний розгляд із застосуванням точної послідовності $R^m \to R^n \to M \to 0$ показує, що γ_M є ізоморфізмом для кожного нетерова R-модуля M.

Крок 2. Покажемо, що модуль $N = \hat{M}$ є артиновим, якщо M нетерів. Справді, якщо $N_1 \subset N$, то це занурення індукує сюр'єкцію $M = \hat{N} \xrightarrow{\alpha} \hat{N}_1$, причому $\mathrm{Ker}\, \alpha \simeq \widehat{N/N_1}$. Більш того, якщо $N_2 \subset N_1$, то отримуємо сюр'єкції $M \xrightarrow{\alpha} \hat{N}_1 \xrightarrow{\beta} \hat{N}_2$ такі, що $\mathrm{Ker}\, \beta\alpha \supset \mathrm{Ker}\, \alpha$. Отже, кожний спадний ланцюг підмодулів модуля $\hat{M}$ дає зростаючий ланцюг підмодулів у модулі M. Тому нескінченних спадних ланцюгів підмодулів у $\hat{M}$ не існує. Зокрема, модуль $T_R = \hat{R}$ є артиновим.

Крок 3. Нехай тепер модуль N є артиновим. Він містить простий підмодуль U. Оскільки $\mathrm{Hom}_R(U, T_R) \neq 0$ і T_R є ін'єктивним, існує ненульовий гомоморфізм $\alpha_0 \colon N \to T_R$. Оскільки $\mathrm{Ker}\, \alpha_0$ також є артиновим, існує ненульовий гомоморфізм $\mathrm{Ker}\, \alpha_0 \to T_R$, який продовжується до гомоморфізму $\alpha' \colon N \to T_R$. Нехай $\alpha_1 = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha' \end{pmatrix} \colon N \to T_R^2$. Тоді $\mathrm{Ker}\, \alpha_1 \subset \mathrm{Ker}\, \alpha_0$. Повторюючи цю процедуру, отримуємо гомоморфізми $\alpha_k \colon N \to T_R^k$ такі, що $\mathrm{Ker}\, \alpha_{k+1} \subset \mathrm{Ker}\, \alpha_k$, якщо $\mathrm{Ker}\, \alpha_k \neq 0$. Оскільки N є артиновим, на якомусь кроці отримаємо занурення $\beta \colon N \to T_R^m$. Оскільки $\mathrm{Cok}\, \beta$ також артинів, маємо точну послідовність $0 \to N \to mT_R \to nT_R$. З того, що відображення γ_{T_R} є ізоморфізмом, тепер випливає, що γ_N також ізоморфізм. Міркування, аналогічні кроку 2, показують, що модуль $\hat{N}$ є нетеровим.

Теорему 2.1 доведено.

Очевидно, якщо ми застосуємо цю двоїстість до A-модулів, то отримаємо двоїстість між категоріями лівих (правих) нетерових і правих (лівих) артинових A-модулів. Легко бачити, що при цьому категорія ґраток відображається на категорію артинових модулів без скінченних фактор-модулів.

Двоїстість $M \mapsto \hat{M}$ тісно пов'язана з двоїстістю D.

Твердження 2.4. *Нехай $0 \to M \xrightarrow{\alpha} N \to L \to 0$ — точна послідовність A-модулів, в якій M, N — ґратки, а L — скінченний модуль. Існує точна послідовність $0 \to DN \xrightarrow{D\alpha} DM \to \hat{L} \to 0$. Зокрема, якщо M — максимальний підмодуль в N, то DN є мінімальним надмодулем модуля DM, і навпаки.*

Доведення. У кроці 1 попереднього доведення ми встановили, що $\hat{L} \simeq \operatorname{Ext}^1_A(L, \omega_A)$. Зауважимо також, що $\operatorname{Hom}_A(L, \omega_A) = 0$. Тому результат одержується, якщо до даної точної послідовності застосувати функтор $\operatorname{Hom}_A(\_\,, \omega_A)$.

Нехай M — A-ґратка, $\mathfrak{r} = \operatorname{rad} A$. Оскільки $(DM)\mathfrak{r}$ є перетином максимальних підмодулів модуля DM, його двоїстий модуль $M^{\mathfrak{r}} = D((DM)\mathfrak{r})$ є сумою мінімальних надмодулів M. Якщо $\pi\colon P \xrightarrow{\pi} DM$ — проєктивне накриття DM, то двоїстий гомоморфізм $D\pi\colon M \to DP$ є інфляцією $\iota\colon M \to I$ такою, що I є L-ін'єктивною ґраткою, а ι індукує ізоморфізм $I^{\mathfrak{r}}/I \to M^{\mathfrak{r}}/M$. Ми називатимемо I (а інколи й відображення ι) *L-ін'єктивною оболонкою* модуля M. Ми також розглядатимемо ітеровані надмодулі $M^{\mathfrak{r}*k}$, поклавши $M^{\mathfrak{r}*1} = M^{\mathfrak{r}}$ і $M^{\mathfrak{r}*(k+1)} = (M^{\mathfrak{r}*k})^{\mathfrak{r}}$. Очевидно, $M^{\mathfrak{r}*k} = D((DM)\mathfrak{r}^k)$. Оскільки головний A-модуль P має єдиний максимальний підмодуль $\mathfrak{r}P$, коголовна A-ґратка I має єдиний мінімальний надмодуль $I^{\mathfrak{r}}$.

3. Бієктивні ґратки та ґоренштейнові порядки. Нехай A — R-порядок, $\mathfrak{r} = \operatorname{rad} A$. У цьому пункті будемо вважати порядок A *зв'язним*.

Означення 3.1. *A-ґратка B називається бієктивною* [6], *якщо вона і проєктивна, і L-ін'єктивна.*

Найважливіша властивість бієктивних ґраток — це так звана *лема про викидання* [6] (лема 2.9).

Лема 3.1. *Нехай B — бієктивна A-ґратка. Або існує єдине надкільце A' таке, що кожна A-ґратка M ізоморфна $B' \oplus M'$, де M' є A'-ґраткою, а $B' \Subset B$, або A спадковий і $A \Subset B$ (тоді $M \Subset B$ для кожної A-ґратки M).*

Кажуть, що A' отримується з A *викиданням* B, і позначають його через $A^-(B)$. Очевидно, якщо B нерозкладна, то $A^-(B)$ є мінімальним надкільцем порядку A.

Зауваження **3.1.** За двоїстістю DB також є бієктивною (правою) A-ґраткою і кожна права A-ґратка N ізоморфна $B' \oplus N'$, де $B' \Subset DB$, а N' — права A'-ґратка.

Доведення. Якщо $M \Subset B$, то M проєктивна. Тому якщо $M \Subset B$ для кожної A-ґратки M, то A є спадковим. Отже, можна вважати, що існують такі A-ґратки M, що $M \not\Subset B$. Очевидно, тоді існують і точні ґратки з цією властивістю. Якщо M є строгою A-ґраткою,то $A \nearrow M$. Оскільки B проєктивна, то $B \nearrow M$, звідки $B \Subset M$, оскільки B є L-ін'єктивною. Нехай $A' = \bigcap_M O(M)$, де M пробігає всі точні A-ґратки, які не мають прямих доданків $B' \Subset B$. Знайдеться скінченна множина таких ґраток $M_1, M_2, \ldots, M_n$, що $A' = O(N)$, де $N = \bigoplus_{i=1}^n M_i$. Якщо N є строгим, то $B \Subset N$, що неможливо. Тому $A' \supset A$ і кожна точна A-ґратка M без прямих доданків $B' \Subset B$ є A'-ґраткою. Нехай M — довільна A-ґратка, яка не має прямих доданків $B' \Subset B$, а $U_1, U_2, \ldots, U_s$ — всі попарно неізоморфні KA-модулі. Якщо M неточна, то один із них, нехай U_1, не є прямим доданком KM. Покажемо, що існує така A-ґратка $L \subset U_1$, що $L \not\Subset B$. Замінивши M на $M \oplus L$ і продовживши цю процедуру, отримаємо точну A-ґратку M' без прямих доданків $B' \Subset B$, таку що M є її прямим доданком. Тоді M', а тому й M, є A'-ґраткою.

Припустимо, що $L \Subset B$ для кожної A-ґратки $L \subset U_1$. Нехай C — проста компонента алгебри KA така, що U_1 є C-модулем, A_1 — проєкція A на C. Якщо M — довільна A_1-ґратка, то вона має ланцюг підмодулів, усі фактори якого — підмодулі U_1. Отже, вона проєктивна, а A_1 спадковий і є прямим множником A. Оскільки ми вважали A зв'язним, то $A_1 = A$, а $KA = C$ — проста K-алгебра, тому $M \Subset B$ для кожної A-ґратки.

Лему 3.1 доведено.

Щоб описати будову порядку $A^-(B)$, нам потрібно кілька простих лем.

Лема 3.2. 1. *Нехай P — головний A-модуль. Якщо всі модулі $\mathfrak{r}^i P$ нерозкладні й проєктивні, то A спадковий і кожна нерозкладна A-ґратка ізоморфна деякій $\mathfrak{r}^i P$.*

2. *Нехай I — коголовний A-модуль. Якщо всі модулі $I^{\mathfrak{r}*i}$ нерозкладні й L-ін'єктивні, то A спадковий і кожна нерозкладна A-ґратка ізоморфна деякій $I^{\mathfrak{r}*i}$.*

3. *Нехай P — головний A-модуль. Якщо $\mathfrak{r}P \simeq P$, то порядок A є максимальним, а P — єдина нерозкладна A-ґратка.*

4. *Нехай I — коголовний A-модуль. Якщо $I^{\mathfrak{r}} \simeq I$, то порядок A є максимальним, а I — єдина нерозкладна A-ґратка.*

Доведення. 1. З цієї умови випливає, що $\mathfrak{r}^{i+1}P$ — єдиний максимальний підмодуль у $\mathfrak{r}^i P$. Тому кожен підмодуль P збігається з деяким $\mathfrak{r}^i P$, тобто є проєктивним і нерозкладним. Тоді KP — простий KA-модуль, отже, є така проста компонента C алгебри KA, що KP є KA-модулем. Якщо V — довільний C-модуль, то він є кратним KP. Отже, якщо $M \subset V$ є ґраткою, вона має ланцюг підмодулів, усі фактори якого — підмодулі KP. Звідси випливає, що M є проєктивним. Зокрема, проєкція A_1 порядку A на C є проєктивною, тобто є прямим доданком A як A-модуля. Очевидно, тоді A_1 є прямим множником A, а тому $A = A_1$.

Друге твердження леми є двоїстим до першого.

3. Якщо $\mathfrak{r}P \simeq P$, то $\mathfrak{r}^k P \simeq P$ для всіх k, отже, всі вони головні. Так само, як у пункті 1, з цього випливає, що алгебра A є простою, а P — єдина нерозкладна A-ґратка. Зокрема, A — максимальний порядок.

Четверте твердження двоїсте до третього.

Лему 3.2 доведено.

Лема 3.3. *Припустимо, що порядок A не є спадковим. Нехай B — нерозкладна бієктивна A-ґратка, $A' = A^-(B)$. Тоді $B^{\mathfrak{r}} \not\simeq B$, $\mathfrak{r}B \not\simeq B$, $B^{\mathfrak{r}}$ є проєктивною, а $\mathfrak{r}B$ — L-ін'єктивною A'-ґраткою.*

Доведення. $B^{\mathfrak{r}} \not\simeq B$ і $\mathfrak{r}B \not\simeq B$ за лемою 3.2. Тому вони є A'-ґратками і $A'B = B^{\mathfrak{r}}$. Головний A-модуль B є прямим доданком A, отже, $A \simeq B \oplus M$ для деякого M. Тоді $A' = A'A \simeq$ $\simeq A'B \oplus A'M = B^{\mathfrak{r}} \oplus A'M$, отже, $B^{\mathfrak{r}}$ є проєктивною над A'. За двоїстістю $\mathfrak{r}B$ є L-ін'єктивною над A'.

Лема 3.4. 1. *Нехай P — головний A-модуль, M — його мінімальний надмодуль. Тоді M або є нерозкладним, або розкладається як $M_1 \oplus M_2$, де M_1, M_2 нерозкладні. У другому випадку $\mathfrak{r}P = \mathfrak{r}M_1 \oplus \mathfrak{r}M_2$ і ані M_1, ані M_2 не є проєктивним.*

2. *Нехай I — коголовний A-модуль, M — його максимальний підмодуль. Тоді M або є нерозкладним, або розкладається як $M_1 \oplus M_2$, де M_1, M_2 нерозкладні. У другому випадку $I^{\mathfrak{r}} = M_1^{\mathfrak{r}} \oplus M_2^{\mathfrak{r}}$ і ані M_1, ані M_2 не є L-ін'єктивним.*

3. *Нехай B — нерозкладна бієктивна A-ґратка. Її максимальний підмодуль та мінімальний надмодуль розкладаються одночасно. Більш того, якщо $\mathfrak{r}B$ є L-ін'єктивним, то $B^{\mathfrak{r}}$ є проєктивним, і навпаки.*

Доведення. 1. Оскільки $P \supseteq \mathfrak{r}M \supseteq \mathfrak{r}P$, то $\ell_A(M/\mathfrak{r}M) \leq 2$, тому M або нерозкладний, або розкладається як $M_1 \oplus M_2$, де M_1, M_2 нерозкладні. В останньому випадку $\ell_A(M_1/\mathfrak{r}M_1) = 1$, отже, $N = \mathfrak{r}M_1 \oplus M_2 \neq P$ — максимальний підмодуль у M, $N \cap P = \mathfrak{r}P$ і $M_1/\mathfrak{r}M_1 \simeq$ $\simeq M/N \simeq P/\mathfrak{r}P$. Оскільки $M_1 \not\simeq P$, він не може бути проєктивним. Те саме стосується M_2. Крім того, у цьому випадку $\ell_A(M/\mathfrak{r}M) = 2$, звідки $\mathfrak{r}P = \mathfrak{r}M = \mathfrak{r}M_1 \oplus \mathfrak{r}M_2$.

Друге твердження леми випливає з першого за двоїстістю.

3. Згідно з першим і другим твердженнями леми, якщо $B^{\mathfrak{r}}$ нерозкладний, таким є й $\mathfrak{r}B$, і навпаки. Припустимо, що $\mathfrak{r}B$ є L-ін'єктивним. Тоді він нерозкладний, отже, $B = (\mathfrak{r}B)^{\mathfrak{r}}$ є

єдиним мінімальним надмодулем $\mathfrak{r}B$. Тому B також є єдиним максимальним підмодулем у $B^{\mathfrak{r}}$. Отже, існує епіморфізм $\pi : P \to B^{\mathfrak{r}}$, де P є проєктивним. Якщо $P \simeq B$, то π є ізоморфізмом. Якщо $P \not\simeq B$, то він є A'-модулем, де $A' = A^{-}(B)$. За лемою 3.3 $B^{\mathfrak{r}}$ є проєктивним A'-модулем, а тоді π розщеплюється, отже, є ізоморфізмом. В обох випадках $B^{\mathfrak{r}}$ є проєктивним над A. Обернене твердження одержується за двоїстістю.

Лему 3.4 доведено.

Означення 3.2. *Нехай B — бієктивна B-ґратка.*

1. *B-ланка — це множина нерозкладних ґраток $\{B_1, B_2, \ldots, B_l\}$ така, що*
   $B_i \Subset B$ для всіх $i = 1, \ldots, l$,
   $B_i = \mathfrak{r}B_{i-1}$ при $i = 2, \ldots, l$ (рівносильно $B_{i-1} = B_i^{\mathfrak{r}}$),
   $\mathfrak{r}B_l \not\Subset B$ і $B_1^{\mathfrak{r}} \not\Subset B$.
2. *Для нерозкладної A-ґратки M визначимо $M^{\pm,B}$ таким чином:*
   якщо $M \not\Subset B$, то $M^{\pm,B} = M$;
   якщо $M \in \{B_1, B_2, \ldots, B_l\}$, де $\{B_1, B_2, \ldots, B_l\}$ — B-ланка, то $M^{+,B} = B_1^{\mathfrak{r}}$ і $M^{-,B} = \mathfrak{r}B_l$.

Позначимо через ι_M^B занурення $M^{-,B} \to M^{+,B}$.

Теорема 3.1. *Нехай порядок A не є спадковим, B — бієктивна A-ґратка, $A' = A^{-}(B)$. Якщо $A = \bigoplus_{i=1}^n P_i$, де P_i нерозкладні, то $A' = \bigoplus_{i=1}^n P_i^{+,B}$. Зокрема, всі модулі $P_i^{+,B}$ є проєктивними як A'-модулі і кожен головний A'-модуль ізоморфний прямому доданку деякого з $P_i^{+,B}$.*

***Зауваження* 3.2.** За двоїстістю, якщо $\omega_A = \bigoplus_{i=1}^n I_i$, де I_i нерозкладні, то $\omega_{A'} = \bigoplus_{i=1}^n I_i^{-,B}$. Зокрема, всі модулі $I^{-,B}$ є L-ін'єктивними як A'-модулі і кожен коголовний A'-модуль ізоморфний прямому доданку деякого з $I_i^{-,B}$.

Доведення. Будемо писати P_i' замість $P_i^{+,B}$. Очевидно, можна вважати, що $B = \bigoplus_{j=1}^m B_i$, де всі B_i нерозкладні й неізоморфні. Скористаємось індукцією по m. Нехай $m = 1$, тобто B нерозкладний. За лемою 3.3, $B^{\mathfrak{r}} \not\simeq B$, отже, $B' = B^{\mathfrak{r}}$ є A'-ґраткою і $A'B = B'$. Якщо P — головний модуль і $P \not\simeq B$, то $P' = P$ і є A'-ґраткою, тобто $A'P = P$. Отже, $A' = A'A = \bigoplus_{i=1}^n P_i'$.

Припустимо, що теорема правильна для $m-1$ доданка. Якщо $B_i^{\mathfrak{r}} \Subset B$ для всіх i, то $B_1^{\mathfrak{r}*k} \Subset B$ для всіх k, а тоді A є спадковим за лемою 3.2, що суперечить умові. Отже, можна вважати, що $B_1^{\mathfrak{r}} \not\Subset B$. Позначимо $A_1 = A^{-}(B_1)$, $\mathfrak{r}_1 = \operatorname{rad} A_1$. Тоді $A^{-}(B) = A_1^{-}(B')$, де $B' = \bigoplus_{i=2}^m B_i$. Якщо $\mathfrak{r}B_1 = B_2 \Subset B$, то B_1 — єдиний мінімальний надмодуль B_2. Оскільки $B_1^{\mathfrak{r}}$ — єдиний мінімальний надмодуль B_1 і B_1 не є A_1-ґраткою, з цього випливає, що $B_2^{\mathfrak{r}_1} = B_1^{\mathfrak{r}}$. Отже, $M^{+,B} = M^{+,B'}$ для кожної A_1-ґратки M. Якщо $P_i \simeq B_1$ при $i \le r$ і $P_i \not\simeq B_1$ при $i > r$, то $A_1 = A^{-}(B_1) = (\bigoplus_{i=1}^r P_i') \oplus (\bigoplus_{i=r+1}^n P_i)$. Більш того, $P_i'^{+,B'} = P_i'$ при $i \le r$ і $P_i^{+,B'} = P_i'$ при $i > r$. За припущенням індукції $A^{-}(B) = \bigoplus_{i=1}^n P_i'$.

Теорему 3.1 доведено.

Введемо клас порядків, який відіграє важливу роль у цих розглядах і взагалі в теорії порядків і ґраток. Наступний результат є безпосереднім наслідком тверджень 2.2, 2.3 і наслідку 2.1.

Твердження 3.1. *Нехай A є R-порядком. Тоді рівносильні таки умови:*

(1) *A є L-ін'єктивним як ліва A-ґратка;*

(2) *A є L-ін'єктивним як права A-ґратка;*

(3) *$A \Subset M$ для кожної строгої A-ґратки M;*

(4) *$\omega_A \Subset M$ для кожної строгої A-ґратки M;*

(5) *якщо M є строгою A-ґраткою, то $M \searrow N$ для кожної A-ґратки N;*

(6) *якщо M є строгою A-ґраткою, то $N \nearrow M$ для кожної A-ґратки N*;

(7) *кожна проєктивна A-ґратка є L-ін'єктивною*;

(8) *кожна L-ін'єктивна A-ґратка є проєктивною.*

Якщо ці умови виконано, A називається ґоренштейновим порядком [6].

Очевидно, кожен спадковий порядок є ґоренштейновим. Якщо A не є спадковим, позначаємо через A^- порядок $A^-(A)$. Він отримується з A викиданням усіх бієктивних (або, що в цьому випадку те саме, проєктивних) модулів. Для ґоренштейнових порядків теорему 3.1 можна істотно спростити завдяки наступному результату.

Лема 3.5. *Нехай A — неспадковий ґоренштейнів порядок, B — головний A-модуль. Тоді ані $B^{\mathfrak{r}}$, ані $\mathfrak{r}B$ не є проєктивною (або, що те саме, L-ін'єктивною).*

Доведення. Припустимо, що $P = B^{\mathfrak{r}}$ є проєктивним, а тому й бієктивним. За лемою 3.4 він нерозкладний, а тому $\mathfrak{r}P = B$. Нехай $N = P^{\mathfrak{r}}$. Тоді $\mathfrak{r}N \supseteq \mathfrak{r}P = B$. Якщо $\mathfrak{r}N = B$, то $B^{\mathfrak{r}} \supseteq N$, що неможливо. Отже, $\mathfrak{r}N = P$, а тому $N/\mathfrak{r}N$ — простий модуль. Тому існує сюр'єкція $P' \to N$, де P' є головним модулем, а тоді й сюр'єкція $\mathfrak{r}P' \to P$. Отже, P є прямим доданком $\mathfrak{r}P'$. За лемою 3.4 $\mathfrak{r}P' \simeq P$, звідки $P' \simeq N$, а тоді $N = B^{\mathfrak{r}*2}$ також є бієктивним. Продовжуючи цей розгляд, бачимо, що всі ґратки $B^{\mathfrak{r}*k}$ є бієктивними. За лемою 3.2 A є спадковим, що суперечить умові. Тому $B^{\mathfrak{r}}$ не може бути проєктивним. Твердження про $\mathfrak{r}B$ одержуємо за двоїстістю.

Лему 3.5 доведено.

***Наслідок* 3.1.** *Нехай A — неспадковий ґоренштейнів порядок, $A = \bigoplus_{i=1}^n P_i$, де P_i нерозкладні, $P_i' = P_i^{\mathfrak{r}}$, а B — бієктивна A-ґратка. Припустимо, що $P_i \mathrel{\in_{\oplus}} B$ при $i \le k$ і $P_i \mathrel{\not\in_{\oplus}} B$ при $i > k$. Тоді $A^-(B) = (\bigoplus_{i=1}^k P_i') \oplus (\bigoplus_{i=k+1}^n P_i)$. Більш того, $\mathfrak{r}P_i$ і $P_i^{\mathfrak{r}}$ є $A^-(B)$-ґратками для всіх i. Зокрема, $A^- = \bigoplus_{i=1}^k P_i'$, а $\mathfrak{r}$ і $A^{\mathfrak{r}}$ є A^--ґратками* (*і лівими, і правими*).

Доведення безпосередньо випливає з теореми 3.1 і леми 3.5.

Для ґоренштейнових порядків справедливим є твердження, обернене до леми 3.1.

Твердження 3.2. *Якщо A ґоренштейнів, то кожне його мінімальне надкільце має вигляд $A^-(B)$, де B є нерозкладною бієктивною A-ґраткою.*

Доведення. Якщо кожна проєктивна (або, що те саме, бієктивна) A-ґратка є насправді A'-ґраткою, то $A' = A$. Отже, існує нерозкладна бієктивна A-ґратка B, яка не є A'-ґраткою. Тоді $A' \supseteq A^-(B)$. Оскільки A' мінімальне, $A' = A^-(B)$.

4. Бассові порядки. Нагадаємо, що порядок A називається *бассовим* [9], якщо всі його надкільця (включаючи A) ґоренштейнові. З результатів попереднього пункту випливає такий критерій [6] (теорема 3.1).

Твердження 4.1. *Наступні умови рівносильні*:

(1) *A — бассів порядок,*

(2) *$M \searrow O(M)$ для кожної A-ґратки M,*

(3) *якщо $M \searrow N$ для деяких A-ґраток M, N, то $N \nearrow M$,*

(4) *якщо $N \nearrow M$ для деяких A-ґраток M, N, то $M \searrow N$.*

Отже, якщо порядок є Моріта-еквівалентним до бассова порядку, то він також є бассовим.

***Приклад* 4.1.** 1. Кожен спадковий порядок є бассовим.

2. Якщо кожен ідеал A має два твірних, то A є бассовим. Це випливає з [18] у випадку, коли R є кільцем дискретної оцінки. У загальному випадку доведення залишається таким самим.

3. Нехай Δ — максимальний порядок у тілі, $\mathfrak{d} = \operatorname{rad}\Delta$, $B(k,\Delta)$ — підкільце $\operatorname{Mat}(2,\Delta)$, яке складається з таких матриць (a_{ij}), що $a_{12} \in \mathfrak{d}^k$. Це бассів порядок (спадковий, якщо $k = 1$). Ми писатимемо символічно $B(k,\Delta) = \begin{pmatrix} \Delta & \mathfrak{d}^k \\ \Delta & \Delta \end{pmatrix}$.

У [9] встановлено, що кожен зв'язний бассів порядок є або спадковим, або Моріта-еквівалентним до локального порядку, кожен ідеал якого має два твірних, або Моріта-еквівалентним до деякого порядку $B(k,\Delta)$. Ми отримаємо цей опис як наслідок наступної теореми, яка узагальнює теорему 3.3 [6].

Теорема 4.1. *Нехай A — зв'язний немаксимальний порядок, P — нерозкладна бієктивна A-ґратка і $A_1 = A^-(P)$. Якщо $P^{\mathfrak{r}} \simeq \mathfrak{r}P$, то мають місце такі твердження*:

(1) *Існують ланцюги надмодулів $P = P_0 \subset P_1 \subset P_2 \subset \ldots \subset P_m$ і надкілець $A = A_0 \subset \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_m$ такі, що для кожного $0 \le i < m$*:

(a) $P_{i+1} = P_i^{\mathfrak{r}_i} \simeq \mathfrak{r}_i P_i$, *де* $\mathfrak{r}_i = \operatorname{rad} P_i$;

(b) *P_i є нерозкладною бієктивною A_i-ґраткою, яка не є проєктивною над A_{i-1} (а отже, й над A), якщо $i \neq 0$*;

(c) *A_i є немаксимальним і $A_{i+1} = A_i^-(P_i)$.*

(2) *Якщо цей ланцюг має найбільшу довжину, то A_m є спадковим порядком, має щонайбільше дві неізоморфні нерозкладні ґратки, а кожна нерозкладна A-ґратка ізоморфна або до P_i при деякому $0 \le i < m$, або до прямого доданка P_m.*

(3) *A є Моріта-еквівалентним або до локального бассова порядку $E = (\operatorname{End}_A P)^{\mathrm{op}}$, або до бассова порядку $B(k,\Delta)$ для деяких k і Δ.*

Умова $P^{\mathfrak{r}} \simeq \mathfrak{r}P$ виконується, якщо $P^{\mathfrak{r}}$ не має L-ін'єктивних над A прямих доданків, але є L-ін'єктивною як A_1-ґратка, або за двоїстістю, якщо $\mathfrak{r}P$ не має проєктивних над A прямих доданків, але є проєктивною над A_1.

Зауважимо, що, згідно з лемою 3.5, $P^{\mathfrak{r}}$ не може мати L-ін'єктивних доданків, якщо A є ґоренштейновим.

Доведення. Насамперед доведемо останнє твердження. З теореми 3.1 випливає, що L-ін'єктивна ґратка над A_1 є або L-ін'єктивною над A, або прямим доданком $\mathfrak{r}P$. Якщо $P^{\mathfrak{r}}$ не має L-ін'єктивних доданків над A, але є L-ін'єктивним над A_1, то кожний прямий доданок $P^{\mathfrak{r}}$ є ізоморфним прямому доданку $\mathfrak{r}P$. За лемою 3.4 або $P^{\mathfrak{r}}$ і $\mathfrak{r}P$ нерозкладні, або $P^{\mathfrak{r}} = L_1 \oplus L_2$ і $\mathfrak{r}P = \mathfrak{r}L_1 \oplus \mathfrak{r}L_2$, де $L_1, L_2, \mathfrak{r}L_1, \mathfrak{r}L_2$ нерозкладні. З цього випливає, що $P^{\mathfrak{r}} \simeq \mathfrak{r}P$.

Нехай $P_1 = P^{\mathfrak{r}} \simeq \mathfrak{r}P$. Оскільки A не максимальний, $P_1 \not\simeq P$ за лемою 3.2. Тому ланцюги надмодулів і надкілець, які мають властивості (a)–(c), існують: наприклад, $P = P_0 \subset P_1 = P^{\mathfrak{r}}$ і $A = A_0 \subset A_1 = A^-(P)$. Оскільки не існує нескінченних ланцюгів надкілець, розглянемо найдовший ланцюг із цією властивістю. З леми 3.3 і теореми 3.1 випливає, що:

P_i є бієктивною A_i-ґраткою, але не є проєктивною над A_{i-1} (а отже, й над A), якщо $i \neq 0$;

якщо $i < m$, то кожна нерозкладна A-ґратка або ізоморфна одному з модулів $P_0, P_1, \ldots, P_i$, або є A_{i+1}-модулем;

кожний головний A_i-модуль або є проєктивним над A, або ізоморфний прямому доданку P_i (а отже, ізоморфний P_i, якщо $i < m$).

Якщо $i < m$, то $P_{i-1} \neq \mathfrak{r}_i P_i$, оскільки P_{i-1} не є A_i-ґраткою, але $\mathfrak{r}_i P_i \supseteq \mathfrak{r}_{i-1} P_{i-1}$. Якщо $\mathfrak{r}_i P_i = \mathfrak{r}_{i-1} P_{i-1} \simeq P_i$, то A_i є максимальним, що суперечить умові. Отже, $\mathfrak{r}_i P_i \cap P_{i-1} = \mathfrak{r}_{i-1} P_{i-1}$ і $\mathfrak{r}_i P_i + P_{i-1} = P_i$, звідки

$$P_i/\mathfrak{r}_i P_i \simeq P_{i-1}/\mathfrak{r}_{i-1} P_{i-1} \simeq P_{i-2}/\mathfrak{r}_{i-2} P_{i-2} \simeq \ldots \simeq P/\mathfrak{r}P. \tag{4.1}$$

Оскільки $\mathfrak{r}_i P_i \simeq P_{i+1}$ і $\mathfrak{r}_{i-1} P_{i-1} \simeq P_i$, також маємо, що

$$P_{i+1}/P_i \simeq P_i/P_{i-1} \simeq P_{i-1}/P_{i-2} \simeq \ldots \simeq P_1/P. \tag{4.2}$$

Припустимо спочатку, що P_m розкладається: $P_m = L_1 \oplus L_2$, де L_1 і L_2 нерозкладні й непроєктивні над A_{m-1} (а отже, й над A) за лемою 3.4. Оскільки $\mathfrak{r}_{i-1}P_m = \mathfrak{r}_{i-1}L_1 \oplus \mathfrak{r}_{i-1}L_2 \simeq \simeq L_1 \oplus L_2$ і $\mathfrak{r}_{i-1}L_1, \mathfrak{r}_{i-1}L_2$ є нерозкладними, або $\mathfrak{r}_{i-1}L_1 \simeq L_1$ і $\mathfrak{r}_{i-1}L_2 \simeq L_2$, або $\mathfrak{r}_{i-1}L_1 \simeq L_2$ і $\mathfrak{r}_{i-1}L_2 \simeq L_1$. В обох випадках всі підмодулі модулів L_1 і L_2 проєктивні й ізоморфні або до L_1, або до L_2. Тому всі нерозкладні A_m-ґратки ізоморфні або L_1, або L_2, A_m спадковий і $P_0, P_1, \ldots, P_{m-1}, L_1, L_2$ — це всі нерозкладні A-ґратки. Отже, $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ — це всі неспадкові надкільця A, а тому A бассовий. P — єдиний головний A-модуль, тому A є Моріта-еквівалентним до локального бассова порядку $E = \mathrm{End}_A P$.

Нехай тепер P_m є нерозкладним. Зауважимо, що $P_{m-1} \supseteq \mathfrak{r}_{i-1}P_m \supseteq \mathfrak{r}_{i-1}P_{m-1}$. Припустимо, що P_m є проєктивним як A_{m-1}-модуль. Тоді $\mathfrak{r}_{i-1}P_m = P_{m-1}$. Навпаки, якщо $\mathfrak{r}_{i-1}P_m = P_{m-1}$, тобто $\ell_{A_{m-1}}(P_m/\mathfrak{r}_{i-1}P_m) = 1$, то існує епіморфізм $\varphi\colon P' \to P_m$, де P' — головний A_{m-1}-модуль. Якщо $P' = P_{m-1}$, то φ є ізоморфізмом, оскільки $\mathrm{wd}(P_{m-1}) = \mathrm{wd}(P_m)$. Інакше, P' є A_m-модулем, а тоді $P' \simeq P_m$, оскільки P_m також є проєктивним над A_m. Отже, P_m є проєктивним над A_{m-1}, а тому й над A. Оскільки $\mathfrak{r}_{m-1}P_m \simeq P_{m-1}$ і $\mathfrak{r}_{m-1}P_{m-1} \simeq P_m$, з леми 3.2 випливає, що A_{m-1} є спадковим і P_{m-1} та P_m — це всі його нерозкладні модулі. Покладемо $\Delta = \mathrm{End}_A P_m$, $\mathfrak{d} = \mathrm{rad}\,\Delta$. Це максимальний порядок і також $\mathrm{End}_A P_{m-1} \simeq \Delta$ [4]. Оскільки $P_m \not\simeq P$, фактор-модулі P_m/P_{m-1} і $P/\mathfrak{r}P$ неізоморфні. З ізоморфізмів (4.1) та (4.2) випливає, що для кожного $i < m$ P_{i-1} є єдиним максимальним підмодулем у P_i таким, що $P_i/P_{i-1} \simeq P_m/P_{m-1}$. Тому $\varphi(P_{i-1}) \subseteq P_{i-1}$ для кожного ендоморфізму $\varphi \in \mathrm{End}_A P_i$, отже, $\mathrm{End}_A P_i \simeq \Delta$ для всіх i. Зокрема, $\mathrm{End}_A P \simeq \Delta$. Оскільки P і P_m — це всі головні A-модулі, A є Моріта-еквівалентним до кільця $\tilde{A} = \big(\mathrm{End}_A(P \oplus P_m)\big)^{\mathrm{op}}$. Оскільки кожен Δ-ідеал (правий чи лівий) збігається з $\mathfrak{d}^k$ для деякого k,

$$\tilde{A} \simeq \begin{pmatrix} \Delta & \mathfrak{d}^k \\ \mathfrak{d}^l & \Delta \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \Delta & \mathfrak{d}^{k+l} \\ \Delta & \Delta \end{pmatrix} = B(k+l, \Delta)$$

для деяких k, l.

Нехай тепер P_m є нерозкладним і непроєктивним над A_{m-1}. Тоді $\mathfrak{r}_{m-1}P_m = \mathfrak{r}_{m-1}P_{m-1}$ і $P_m \supset \mathfrak{r}_m P_m \supseteq \mathfrak{r}_{m-1}P_{m-1}$. Якщо $\mathfrak{r}_m P_m = \mathfrak{r}_{m-1}P_{m-1} \simeq P_m$, то A_m — максимальний порядок і P_m — єдина нерозкладна A_m-ґратка. Тому $P_0, P_1, \ldots, P_m$ — це всі нерозкладні A-ґратки, $A_0, A_1, \ldots, A_m$ — всі надкільця A і A є бассовим. Більш того, P — єдиний головний A-модуль, отже, A є Моріта-еквівалентним до $E = \mathrm{End}_A P$.

Якщо ж P_m є нерозкладним, непроєктивним над A_{m-1} і $P_{m-1} \neq \mathfrak{r}_m P_m \neq \mathfrak{r}_{i-1}P_{i-1}$, то $\mathfrak{r}_m P_m$ є мінімальним надмодулем $\mathfrak{r}_{m-1}P_{m-1} \simeq P_m$. Тому $\mathfrak{r}_m P_m \simeq P_m^{\mathfrak{r}_m}$. Отже, якщо ми покладемо $P_{m+1} = P_m^{\mathfrak{r}_m}$, $A_{m+1} = A_m^-(P_m)$, то отримаємо довші ланцюги надкілець і надмодулів, які задовольняють умови (a) – (c), що неможливо.

Теорему 4.1 доведено.

***Наслідок* 4.1** ([6], теорема 3.3)**.** *Нехай A — зв'язний ґоренштейнів порядок. Якщо хоча б одне з його мінімальних надкілець також є ґоренштейновим, то A — бассів порядок, причому він є або спадковим, або Моріта-еквівалентним до локального бассова порядку, або Моріта-еквівалентним до порядку $B(k, \Delta)$ для деяких k і Δ.*

Доведення випливає з теореми 4.1, леми 3.5 і твердженням 3.2.

***Наслідок* 4.2** ([6], твердження 3.7)**.** *Нехай A — локальний ґоренштейнів порядок, $A' = A^-(A)$ — його мінімальне надкільце. Якщо A' не є локальним, то воно є спадковим, а A — бассовим.*

Доведення. За твердженням 3.2 $A' = A^{-}(A)$. Якщо A' не є локальним, то $A' = P_1 \oplus P_2$, де обидва модулі P_i — головні A'-модулі, а $\mathfrak{r}P_i$ — коголовні A'-ґратки. Зокрема, $\operatorname{rad} A' = \mathfrak{r}$. Нехай P_1' — мінімальний надмодуль P_1, а M — максимальний підмодуль у P_1'. Тоді $M = P_1$, інакше, $M \cap P_1 = \mathfrak{r}P_1$, тобто M є мінімальним надмодулем $\mathfrak{r}P_1$, що неможливо, оскільки P_1 — єдиний мінімальний надмодуль $\mathfrak{r}P_1$. Отже, P_1 — єдиний максимальний підмодуль у P_1', тому існує епіморфізм $\varphi\colon P \to P_1'$ для деякого головного A'-модуля P. Якщо $P = P_1$, то φ є ізоморфізмом. Якщо $P = P_2$, то φ індукує епіморфізм $\varphi'\colon \mathfrak{r}P_2 \to \mathfrak{r}P_1' = P_1$. Оскільки $\mathfrak{r}P_2$ нерозкладний, φ' є ізоморфізмом, а тому таким є й φ. Отже, або $P_1' \simeq P_1$, або $P_1' \simeq P_2$. Так само, якщо P_2' — мінімальний надмодуль P_2, то або $P_2' \simeq P_1$, або $P_2' \simeq P_2$. Тепер з леми 3.2 випливає, що A' спадковий, а A бассів.

Наслідок 4.2 доведено.

5. Стабільні категорії.

Означення 5.1. 1. *Нехай $\mathcal{C}$ — адитивна категорія, $\mathfrak{S}$ — деяка множина її морфізмів. Позначимо через $\langle\mathfrak{S}\rangle$ ідеал у $\mathcal{C}$, породжений $\mathfrak{S}$, тобто такий, що складається з морфізмів форми $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\sigma_i\beta_i$, де $\sigma_i \in \mathfrak{S}$. Фактор-категорію $\mathcal{C}/\langle\mathfrak{S}\rangle$ позначимо $\mathcal{C}^{\mathfrak{S}}$. Її об'єкти — ті самі, що й у $\mathcal{C}$, а множина морфізмів з M до N — це $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}^{\mathfrak{S}}(M,N) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(M,N)/\mathfrak{S}(M,N)$, де $\mathfrak{S}(M,N) = \langle\mathfrak{S}\rangle \cap \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(M,N)$.*

2. *Категорію $A\text{-mod}^{\langle 1_A\rangle}$ позначають $\underline{A\text{-mod}}$, а її множини морфізмів — $\underline{\operatorname{Hom}}_A(M,N)$. Очевидно, вона збігається з $A\text{-mod}^{\mathfrak{P}}$, де $\mathfrak{P} = \{1_{P_1}, 1_{P_2}, \ldots, 1_{P_n}\}$, а $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — повний список неізоморфних головних A-модулів. Якщо A є порядком, то повна підкатегорія в $A\text{-mod}^{\langle 1_A\rangle}$, яка складається з A-ґраток, збігається з $A\text{-lat}^{\langle 1_A\rangle}$ і позначається $\underline{A\text{-lat}}$. Ми називаємо її стабільною категорією порядку A.*

3. *Аналогічно, категорію $A\text{-lat}^{\langle 1_{\omega_A}\rangle}$ позначають $\overline{A\text{-lat}}$, а її множини морфізмів — $\overline{\operatorname{Hom}}_A(M,N)$. Вона збігається з $A\text{-lat}^{\mathfrak{I}}$, де $\mathfrak{I} = \{1_{I_1}, 1_{I_2}, \ldots, 1_{I_n}\}$, а $I_1, I_2, \ldots, I_n$ — повний список неізоморфних коголовних A-ґраток. Ми називаємо її костабільною категорією порядку A.*

Двоїстість D індукує двоїстість між категоріями $\underline{A\text{-lat}}$ та $\overline{A^{\mathrm{op}}\text{-lat}}$. Якщо A ґоренштейнів, то стабільна й костабільна категорії збігаються.

Ми побачимо, що всі R-модулі $\underline{\operatorname{Hom}}_A(M,N)$ і $\overline{\operatorname{Hom}}_A(M,N)$ є скінченними. Більш того, можна оцінити їхні анулятори.

Лема 5.1. *Нехай A_0 — спадкове (наприклад, максимальне) надкільце порядку A, $\mathfrak{c} = \operatorname{Ann}_R(A_0/A)$. Тоді $\mathfrak{c}^2\,\underline{\operatorname{Hom}}_A(M,N) = \mathfrak{c}^2\,\overline{\operatorname{Hom}}_A(M,N) = 0$ для будь-яких A-ґраток.*

Доведення. Нехай M і N — A-ґратки, $\lambda, \mu \in \mathfrak{c}$. Розглянемо $A_0M \subset KM$. Тоді $\lambda A_0 M \subseteq M$. Оскільки A_0 спадковий, A_0M є проєктивним A_0-модулем. Тому A_0M є прямим доданком вільного A_0-модуля F', який можна ототожнити з A_0F, де F — деякий вільний A-модуль. Кожен гомоморфізм $f : M \to N$ продовжується до гомоморфізму $A_0M \to A_0N$, а тому й до гомоморфізму $g\colon F' \to A_0N$. Більш того, $F \supseteq \lambda F' \supseteq \lambda M$ і $\operatorname{Im}(\mu g) \subseteq \mu A_0 N \subseteq N$. Тому гомоморфізм $\lambda\mu f$ можна розглядати як композицію

$$M \xrightarrow{\lambda} \lambda M \hookrightarrow F \xrightarrow{\mu g|_F} N.$$

Отже, гомоморфізм $\lambda\mu f$ пропускається через проєктивний модуль і його образ у $\underline{\operatorname{Hom}}_A(M,N)$ нульовий. За двоїстістю те саме є правильним і для $\overline{\operatorname{Hom}}_A(M,N)$.

Лему 5.1 доведено.

На стабільних категоріях визначено два важливих функтори. Нехай $\pi : P \to M$ — проєктивне накриття скінченнопородженого A-модуля M, $\Omega M = \operatorname{Ker} \pi$. Зауважимо, що ΩM завжди є A-ґраткою, ненульовою, якщо M не є проєктивним. Якщо M є непроєктивною ґраткою, то ΩM не є L-ін'єктивною (інакше, π розщеплюється). Якщо $\pi' : P' \to M'$ — проєктивне накриття M', то будь-який гомоморфізм $\alpha : M \to M'$ піднімається до гомоморфізму $P \to P'$, а тому індукує гомоморфізм $\gamma : \Omega M \to \Omega M'$. Якщо γ' походить з іншого підйому α, то легко перевірити, що $\gamma - \gamma'$ пропускається через P. Тому клас γ у стабільній категорії $\underline{A\text{-mod}}$ або $\underline{A\text{-lat}}$ однозначно визначений і Ω можна розглядати як ендофунктор на стабільній категорії. Якщо скористатися L-ін'єктивними оболонками, то отримаємо аналогічний функтор Ω' на костабільній категорії $\overline{A\text{-lat}}$. Якщо A ґоренштейновий, то проєктивне накриття M одночасно є L-ін'єктивною оболонкою ΩM, тому Ω' є квазіоберненим до функтора Ω і обидва вони є автоморфізмами стабільної категорії.

Нехай тепер $P_1 \xrightarrow{\psi} P_0 \xrightarrow{\varphi} M \to 0$ є *мінімальним проєктивним представленням* скінченнопородженого A-модуля M, тобто такою точною послідовністю, в якій модулі P_0, P_1 проєктивні, $\operatorname{Ker} \varphi \subseteq \mathfrak{r} P_0$ і $\operatorname{Ker} \psi \subseteq \mathfrak{r} P_1$. Застосуємо до цієї послідовності функтор ${}^\vee = \operatorname{Hom}_A(\_\,, A)$. В результаті отримаємо точну послідовність правих модулів

$$0 \to M^\vee \xrightarrow{\varphi^\vee} P_0^\vee \xrightarrow{\psi^\vee} P_1^\vee \to \operatorname{tr} M \to 0, \tag{5.1}$$

де $\operatorname{tr} M = \operatorname{Cok} \psi^\vee$. Знов-таки, неважко переконатися, що насправді ми отримуємо функтор $\operatorname{tr} : (\underline{A\text{-mod}})^{\mathrm{op}} \to \underline{A^{\mathrm{op}}\text{-mod}}$. Оскільки природне відображення $P \to P^{\vee\vee}$ є ізоморфізмом для кожного скінченнопородженого проєктивного модуля P, існує ізоморфізм функторів $\mathbf{1}_{\underline{A\text{-mod}}} \simeq \simeq \operatorname{tr}^2$. Зауважимо, що навіть якщо M є ґраткою, $\operatorname{tr} M$ може такою не бути.

Існує природний гомоморфізм $M^\vee \otimes_A N \to \operatorname{Hom}_A(M, N)$, який відображає $u \ v$ у гомоморфізм $x \mapsto u(x)v$. Легко бачити [2], що його образ збігається з $\mathfrak{P}(M, N)$. З точної послідовності (5.1) випливає, що $\operatorname{Tor}_1^A(\operatorname{tr} M, N) \simeq \underline{\operatorname{Hom}}_A(M, N)$.

Розглянемо поведінку категорій $\underline{A\text{-lat}}$ та $\overline{A\text{-lat}}$ при викиданні бієктивних ґраток.

Лема 5.2. *Припустимо, що порядок A не є максимальним. Нехай B — нерозкладна бієктивна A-ґратка, $A' = A^-(B)$, M, N — деякі A'-ґратки.*

1. *Обмеження $\gamma_+ : \operatorname{Hom}_A(B^{\mathfrak{r}}, M) \to \operatorname{Hom}_A(B, M)$ і $\gamma_- : \operatorname{Hom}_A(M, \mathfrak{r} B) \to \operatorname{Hom}_A(M, B)$ є бієктивними відображеннями.*

2. *Гомоморфізм $\alpha : M \to N$ пропускається через B тоді й тільки тоді, коли він пропускається через занурення $\mathfrak{r} B \to B^{\mathfrak{r}}$.*

Доведення. 1. Оскільки $B/\mathfrak{r}B$ є скінченним модулем, відображення γ_- ін'єктивне. Оскільки M не містить B як прямий доданок, $\operatorname{Im} \alpha \subseteq \mathfrak{r} B$ для кожного $\alpha : M \to B$. Тому γ_- бієктивне. Твердження відносно γ_+ є двоїстим.

Друге твердження леми є очевидним наслідком першого.

Теорема 5.1. *Нехай A — неспадковий порядок, B — бієктивна A-ґратка, $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — повний список неізоморфних головних A-модулів, $I_1, I_2, \ldots, I_n$ — повний список неізоморфних коголовних A-ґраток і $A' = A^-(B)$. Покладемо $\mathfrak{P}^B = \left\{ \iota^B_{P_i} \mid 1 \le i \le n \right\}$ і $\mathfrak{I}^B = = \left\{ \iota^B_{I_i} \mid 1 \le i \le n \right\}$. Тоді $\underline{A\text{-lat}} \simeq A'\text{-lat}^{\mathfrak{P}_B}$, а $\overline{A\text{-lat}} \simeq A'\text{-lat}^{\mathfrak{I}_B}$.*

Насправді це означає, що при визначенні $\underline{A\text{-lat}}$ (відповідно $\overline{A\text{-lat}}$) можна замінити A на A' і для кожної B-ланки $B_1, B_2, \ldots, B_l$ замінити у $\mathfrak{P}$ (відповідно у $\mathfrak{I}$) всі відображення 1_{B_i}, $1 \le i \le l$, зануреннями $\mathfrak{r} B_l \to B_1^{\mathfrak{r}}$.

Доведення. Якщо B нерозкладна, то це випливає з леми 5.2. Загальний випадок отримується індукцією за кількістю неізоморфних нерозкладних прямих доданків ґратки B із застосуванням теореми 3.1.

***Наслідок* 5.1.** *Нехай A — неспадковий ґоренштейнів порядок, $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — повний список неізоморфних головних A-модулів, ι_i — занурення $\mathfrak{r}P_i \to P_i^{\mathfrak{r}}$, $A' = A^-(A)$. Тоді* $\underline{A\text{-lat}} \simeq A'\text{-lat}^{\mathfrak{P}'}$, *де* $\mathfrak{P}' = \{\iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_n\}$.

Доведення випливає з теореми 5.1 і леми 3.5.

6. Майже розщеплювані послідовності. Нагадаємо деякі означення та результати (див. [2]). Нехай A — порядок, $\alpha: N \to M$ і $\beta: M \to N$ — гомоморфізми A-ґраток, де M — нерозкладна.

Означення 6.1. 1. *Гомоморфізм α називається майже розщеплюваним справа, якщо виконуються такі умови*:

(a) *α — нерозщеплюваний епіморфізм*;

(b) *кожний гомоморфізм $\xi: X \to M$, який не є розщеплюваним епіморфізмом, пропускається через α*;

(c) *якщо $\varphi: N \to N$ є таким, що $\alpha\varphi = \alpha$, то φ є ізоморфізмом.*

Зауважимо, що якщо виконуються умови (a) *і* (b), *то або виконується також умова* (c), *або $N = N_0 \oplus N_1$, де $N_0 \subset \operatorname{Ker}\alpha$, а обмеження α на N_1 є майже розщеплюваним справа.*

2. *Гомоморфізм β називається майже розщеплюваним зліва, якщо виконуються такі умови*:

(a) *β — нерозщеплювана інфляція*;

(b) *кожний гомоморфізм $\xi: X \to M$, який не є розщеплюваним мономорфізмом, пропускається через β*;

(c) *якщо $\varphi: N \to N$ є таким, що $\varphi\beta = \beta$, то φ є ізоморфізмом.*

Зауважимо, що якщо виконуються умови (a) *і* (b), *то або виконується також умова* (c), *або $N = N_0 \oplus N_1$, де $\operatorname{Im}\beta \subset N_1$, а β є майже розщеплюваним зліва, якщо його розглядати як гомоморфізм $M \to N_1$.*

3. *Нерозщеплювана точна послідовність A-ґраток $\varepsilon: 0 \to L \xrightarrow{\beta} N \xrightarrow{\alpha} M \to 0$, де M і L нерозкладні, називається майже розщеплюваною послідовністю, якщо виконуються такі умови*:

(a) *α є майже розщеплюваним справа*;

(b) *β є майже розщеплюваним зліва*;

(c) *для кожного гомоморфізму $\xi: X \to M$, який не є розщеплюваним епіморфізмом, точна послідовність $\varepsilon\xi$ є розщеплюваною*;

(d) *для кожного гомоморфізму $\eta: L \to X$, який не є розщеплюваним мономорфізмом, точна послідовність $\eta\varepsilon$ є розщеплюваною.*

Тут $\varepsilon\xi$ (відповідно $\eta\varepsilon$) — це підйом точної послідовності ε вздовж ξ (відповідно спуск ε вздовж η).

Очевидно, якщо майже розщеплюваний справа (або зліва) морфізм існує, то він є єдиним з точністю до автоморфізму модуля N. Так само, якщо майже розщеплювана послідовність з фіксованим членом M (або L) існує, то вона є єдиною з точністю до ізоморфізму члена L (відповідно M). Насправді, у категорії A-lat така послідовність існує для кожної непроєктивної нерозкладної ґратки M, так само, як і для кожної нерозкладної ґратки L, яка не є L-ін'єктивною. Доведення цього факту дослівно повторює доведення твердження 1.1 [1]. Ми лише нагадаємо основні кроки.

Функтор $\tau_A = D\Omega\,\mathrm{tr} : \underline{A\text{-lat}} \to \overline{A\text{-lat}}$ називається *трансляцією Ауслендера–Райтен*. Так само, як у [1] (твердження 1.1), доводиться, що

$$\operatorname{Ext}^1_A(N,\tau_A M)\simeq \widehat{\underline{\operatorname{Hom}}_A(M},N).$$

Нехай M — нерозкладна непроєктивна A-ґратка. Тоді кільце $\Lambda=\underline{\operatorname{Hom}}_A(M,M)$ є локальним. За двоїстістю $\widehat{\underline{\operatorname{Hom}}_A(M},M)$ має єдиний мінімальний Λ-підмодуль U. Якщо u — ненульовий елемент з U, то $u(\lambda)=0$ для кожного необоротного елемента $\lambda\in\Lambda$. Якщо $\xi\colon X\to M$ не є розщеплюваним епіморфізмом, то $\xi\varphi$ не є оборотним для кожного $\varphi\colon M\to X$, звідки $(u\xi)\varphi=u(\xi\varphi)=0$, тобто $u\xi=0$. Тоді те саме виконується для відповідного розширення $\varepsilon\in\operatorname{Ext}^1_A(M,\tau_A M)$, отже,

$$\varepsilon\colon\ 0\to\tau_A M\xrightarrow{\beta}E\xrightarrow{\alpha}M\to 0 \qquad (6.1)$$

є майже розщеплюваною послідовністю. Зауважимо, що якщо $0\to L\to N\to M\to 0$ є майже розщеплюваною послідовністю, то такою ж є і двоїста послідовність $0\to DM\to DN\to\to DL\to 0$. Тому якщо $L=\tau_A M$, то $DM\simeq\tau_A DL$ і $M\simeq D\tau_A DL\simeq\Omega\operatorname{tr}DL$. Отже, функтор τ_A має квазіобернений $\tau_A^{-1}=\Omega\operatorname{tr}D\colon\overline{A\text{-lat}}\to\underline{A\text{-lat}}$.

Нехай $M=\bigoplus_j M_j$ і $N=\bigoplus_i N_i$, де M_j і N_i — нерозкладні A-ґратки. Через $\operatorname{Rad}_A(M,N)$ позначимо множину таких гомоморфізмів $\varphi\colon M\to N$, що жодна компонента $\varphi_{ij}: M_j\to N_i$ не є ізоморфізмом. Очевидно, отримуємо ідеал категорії A-lat, який називається її *радикалом*. Можна розглядати його степені Rad^n_A, $n\in\mathbb{N}$, і $\operatorname{Rad}^\infty_A=\bigcap_{n=1}^\infty\operatorname{Rad}^n_A$. Гомоморфізми з $\operatorname{Rad}_A(M,N)\setminus\operatorname{Rad}^2_A(M,N)$ називаються *незвідними*. Фактор-модуль

$${}_NV_M=\operatorname{Rad}_A(M,N)/\operatorname{Rad}^2_A(M,N)$$

є скінченновимірним векторним простором над полем лишків $\Bbbk$. Зокрема, якщо ґратка M нерозкладна, то $F_M={}_MV_M$ є тілом, а для кожної ґратки N і ${}_NV_M$, і ${}_MV_N$ є скінченновимірними векторними просторами над F_M (відповідно правим і лівим). Нехай A-ind — множина класів ізоморфізму нерозкладних A-ґраток. Набір $\{F_M,\,{}_NV_M\mid M,N\in A\text{-ind}\}$ назвемо *AP-типом* порядку A і позначимо його AR_A. Він насправді є *типом* у розумінні [5], оскільки всі F_M є тілами, а ${}_NV_M$ є F_N-F_M-бімодулем. Якщо поле лишків $\Bbbk$ є алгебраїчно замкненим, то $F_M=\Bbbk$ для кожної нерозкладної ґратки M. Цей тип звичайно подається як сагайдак, вершини якого — це ґратки $M\in A$-ind, причому з вершини M до вершини N йде d_{NM} стрілок, де $d_{NM}=\dim_\Bbbk({}_NV_M)$. Він називається *сагайдаком Ауслендера – Райтен* порядку A. Очевидно, AP-тип порядку A^{op}-lat — це $(F_M^{\mathrm{op}},{}_MV_N)$. Зокрема, у сагайдаку Ауслендера – Райтен потрібно просто перевернути всі стрілки.

Якщо ґратка M нерозкладна і непроєктивна, то з означення майже розщеплюваної послідовності видно, що кожен гомоморфізм з $\operatorname{Rad}_A(N,M)$, як і кожен гомоморфізм з $\operatorname{Rad}_A(\tau_A M,N)$, пропускається через член E послідовності (6.1). Отже, якщо $E=\bigoplus_{i=1}^r E_i$, де всі E_i нерозкладні, то ${}_MV_N=0={}_NV_{\tau_A M}$, якщо $N\not\simeq E_i$ для всіх $1\le i\le r$, а ${}_MV_{E_i}$ і ${}_{E_i}V_{\tau_A M}$ всі ненульові. Зокрема, у сагайдаку Ауслендера – Райтен стрілки йдуть лише з кожного E_i до M і з $\tau_A M$ до кожного E_i. Зауважимо також, що якщо α_i — компоненти гомоморфізму α, а β_i — компоненти гомоморфізму β з послідовності (6.1), то $\sum_{i=1}^r\alpha_i\beta_i=0$.

Якщо модуль P головний, то образ кожного гомоморфізму $N\to P$, який не є розщеплюваним епіморфізмом, міститься в $\mathfrak{r}P$. Отже, якщо $\mathfrak{r}P=\bigoplus_{i=1}^r E_i$, де всі E_i нерозкладні, то у AP-типі серед просторів ${}_PV_N$ ненульовими є лише ${}_PV_{E_i}$. За двоїстістю, якщо ґратка I є коголовною, а $I^{\mathfrak{r}}=\bigoplus_{i=1}^r E_i$ з нерозкладними E_i, то серед просторів ${}_NV_I$ ненульовими є лише ${}_{E_i}V_I$.

Якщо ґратки M і N не є проєктивними, то кожен гомоморфізм з $\mathfrak{P}(M,N)$ належить $\mathrm{Rad}_A^2(M,N)$. Тому можна розглядати *стабільний АР-тип* (або *стабільний сагайдак Ауслендера – Райтен*) $\underline{\mathrm{AR}}_A$, що є частиною AR_A, в якій M,N пробігають лише неголовні нерозкладні ґратки. Дуально визначається *костабільний АР-тип* (або *костабільний сагайдак Ауслендера – Райтен*) $\overline{\mathrm{AR}}_A$, в якому M,N пробігають нерозкладні ґратки, які не є коголовними. Функтор τ_A індукує *трансляцію Ауслендера – Райтен* $\underline{AR}_A \xrightarrow{\sim} \overline{AR}_A$. Знов-таки, у ґоренштейновому випадку стабільні й костабільні типи чи сагайдаки збігаються.

Ми будемо використовувати наступний результат про незвідні морфізми між нерозкладними ґратками. Найімовірніше, він є відомим, але нам не вдалося знайти його в літературі.

Твердження 6.1. *Нехай M,N — нерозкладні ґратки, $\alpha\colon N\to M$ — незвідний морфізм. Є дві можливості*:

1) *α — мономорфізм, а його образ є прямим доданком деякого максимального підмодуля M*;

2) *α — епіморфізм N на прямий доданок деякого фактор-модуля N/L, де L — така L-незвідна підґратка в N, що N/L є ґраткою.*

Доведення. Нехай $M'=\mathrm{Im}\,\alpha$, ι — занурення $M'\to M$, а π — проєкція $N\to M'$. Якщо $M'=\bigoplus_{i=1}^m M_i$, де M_i нерозкладні, нехай ι_i і π_i — компоненти ι і π відносно цього розкладу. Тоді $\alpha=\sum_{i=1}^m \iota_i\pi_i$. Оскільки α незвідний, принаймні один із морфізмів ι_i чи π_i повинен бути оборотним. Припустимо, що один з ι_i оборотний. Тоді $m=1$ і α є епіморфізмом. Нехай L — така незвідна ненульова підґратка в $\mathrm{Ker}\,\alpha$, що $\mathrm{Ker}\,\alpha/L$, а тому й N/L також є ґраткою (якщо $\mathrm{Ker}\,\alpha$ L-незвідне, то $L=\mathrm{Ker}\,\alpha$). Тоді $\alpha=\xi\eta$, де η — епіморфізм $N\to N/L$, а $\xi\colon N/L\to M$. Якщо $\xi=\alpha\gamma$, то $\alpha=\alpha\gamma\eta$. Оскільки α незвідний, а N нерозкладна, $\gamma\eta$ повинен бути ізоморфізмом, що неможливо. Отже, ξ не пропускається через α, а тому є розщеплюваним епіморфізмом, тобто визначає M як прямий доданок N/L і маємо випадок 2.

Якщо ж оборотним є деякий з π_i, то також $m=1$ і α є мономорфізмом. Якщо M' — максимальний підмодуль у M, який містить $\mathrm{Im}\,\alpha$, то α пропускається через занурення $\mathrm{Im}\,\alpha\to M'$. Тому останнє повинно розщеплюватись і маємо випадок 1.

Твердження 6.1 доведено.

Ми вивчимо поведінку цих конструкцій при викиданні бієктивних ґраток. Насамперед доведено таке твердження.

Твердження 6.2. *Нехай B — бієктивна A-ґратка, $A'=A^-(B)$, M,N,L — деякі A'-ґратки.*

1. *Якщо $\alpha\colon N\to M$ майже розщеплюваний справа в A'-lat, то він є таким і в A-lat.*

2. *Якщо $\beta\colon M\to N$ майже розщеплюваний зліва в A'-lat, то він є таким і в A-lat.*

3. *Якщо $0\to L\to M\to N\to 0$ — майже розщеплювана послідовність у A'-lat, то вона є такою і в A-lat.*

Доведення. 1. Нехай X — деяка A-ґратка, $\xi\in\mathrm{Hom}_A(X,M)$ не є розщеплюваним епіморфізмом. Якщо $X \mathrel{\not\in_{\oplus}} B$, вона є A'-ґраткою, тому ξ пропускається через α. Якщо ж $X \mathrel{\in_{\oplus}} B$, то вона проєктивна, а тому, знов-таки, ξ пропускається через α.

Друге твердження є правильним за двоїстістю.

Третє твердження випливає з першого або другого.

Наступна теорема описує місце нових проєктивних модулів над порядком $A^-(B)$ у майже розщеплюваних послідовностях категорії A-lat. Аналогічний результат наведено в роботі [17].

Теорема 6.1. *Нехай B — нерозкладна бієктивна A-ґратка, $A'=A^-(B)$. Припустимо, що $B^{\mathfrak{r}}$ не є проєктивною над A (рівносильно, $\mathfrak{r}B$ не є L-ін'єктивною над A).*

1. *Якщо* $B^{\mathfrak{r}}$ *розкладається:* $B^{\mathfrak{r}} = M_1 \oplus M_2$, *то існують майже розщеплювані послідовності*

$$0 \to \mathfrak{r}M_1 \to B \to M_2 \to 0,$$
$$0 \to \mathfrak{r}M_2 \to B \to M_1 \to 0.$$

Зокрема, $\tau_A M_1 = \mathfrak{r}M_2$ *і* $\tau_A M_2 = \mathfrak{r}M_1$.

2. *Якщо* $B^{\mathfrak{r}}$ *нерозкладна, то* $B^{\mathfrak{r}}$ *має максимальний підмодуль* $X \neq B$ *й існує майже розщеплювана послідовність*

$$0 \to \mathfrak{r}B \to B \oplus X \xrightarrow{\alpha} B^{\mathfrak{r}} \to 0. \tag{6.2}$$

Зокрема, $\tau_A B^{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r}B$.

Доведення. Ґратка $B^{\mathfrak{r}}$ є проєктивною, а $\mathfrak{r}B$ — L-ін'єктивною над A' за лемою 3.3. Нехай M — прямий доданок $B^{\mathfrak{r}}$, $N = \tau_A M$ і $0 \to N \to E \to M \to 0$ — майже розщеплювана послідовність у $A\text{-lat}$. Якщо N не є L-ін'єктивною як A'-ґратка, то в $A'\text{-lat}$ є майже розщеплювана послідовність $0 \to N \to E' \to M' \to 0$. За твердженням 6.2 вона також є майже розщеплюваною в $A\text{-lat}$. Звідси випливає, що $M' \simeq M$, що неможливо, оскільки M проєктивна над A'. Отже, $\tau_A M$ є L-ін'єктивною як A'-ґратка, але не як A-ґратка. Тоді вона є прямим доданком $\mathfrak{r}B$. Зокрема, якщо $B^{\mathfrak{r}}$ нерозкладна, то $\tau_A B^{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r}B$.

Оскільки існує незвідний морфізм $B \to M$, B має бути прямим доданком E, тобто $E = B \oplus X$. Якщо $B^{\mathfrak{r}} = M_1 \oplus M_2$, то існує точна послідовність $0 \to \mathfrak{r}M_1 \to B \to M_2 \to 0$, і оскільки $KB \simeq KM_1 \oplus KM_2$, то $X = 0$. Якщо ж $B^{\mathfrak{r}}$ нерозкладна, то $KX \simeq KB$. Тому з твердження 6.1 випливає, що в майже розщеплюваній послідовності (6.2) обмеження α на X є ізоморфізмом на максимальний підмодуль у $B^{\mathfrak{r}}$, який не може збігатися з B.

***Зауваження* 6.1.** 1. Можливо, що у випадку 1 $M_1 \simeq M_2$, а у випадку 2 $X \simeq B$. Якщо ж $X \not\simeq B$, то вона є A'-ґраткою і $X = \mathfrak{r}' B^{\mathfrak{r}}$, де $\mathfrak{r}' = \operatorname{rad} A'$. Якщо ж $X \simeq B$, то $\mathfrak{r}' B^{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r}B^{\mathfrak{r}}$.

2. За лемою 3.5 умова „$B^{\mathfrak{r}}$ не є проєктивною" завжди виконується, якщо A є зв'язним, ґоренштейновим і неспадковим.

7. Ґоренштейнів і фробеніусів випадки. Якщо порядок A є ґоренштейновим, то функтор ${}^{\vee}\colon M \mapsto M^{\vee} = \operatorname{Hom}_A(M, A)$ є точною двоїстістю $A\text{-lat} \to A^{\mathrm{op}}\text{-lat}$. Комбінуючи його з двоїстістю $D\colon A^{\mathrm{op}}\text{-lat} \to A\text{-lat}$, отримуємо *еквівалентність Накаями* $\mathcal{N} = D^{\vee}\colon A\text{-lat} \to A\text{-lat}$. Вона відображає проєктивні модулі у проєктивні, тому її можна також розглядати як функтор на стабільній категорії $\underline{A\text{-lat}} \to \underline{A\text{-lat}}$. Наступний результат є аналогом твердження IV.3.6 [2].

Твердження 7.1. *Якщо порядок* A *є ґоренштейновим, то функтори* τ_A, $\Omega\mathcal{N}$ *і* $\mathcal{N}\Omega$ *ізоморфні.*

Доведення. Нехай M — непроєктивна A-ґратка. Розглянемо точну послідовність

$$0 \to N \xrightarrow{\alpha} P_1 \xrightarrow{\beta} P_0 \xrightarrow{\gamma} M \to 0,$$

де $P_1 \xrightarrow{\beta} P_0 \xrightarrow{\gamma} M \to 0$ — мінімальне проєктивне зображення M. Вона дає точну послідовність

$$0 \to M^{\vee} \xrightarrow{\gamma^{\vee}} P_0^{\vee} \xrightarrow{\beta^{\vee}} P_1^{\vee} \xrightarrow{\alpha^{\vee}} N^{\vee} \to 0.$$

Отже, $N^{\vee} \simeq \operatorname{tr} M$ і $\Omega \operatorname{tr} M \simeq \operatorname{Im} \beta^{\vee}$. Тепер точна послідовність

$$0 \to D(\operatorname{Im}\beta^\vee) \to P_0^{\vee\vee} \to DM^\vee \to 0$$

показує, що $\tau_A M \simeq D(\operatorname{Im}\beta^\vee) \simeq \Omega\mathcal{N}M$. Очевидно, ця конструкція є функторіальною по M, тому встановлює ізоморфізм $\tau_A \simeq \Omega\mathcal{N}$. Оскільки $\mathcal{N}$ точний і переводить проєктивні модулі в проєктивні, він комутує з Ω, тобто $\Omega\mathcal{N} \simeq \mathcal{N}\Omega$.

Твердження 7.1 доведено.

Нехай $A \simeq \bigoplus_{i=1}^s P_i^{m_i}$, де $P_1, P_2, \ldots, P_s$ — усі попарно неізоморфні головні ліві A-модулі. Тоді також $A \simeq \bigoplus_{i=1}^s (P_i^\vee)^{m_i}$ як правий A-модуль, $DA \simeq \bigoplus_{i=1}^s (DP_i^\vee)^{m_i}$ як лівий A-модуль і $DP_1^\vee, DP_2^\vee, \ldots, DP_s^\vee$ — всі попарно неізоморфні коголовні ліві A-модулі. Отже, A є ґоренштейновим тоді й тільки тоді, коли існує перестановка ν така, що $P_i \simeq DP_{\nu i}^\vee$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, s$. Перестановка ν називається *перестановкою Накаями*.

Означення 7.1. *Порядок A називається фробеніусовим, якщо $A \simeq DA$ як лівий A-модуль, і симетричним, якщо $A \simeq DA$ як A-бімодуль.*

Очевидно, це означення є ліво/право симетричним і A є фробеніусовим тоді й тільки тоді, коли він є ґоренштейновим і $m_i = m_{\nu i}$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, s$, де ν — перестановка Накаями.

Означення 7.2. *Нехай M — лівий A-модуль, σ — автоморфізм A. Позначимо через ${}^\sigma M$ лівий A-модуль, який збігається з M як група, але для кожного $a \in A$ і $x \in M$ добуток ax у ${}^\sigma M$ дорівнює добутку $\sigma(a)x$ у M. Аналогічно визначається N^σ для правого A-модуля N і ${}^\rho M^\sigma$ для A-бімодуля M, де ρ також є автоморфізмом A. Якщо ρ або σ є тотожним, ми відкидаємо його й пишемо відповідно M^σ або ${}^\rho M$.*

Легко бачити, що відображення $x \mapsto \rho^{-1}(x)$ і $x \mapsto \sigma^{-1}(x)$ є ізоморфізмами A-бімодулів відповідно ${}^\rho A^\sigma \simeq A^{\rho^{-1}\sigma}$ і ${}^\rho A^\sigma \simeq {}^{\sigma^{-1}\rho}A$.

Твердження 7.2. *A є фробеніусовим тоді й тільки тоді, коли існує автоморфізм $\sigma \in \operatorname{Aut} A$ такий, що $DA \simeq A^\sigma$ як A-бімодуль. Більш того, існує оборотний елемент $s \in KA$ такий, що $\sigma(a) = s^{-1}as$ для всіх $a \in A$.*

Доведення. Очевидно, якщо такий автоморфізм існує, то A є фробеніусовим. Припустимо, що A є фробеніусовим і $\varphi\colon A \xrightarrow{\sim} \Delta$ — ізоморфізм лівих A-модулів, де $\Delta = DA$. Він індукує ізоморфізм лівих KA-модулів $K\varphi\colon KA \xrightarrow{\sim} K\Delta$. Оскільки KA напівпроста, вона є симетричною як K-алгебра [4] (9.8), тобто існує ізоморфізм KA-бімодулів $\theta\colon KA \xrightarrow{\sim} K\Delta$. Композиція $\theta^{-1}{\cdot}K\varphi$ є автоморфізмом KA як лівого KA-модуля. Тому існує оборотний елемент $s \in KA$ такий, що $\theta^{-1}K\varphi(x) = xs$ для кожного $x \in KA$. Зокрема, $\varphi(x) = \theta(xs)$ для кожного $x \in A$, звідки $\Delta = \theta(As)$. З цього випливає, що $As = \theta^{-1}(\Delta)$ — двосторонній A-модуль, тобто $sA \subseteq As$ і $sAs^{-1} \subseteq A$. Отже, $sAs^{-1} = A$ і $s^{-1}As = A$. Більш того,

$$\varphi(xa) = \theta(xas) = \theta(xss^{-1}as) = \theta(xs)s^{-1}as = \varphi(x)s^{-1}as.$$

Таким чином, φ — ізоморфізм A-бімодулів $A^\sigma \xrightarrow{\sim} \Delta$, де $\sigma(a) = s^{-1}as$.

Твердження 7.2 доведено.

Можна перевірити, що елемент s визначено з точністю до множника вигляду $q\lambda$, де q і λ — оборотні елементи відповідно з A і з центра KA.

Наслідок 7.1. *Нехай A — фробеніусів порядок, $\sigma \in \operatorname{Aut} A$ — автоморфізм з твердження 7.2, $\mathcal{N}$ — еквівалентність Накаями. Існують такі функторіальні ізоморфізми*:

$DM \simeq (M^\vee)^\sigma$ для кожної лівої A-ґратки M і $DN \simeq {}^{\sigma^{-1}}(N^\vee)$ для кожної правої A-ґратки N;

$\mathcal{N}M \simeq {}^{\sigma^{-1}}M$ і $\tau_A M \simeq \Omega({}^{\sigma^{-1}}M) \simeq {}^{\sigma^{-1}}(\Omega M)$ для кожної лівої A-ґратки M.

Зокрема, якщо A симетричний, то $\mathcal{N} \simeq \operatorname{Id}$ і $\tau_A \simeq \Omega$.

Доведення є очевидним.

***Наслідок* 7.2.** *Нехай A ґоренштейнів,* $\mathfrak{r} = \operatorname{rad} A$, $P_1, P_2, \ldots, P_s$ *— повний список неізоморфних головних A-модулів, $\omega_i = DP_i^{\vee}$ (тоді $\omega_1, \ldots, \omega_s$ — повний список неізоморфних коголовних модулів). Покладемо $A' = A^{-}(A)$, $P_i' = P_i^{\mathfrak{r}}$ і $\omega_i' = \mathfrak{r}\omega_i$. Тоді $\tau_A P_i' \simeq \omega_{\nu i}'$, де ν — перестановка Накаями.*

Доведення випливає з теореми 6.1.

***Наслідок* 7.3.** *Нехай G — скінченна група, A — блок її групового кільця $\mathbb{Z}_p G$. Це симетричний $\mathbb{Z}_p$-порядок. Покладемо $A' = A^{-}(A)$. Тоді для кожної непроєктивної A-ґратки M (або, що те саме, для кожної A'-ґратки M)*

$$\hat{H}^n(G, M) \simeq \hat{H}^{n+1}(G, \tau_A M) \simeq \hat{H}^{n-1}(G, \tau_A^{-1} M).$$

Доведення випливає з наслідку 7.1 і твердження 6.2.

Зауважимо, що $\tau_A M = \tau_{A'} M$, якщо M не є проєктивною над A'. Інакше $\tau_A M$ визначається наслідком 7.2. У деяких випадках будову AP-типу $AR_{A'}$ можна ефективно обчислити. Тоді це дає значення когомологій. Приклад, коли G є четверною групою Кляйна, міститься в роботі [10].

Література

1. M. Auslander, I. Reiten, *Almost split sequences for Cohen – Macaulay modules*, Math. Ann., **277**, 345 – 349 (1987).
2. M. Auslander, I. Reiten, S. Smalø, *Representation theory of Artin algebras*, Cambridge Univ. Press (1997).
3. W. Bruns, J. Herzog, *Cohen – Macaulay rings*, Cambridge Univ. Press (1993).
4. Ch. W. Curtis, I. Reiner, *Methods of representation theory*, Vol. 1, John Wiley & Sons (1981).
5. V. Dlab, C. M. Ringel, *Indecomposable representations of graphs and algebras*, Mem. Amer. Math. Soc., **173** (1976).
6. Ю. А. Дрозд, В. В. Кириченко, *О квазибассовых порядках*, Изв. АН СССР. Сер. мат., **36**, 328 – 370 (1972).
7. Ю. А. Дрозд, В. В. Кириченко, *Примарные порядки с конечным числом неразложимых представлений*, Изв. АН СССР. Сер. мат., **37**, 715 – 736 (1973).
8. Ю. А. Дрозд, В. В. Кириченко, *Конечномерные алгебры*, Вища шк., Киев (1994).
9. Ю. А. Дрозд, В. В. Кириченко, А. В. Ройтер, *О наследственных и бассовых порядках*, Изв. АН СССР. Сер. мат., **31**, 1415 – 1436 (1967).
10. Yu. Drozd, A. Plakosh, *Cohomologies of the Kleinian 4-group*, Arch. Math., **115**, 139 – 145 (2020).
11. H. Hijikata, K. Nishida, *Bass orders in non semisimple algebras*, J. Math. Kyoto Univ., **34**, 797 – 837 (1994).
12. H. Hijikata, K. Nishida, *Primary orders of finite representation type*, J. Algebra, **192**, 592 – 640 (1997).
13. B. Keller, *Derived categories and their use*, Handbook Algebra, vol. 1, 671 – 701 (1996).
14. T. Y. Lam, *A first course in noncommutative rings*, Springer (1991).
15. E. Matlis, *Injective modules over Noetherian rings*, Pacif. J. Math., **8**, 511 – 528 (1958).
16. H. Matsumura, *Commutative algebra*, The Benjamin/Cummings Publ. Co. (1980).
17. K. W. Roggenkamp, *Gorenstein orders of finite representation type and bijective lattices*, Lect. Notes Math., **1178**, 243 – 270 (1986).
18. А. В. Ройтер, *Аналог одной теоремы Басса для модулей представлений некоммутативных порядков*, Докл. АН СССР, **168**, 1261 – 1264 (1966).

Одержано 14.02.21