О локальной теореме для предельных устойчивых распределений

Б. В. Гнеденко

Введение. Недавно мной была доказана теорема [1], включившая в себя в качестве простейшего частного случая классический результат теории вероятностей — локальную теорему Муавра-Лапласа. Употребленный при этом метод был специально приспособлен к случаю нормального предельного распределения и не давал возможности обобщить полученный результат на случай других предельных распределений. В настоящей статье я видоизменяю первоначальный прием доказательства. Это позволяет обобщить локальную теорему на случай предельных устойчивых законов и значительно упростить первоначальное доказательство моей прежней теоремы. Замечу при этом, что если для всех устойчивых законов (за исключением нормального) теорема получила окончательную формулировку, то для нормального закона остался нерассмотренным случай, когда слагаемые имеют бесконечные дисперсии.

Доказательство я провожу во всех подробностях и повторяю некоторые вспомогательные результаты, опубликованные ранее.

1°. Решетчатые распределения. Мы скажем, что случайная величина ξ имеет решетчатое распределение, если существуют такие числа a и $h > 0$, что любые возможные значения ξ могут быть представлены в виде $a + kh$, где k — целое число $(-\infty < x < \infty)$. К решетчатым относится большое число важнейших распределений (Пуассона, Бернулли и др.).

Решетчатые распределения могут быть охарактеризованы другим способом, а именно (этот результат достаточно хорошо известен).

Для того чтобы случайная величина ξ была решетчатой, необходимо и достаточно, чтобы при некотором $t \neq 0$ модуль ее характеристической функции был равен единице.

Действительно, если ξ распределена решетчато и p_k есть вероятность равенства

$$\xi = a + kh,$$

то характеристическая функция величины ξ определяется посредством равенства

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k e^{it(a+kh)}=e^{ita}\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k e^{itkh}.$$

Отсюда

$$f\left(\frac{2\pi}{h}\right)=e^{2\pi i\frac{a}{h}}\sum p_k e^{2\pi ik}=e^{2\pi i\frac{a}{h}}\sum p_k=e^{2\pi i\frac{a}{h}}.$$

Мы видим, таким образом, что для каждого решетчатого распределения

$$\left|f\left(\frac{2\pi}{h}\right)\right|=1.$$

Предположим теперь, что при некотором $t_1\neq 0$

$$|f(t_1)|=1,$$

и докажем, что при этом ξ имеет решетчатое распределение. Последнее равенство означает, что при некотором θ

$$f(t_1)=e^{i\theta}.$$

Таким образом

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{it_1x}\,dF(x)=e^{i\theta},$$

и следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t_1x-\theta)}\,dF(x)=1.$$

Отсюда вытекает, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos(t_1x-\theta)\,dF(x)=1.$$

Для того чтобы это равенство было возможно, необходимо, чтобы $F(x)$ могло изменяться только при тех значениях x, при которых

$$\cos(t_1x-\theta)=1.$$

Это означает, что возможные значения ξ должны быть вида

$$x=\frac{\theta}{t_1}+k\frac{2\pi}{t_1}$$

и т. д.

Число h мы будем называть шагом распределения. Мы скажем, что шаг распределения h максимален, если ни при каких $b\,(-\infty<b<\infty)$ и $h_1>h$ нельзя представить все возможные значения ξ в виде $b+kh_1$.

Пусть, для примера, ξ может принимать в качестве своих значений все нечетные числа. Очевидно, что все значения могут быть записаны в виде $a+kh$, где $a=0$, $h=1$. Шаг h, однако, не будет максимальным, так как все возможные значения ξ мы можем записать также в виде $b+kh_1$, где $b=1$, $h_1=2$.

Условия максимальности шага распределения можно выразить в других терминах.

Во-первых. Шаг распределения h будет максимальный тогда и только тогда, когда общий наибольший делитель попарных разностей возможных значений величины ξ, поделенных на h, равен единице.

Во-вторых. Шаг распределения h будет максимальным тогда и только тогда, когда модуль характеристической функции величины ξ в промежутке $0<|t|<\frac{2\pi}{h}$ меньше единицы и при $t=\frac{2\pi}{h}$ равен единице.

Последнее утверждение немедленно вытекает из наших предыдущих рассуждений. В самом деле, если при $0<t_1<\frac{2\pi}{h}$

$$|f(t_1)|=1,$$

то согласно доказанному величина $\frac{2\pi}{t_1}$ должна быть шагом распределения. А так как

$$h<\frac{2\pi}{t_1},$$

то шаг h не может быть максимальным.

Отсюда мы сделаем такой элементарный вывод: если h — максимальный шаг распределения, то для каждого $\varepsilon>0$ найдется такое число $c_0>0$, что при всех t в интервале $\varepsilon\leqslant|t|\leqslant\frac{2\pi}{h}-\varepsilon$

$$|f(t)|\leqslant e^{-c_0}. \tag{1}$$

2°. Области притяжения устойчивых законов. Рассмотрим последовательность взаимно независимых случайных величин

$$\xi_1,\ \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots,$$

имеющих одну и ту же функцию распределения $F(x)=P\{\xi<x\}$. В 1936 г. А. Я. Хинчиным и П. Леви [2] было найдено полное решение такой задачи: к каким функциям распределения могут сходиться при $n\to\infty$ функции распределения сумм

$$s_n=\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n-A_n}{B_n} \tag{2}$$

при надлежащем подборе вещественных постоянных A_n и $B_n>0$? Оказалось, что закон $\Phi(x)$ может выступать в качестве предельного для сумм (2) тогда и только тогда, когда он устойчив. Полная характеристика устойчивых законов известна (см. [2], стр. 93—100): закон $\Phi(x)$

устойчив тогда и только тогда, когда логарифм его характеристической функции может быть представлен в виде

$$\lg \varphi(t) = i\gamma t - c|t|^{\alpha}\left\{1 + i\beta \frac{t}{|t|}\omega(t, \alpha)\right\}, \tag{3}$$

где α, β, γ, c — вещественные постоянные ($0 \leqslant \alpha \leqslant 2$, $-1 \leqslant \beta \leqslant 1$, $c \geqslant 0$, $-\infty < \gamma < \infty$), а

$$\omega(t, \alpha) = \begin{cases} \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2} & \text{для } \alpha \neq 1, \\ \frac{2}{\pi}\lg|t| & \text{для } \alpha = 1. \end{cases}$$

Число α носит название **характеристического показателя** устойчивого закона $\Phi(x)$.

Известно ([2], стр. 101), что все устойчивые законы непрерывны и неограниченное число раз диференцируемы. Таким образом для них существуют плотности распределения. Для плотности закона, определяемого посредством формулы (39), мы введем обозначение

$$p(x;\, \alpha, \beta, \gamma, c) = \frac{d}{dx}\Phi(x).$$

Для примера

$$p\left(x;\, 2, \beta, 0, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ (нормальный закон)},$$

$$p(x;\, 1, 0, 0, 0) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \text{ (закон Коши)},$$

$$p\left(x;\, \frac{1}{2}, 1, 0, 1\right) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2x}} x^{-\frac{3}{2}} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Явная форма последнего закона была найдена Н. В. Смирновым.

Совокупность всех функций распределения $F(x)$, для которых при надлежащем подборе постоянных A_n и $B_n > 0$ функции распределения сумм (2) сходятся к закону $\Phi(x)$, мы будем называть **областью притяжения закона** $\Phi(x)$.

Области полного притяжения устойчивых законов были полностью охарактеризованы в работе [3] (теорема 10). Оказалось, что функция распределения $F(x)$ тогда и только тогда притягивается к устойчивому закону $\Phi(x)$, определенному посредством своей характеристической функции (2), когда существуют такие постоянные $c_1 \geqslant 0$ и $c_2 \geqslant 0$ ($c_1 + c_2 > 0$), что при любом $k > 0$ выполняются соотношения

$$\frac{F(-x)}{1 - F(x)} \longrightarrow \frac{c_1}{c_2} \qquad (x \to \infty),$$

и

$$\frac{1 - F(x) + F(-x)}{1 - F(kx) + F(-kx)} \longrightarrow k^{\alpha} \qquad (x \to \infty).$$

Ради краткости письма мы для дальнейших целей введем обозначение

$$1-F(x)+F(-x)=\chi(x).$$

Нормирующие коэфициенты B_n могут быть выбраны как наименьшие корни уравнений

$$\chi(B_n+0)\leqslant\frac{1}{n}\leqslant\chi(B_n-0).$$

Для нормального предельного закона ($\alpha=2$) особую роль играет рассмотрение случая, когда постоянные B_n могут быть выбраны в виде $B_n=\sigma\sqrt{n}$, σ — постоянное. Известно, что так коэфициенты B_n можно выбрать тогда и только тогда, когда $F(x)$ имеет конечный второй момент; при этом $\sigma^2=D\xi$ (см., например [3], теор. 4).

Для произвольных устойчивых законов также естественно в первую очередь рассмотреть законы $F(x)$, притягивающиеся к устойчивому закону $\Phi(x)$, имеющему характеристический показатель α, при таком выборе нормирующих множителей

$$B_n=\sigma n^{\frac{1}{\alpha}}. \qquad (\sigma\text{— постоянное}).$$

Совокупность всех таких законов мы назовем **областью нормального притяжения** закона $\Phi(x)$.

Области нормального притяжения были полностью охарактеризованы в работе [3]. Оказалось, что закон $F(x)$ принадлежит области нормального притяжения закона $\Phi(x)$ с характеристическим показателем α $(0<\alpha<2)$ тогда и только тогда, когда

$$F(x)=\begin{cases}(c_1+\alpha_1(x))\dfrac{1}{|x|^\alpha} & \text{при } x<0,\\[2mm] 1-(c_2+\alpha_2(x))\dfrac{1}{x^\alpha} & \text{при } x>0;\end{cases}$$

функции $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ удовлетворяют условию

$$\lim_{x\to-\infty}\alpha_1(x)=\lim_{x\to\infty}\alpha_2(x)=0,$$

а постоянные c_1 и c_2 определяются посредством равенств:

1) при $0<\alpha<1$

$$c_1=-\frac{\alpha c}{2L(\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{2}}(1+\beta),\quad c_2=-\frac{\alpha c}{2L(\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{2}}(1-\beta),$$

где

$$L(\alpha)=\int\limits_0^\infty(e^{-z}-1)\frac{dz}{z^{1+\alpha}};$$

2) при $\alpha=1$

$$c_1=\frac{c}{\pi}(1+\beta),\quad c_2=\frac{c}{\pi}(1-\beta);$$

3) при $1<\alpha<2$

$$c_1=-\frac{\alpha c}{2k(\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{2}}(1+\beta),\quad c_2=-\frac{\alpha c}{2k(\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{2}}(1-\beta),$$

где

$$k(\alpha)=\int_0^\infty (e^{-z}-1+z)\,\frac{dz}{z^{1+\alpha}}.$$

3°. Формулировка локальной теоремы. Локальные предельные теоремы изучают поведение вероятностей тех или иных значений, которые могут быть приняты суммами

$$\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$$

при $n\to\infty$. Известная локальная теорема Муавра-Лапласа устанавливает важную закономерность, которой подчиняются вероятности числа появлений события A в последовательности n независимых испытаний. В работе [1] было доказано, что та же закономерность имеет место для всех решетчато распределенных случайных величин, имеющих конечную дисперсию. В настоящей статье этот результат распространяется на все законы $F(x)$, принадлежащие областям притяжения устойчивых законов. Положим для дальнейшего

$$z_{nk}=\frac{an+kh-A_n}{B_n},$$

где A_n и B_n определяется так, чтобы функции распределения сумм (2) сходились к предельному закону $\Phi(x)$. Обозначим далее через $P_n(k)$ вероятность равенства

$$\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n=na+kh.$$

Наша задача состоит в доказательстве следующего предложения.

Теорема 1. *Для того чтобы для последовательности взаимно независимых решетчатых случайных величин*

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n,\ \ldots$$

имеющих одну и ту же функцию распределения $F(x)$, равномерно относительно $k(-\infty<k<\infty)$ имело место соотношение $(0<\alpha<2)$

$$\frac{B_n}{h}P_n(k)-p(z_{nk};\ \alpha,\beta,\gamma,c)\to 0\qquad (n\to\infty)\tag{4}$$

(A_n и B_n сохраняют приданный им ранее смысл) *необходимо и достаточно, чтобы*

1) *функция* $F(x)$ *принадлежала области притяжения закона* $\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(z; \alpha, \beta, \gamma, c)\,dz$;

2) *шаг распределения* h *был максимальным.*

Как частные случаи в сформулированной теореме содержатся следующие результаты (мы ограничиваемся нормальными областями притяжения).

I. Локальная теорема для закона Коши.

Соотношение

$$\frac{B_n}{h} P_n(k) - \frac{1}{\pi(1+z_{nk}^2)} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

выполняется равномерно относительно $k(-\infty < k < \infty)$ тогда и только тогда, когда

1) функция распределения $F(x)$ подчиняется условиям

$$\lim_{x \to -\infty} - xF(x) = \lim_{x \to +\infty} x[1-F(x)] = \sigma > 0,$$

2) шаг распределения h максимален.

II. Соотношения (при $n \to \infty$)

$$\frac{\sigma n^2}{h} P_n(k) \to 0 \qquad (\text{при } z_{nk} < 0)$$

и

$$\frac{\sigma n^2}{h} P_n(k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2z_{nk}}} z_{nk}^{-\frac{3}{2}} \to 0 \qquad (\text{при } z_{nk} > 0)$$

выполняются равномерно относительно $k(-\infty < k < \infty)$ тогда и только тогда, когда

1) функция распределения $F(x)$ подчиняется условиям

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{|x|}\, F(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\,[1-F(x)] = \sqrt{\sigma},$$

2) шаг распределения h максимален.

4°. Формулировка и доказательство леммы. Пусть функция распределения $F(x)$ принадлежит области притяжения устойчивого закона $\Phi(x)$, имеющего характеристический показатель α, меньший двух. Рассмотрим взаимно независимые случайные величины ξ и ξ', имеющие $F(x)$ в качестве своей функции распределения. Обозначим через $F^*(x)$ функцию распределения разности $\xi - \xi'$, а через $f^*(t)$ ее характеристическую функцию. Ясно, что

$$f^*(t) = |f(t)|^2.$$

В силу предположений, сделанных о $F(x)$ равномерно в каждом конечном интервале t при $n \to \infty$

$$\left| f^*\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|^n \to e^{-2c|t|^\alpha}.$$

Таким образом, согласно n° 3, при любом $u > 0$ и $x \to \infty$

$$\frac{\chi^*(ux)}{\chi^*(x)} \to \frac{1}{u^\alpha}.$$

Доказательство нашей теоремы опирается на следующую лемму.

Лемма. Если функция $F(x)$ принадлежит области притяжения устойчивого закона $\Phi(x)$ с характеристическим показателем α $(0 < \alpha < 2)$, то в достаточно малой окрестности точки $t = 0$ для характеристической функции закона $F(x)$ имеет место неравенство

$$|f(t)| < e^{-c_0 \chi^*\left(\frac{1}{t}\right)},$$

где c_0 — некоторая положительная постоянная.

Доказательство. Имеем

$$f^*(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos tx \, dF^*(x).$$

Следовательно,

$$1 - f^*(t) \geqslant \int\limits_{\frac{5\pi}{2|t|} \leqslant |x| \leqslant \frac{7\pi}{2|t|}} (1 - \cos tx)\, dF^*(x) \geqslant \chi^*\left(\frac{5\pi}{2|t|}\right) - \chi^*\left(\frac{7\pi}{2|t|}\right) =$$

$$= \chi^*\left(\frac{1}{|t|}\right)\left[\frac{\chi^*\left(\frac{5\pi}{2|t|}\right)}{\chi^*\left(\frac{1}{|t|}\right)} - \frac{\chi^*\left(\frac{7\pi}{2|t|}\right)}{\chi^*\left(\frac{1}{|t|}\right)}\right].$$

Пусть t столь мало, что

$$\frac{\chi^*\left(\frac{5\pi}{2|t|}\right)}{\chi^*\left(\frac{1}{|t|}\right)} = \left(\frac{2}{5\pi}\right)^\alpha + \omega_1 \quad \text{и} \quad \frac{\chi^*\left(\frac{7\pi}{2|t|}\right)}{\chi^*\left(\frac{1}{|t|}\right)} = \left(\frac{2}{7\pi}\right)^\alpha + \omega_2$$

и

$$\max(|\omega_1|, |\omega_2|) < \frac{1}{2}\left|\left(\frac{2}{5\pi}\right)^\alpha - \left(\frac{2}{7\pi}\right)^\alpha\right| = 2c_0.$$

Отсюда следует, что

$$1-f^*(t)\geqslant 2c_0\chi^*\left(\frac{1}{|t|}\right)$$

и

$$f^*(t)\leqslant 1-2c_0\chi^*\left(\frac{1}{|t|}\right)\leqslant e^{-2c_0\chi^*\left(\frac{1}{|t|}\right)}.$$

Полученное неравенство доказывает лемму.

Пусть $\varepsilon>0$ таково, что неравенство леммы действует в интервале $|t|<\varepsilon$. Тогда в интервале $|t|\leqslant\varepsilon B_n$

$$\left|f\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|^n\leqslant e^{-c_0 n\chi^*\left(\frac{B_n}{|t|}\right)}.$$

Но при достаточно больших n

$$n\chi^*\left(\frac{B_n}{|t|}\right)\sim|t|^\alpha,$$

и, следовательно, при достаточно больших n

$$n\chi^*\left(\frac{B_n}{|t|}\right)\geqslant\frac{1}{2}|t|^\alpha.$$

Таким образом при достаточно больших n и $|t|\leqslant\varepsilon B_n$

$$\left|f\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|\leqslant e^{-\frac{c_0}{2}|t|^\alpha}. \tag{5}$$

Этим неравенством мы воспользуемся впоследствии.

5°. **Доказательство необходимости условий теоремы.** Необходимость условий теоремы почти очевидна. Действительно, если шаг h не максимален, то возможные значения суммы $\xi_1+\ldots+\xi_n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ будут содержать систематические пропуски: разность между ближайшими возможными значениями суммы не может быть меньше hd, где d есть общий наибольший делитель разностей возможных значений ξ_0, деленных на h. Если h не максимальный шаг, то $d>1$ при всех значениях n. С другой стороны, если имеет место (4), то ясно, что в то же время имеет место и соотношение

$$P\{s_n<x\}\to\Phi(x)\qquad(n\to\infty),$$

то есть что закон $F(x)$ принадлежит области притяжения устойчивого закона $\Phi(x)$.

6°. **Метод доказательства достаточности.** Доказательство достаточности условий теоремы требует несколько более сложных рассуждений.

Характеристическая функция величины ξ_k $(k=1, 2, 3, \ldots)$ равна

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k e^{iat+itkh}=e^{iat}\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k e^{itkh},$$

а характеристическая функция суммы $\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$ есть

$$f^n(t)=e^{iant}\sum_{k=-\infty}^{\infty} P_n(k)\, e^{itkh}.$$

Умножив последнее равенство на $e^{-iant-itkh}$ и проинтегрировав его в пределах от $-\frac{\pi}{h}$ до $\frac{\pi}{h}$, находим, что

$$\frac{2\pi}{h} P_n(k)=\int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} f^n(t) e^{-iant-itkh}\, dt.$$

Заметив, что

$$hk=B_n z_{nk}+A_n-an$$

(вместо z_{nk} мы будем писать дальше z), можем написать

$$\frac{2\pi}{h} P_n(k)=\int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} \bar{f}^n(t)\, e^{-iztB_n}\, dt,$$

где положено

$$\bar{f}(t)=e^{-\frac{itA_n}{n}} f(t).$$

Положив, наконец, $x=tB_n$, находим окончательно

$$\frac{2\pi B_n}{h} P_n(k)=\int_{-\frac{\pi B_n}{h}}^{\frac{\pi B_n}{h}} e^{-izx}\bar{f}^n\left(\frac{x}{B_n}\right) dx.$$

Из того, что

$$\varphi(t)=e^{i\gamma t-c|t|^{\alpha}\left\{1+i\beta\frac{t}{|t|}\omega(t,\alpha)\right\}}=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x;\alpha,\beta,\gamma,c)\, dx$$

следует равенство

$$2\pi p(x;\alpha,\beta,\gamma,c)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi(t)\, dt.$$

Таким образом

$$R_n = 2\pi \left(\frac{B_n}{h} P_n(k) - p(z; \alpha, \beta, \gamma, c) \right) =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi B_n}{h}}^{\frac{\pi B_n}{h}} e^{-izx} \bar{f}^n \left(\frac{x}{B_n} \right) dx - \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-izx} \varphi(x)\, dx.$$

Наша задача состоит, очевидно, в доказательстве того, что величина R_n при $n \to \infty$ равномерно относительно k $(-\infty < k < \infty)$ стремится к нулю. С этой целью представим R_n в виде суммы следующих четырех интегралов

$$I_1 = \int\limits_{-A}^{A} e^{-izx} \left| \bar{f}^n \left(\frac{x}{B_n} \right) - \varphi(x) \right| dx,$$

$$I_2 = \int\limits_{A \leq |x| < \varepsilon B_n} e^{-izx} \bar{f}^n \left(\frac{x}{B_n} \right) dx, \quad I_3 = \int\limits_{\varepsilon B_n \leq |x| < \frac{\pi B_n}{h}} e^{-izx} \bar{f}^n \left(\frac{x}{B_n} \right) dx,$$

$$I_4 = \int\limits_{|x| > A} e^{-izx} \varphi(x)\, dx,$$

где A — некоторое постоянное достаточно большое число, более точное значение которого будет выбрано позднее и ε — достаточно малое положительное постоянное.

7°. Оценка интегралов. В силу первого условия теоремы и предельной теоремы относительно последовательности характеристических функций равномерно относительно t $(|t| \leq A)$

$$f^n \left(\frac{t}{B_n} \right) \to \varphi(t) \qquad (n \to \infty),$$

каково бы ни было постоянное A. Таким образом при $n \to \infty$

$$I_1 \to 0.$$

Согласно (5) при $|t| \leq \varepsilon B_n$

$$\left| \bar{f} \left(\frac{t}{B_n} \right)^n \right| \leq e^{-\frac{c_2}{2} |t|^{\alpha}}.$$

Выбрав достаточно большое A, мы можем сделать, таким образом, интеграл I_2 сколь угодно малым. Одновременно сколь угодно малым становится интеграл I_4.

Оценка (1) позволяет нам заключить, что

$$|I_3| \leqslant \int\limits_{\varepsilon B_n \leq |x| \leq \frac{\pi B_n}{h}} e^{-nc_0}\, dx < \frac{2\pi B_n}{h} e^{-nc_0}.$$

А так как известно, что B_n растут приблизительно как $n^{\frac{1}{\alpha}}$, то ясно, что при $n \to \infty$

$$I_3 \to 0.$$

Теорема доказана полностью.

8°. Случай нормального предельного распределения. В работе [1] доказана следующая теорема

Теорема 2. Для того чтобы для последовательности взаимно независимых решетчатых случайных величин

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$$

имеющих одну и ту же функцию распределения $F(x)$, равномерно относительно k выполнялось соотношение

$$\frac{\sigma\sqrt{n}}{h} P_n(k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z_{nk}^2}{2}} \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

необходимо и достаточно, чтобы

1) шаг распределения h был максимальным,

2) интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\, dF(x)$$

был конечен.

В этом случае мы должны положить $A_n = nM\xi_1$, $B_n^2 = nD\xi_1 = n\sigma^2$.

Доказательство. Так как в доказательстве основной теоремы мы пользовались предположением о характере предельного распределения только при оценке интеграла I_2, то нам предстоит заняться оценкой только этого интеграла. Имеем, сохраняя прежние обозначения,

$$1 - f^*(t) \geqslant \int\limits_{|x| < D} (1 - \cos tx)\, dF^*(x),$$

где D — столь большое число, чтобы внутрь интервала $-D < x < D$ попала значительная часть вариации функции $F(x)$.

Так как при $|t| < \frac{1}{D} = \varepsilon$

$$1 - \cos tx \geqslant \frac{t^2 x^2}{5},$$

то при $|t| < \varepsilon$

$$1 - |f(t)|^2 \geqslant \frac{t^2}{5} \int\limits_{-D}^{D} x^2\, dF^*(x) = 2c_0 t^2,$$

где

$$c_0 = \frac{1}{10} \int\limits_{-D}^{D} x^2 \, dF^*(x).$$

Отсюда

$$|f(t)|^2 \leqslant 1 - 2c_0 t^2 \leqslant e^{-2c_0 t^2}.$$

Теперь

$$|I_2| \leqslant \int\limits_{A \leqslant |x| \leqslant \varepsilon B_n} \left| \bar{f}\left(\frac{t}{B_n}\right) \right|^n dt \leqslant 2 \int\limits_{A}^{\varepsilon B_n} e^{-c_0 n \frac{t^2}{2B_n^2}} dt = 2 \int\limits_{A}^{\varepsilon B_n} e^{-c_0 \frac{t^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Выбором достаточно большого A этот интеграл может быть сделан сколь угодно малым. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Гнеденко, О локальной предельной теореме теории вероятностей, Успехи математических наук, т. 3, вып. 3, стр. 187—194, 1948.

2. А. Я. Хинчин, Предельные законы для сумм независимых случайных величин, ГОНТИ, 1938.

3. Б. В. Гнеденко, К теории областей притяжения устойчивых законов, Ученые записки Московского университета, вып. XXX, стр. 61—81, 1939.