Решение некоторых задач плоской теории упругости для областей с угловыми точками

Г. Н. Положий

Третьей основной задачей плоской теории упругости Н. И. Мусхелишвили называет смешанную плоскую задачу теории упругости в случае, когда на контуре нормальное смещение задано, а касательное напряжение равно нулю [1]. Н. И. Мусхелишвили решил эту задачу для областей, конформно отображаемых на круг при помощи рациональных функций [2], [3]. Для областей, ограниченных гладкими контурами, эти задача исследована Д. И. Шерманом [4]. Решения же этой задачи ни для какой области, имеющей угловые точки, как и метод ее решения, до настоящего времени не было известно.

В предлагаемой работе впервые дается решение этой задачи для прямоугольника и для остроугольного и прямоугольного треугольников. Кроме этого, для этих же областей, при помощи введения некоторых вполне определенных гипотез, касающихся порядка роста напряжений в угловых точках, ставится и решается задача об отыскании плоского напряженного состояния по заданным на контуре нормальному напряжению и касательному смещению. Эта задача называется в дальнейшем для краткости четвертой задачей плоской теории упругости.

Решения указанных третьей и четвертой задач плоской теории упругости получены за счет некоторых новых общих формул плоского напряженного состояния, которые нам удалось установить.

Эти формулы приводят нас к совершенно общему методу решения третьей и четвертой задач для произвольных областей с угловыми точками, ограниченных кусочно прямолинейными контурами.

§ 1. Вывод некоторых новых общих формул плоского напряженного состояния. Пусть Γ — замкнутый контур с конечным числом угловых точек, имеющий вне этих угловых точек непрерывную кривизну и целиком лежащий в области тела G в плоскости $z=x+iy$, а α — угол, составленный внешней нормалью к Γ с осью x.

Пусть ν и t — проекции смещений точек контура Γ на его внешнюю нормаль и соответственно на положительное направление касательной и пусть N и T — нормальное и соответственно касательное напряжения в этих точках контура Γ. В соответствии с формулами Г. В. Колосова имеем

$$2\mu(v+it)=e^{-i\alpha}\,[k\varphi(z)-z\overline{\varphi}'(\overline{z})-\overline{\psi}(\overline{z})], \tag{1,1}$$

$$N+iT=\varphi'(z)+\overline{\varphi}'(\overline{z})-[z\overline{\varphi}''(\overline{z})+\overline{\psi}'(\overline{z})]\,e^{-i2\alpha}, \tag{1,2}$$

где $k=\dfrac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}$, λ и μ — постоянные Ламэ, $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — функции от z аналитические во всякой конечной части области G, $\overline{\varphi}'(\overline{z})$, $\overline{\varphi}''(\overline{z})$, $\overline{\psi}(\overline{z})$, $\overline{\psi}'(\overline{z})$ — функции сопряженные соответственно с $\varphi'(z)$, $\varphi''(z)$, $\psi(z)$ и $\psi'(z)$.

Обозначая через s длину дуги контура Γ, отсчитываемую от некоторой его точки в направлении положительного обхода его, из равенства (1,1) непосредственным подсчетом получаем

$$2\mu\left(\frac{dv}{ds}+i\frac{dt}{ds}\right)=i\left\{k\varphi'(z)-\overline{\varphi}'(\overline{z})+[z\overline{\varphi}''(\overline{z})+\overline{\psi}'(\overline{z})]\,e^{-i2\alpha}\right\}-$$

$$-ie^{-i\alpha}\,[k\varphi(z)-z\overline{\varphi}'(\overline{z})-\overline{\psi}(\overline{z})]\,\frac{d\alpha}{ds}.$$

Отсюда, учитывая равенства (1,1) и (1,2), получаем следующие равенства:

$$2\mu\left[\frac{dt}{ds}+v\frac{d\alpha}{ds}+i\left(-\frac{dv}{ds}+t\frac{d\alpha}{ds}\right)\right]=k\varphi'(z)-\overline{\varphi}'(\overline{z})+[z\overline{\varphi}''(\overline{z})+\overline{\psi}'(\overline{z})]\,e^{-i2\alpha}, \tag{1,3}$$

$$2\mu\left(\frac{dt}{ds}+v\frac{d\alpha}{ds}\right)+N+i\left[2\mu\left(-\frac{dv}{ds}+t\frac{d\alpha}{ds}\right)+T\right]=(k+1)\,\varphi'(z). \tag{1,4}$$

Из этих равенств, считая контур Γ ломаной линией, получаем следующие новые основные формулы плоского напряженного состояния

$$2\mu\left(\frac{dt}{ds}-i\frac{dv}{ds}\right)=k\varphi'(z)-\overline{\varphi}'(\overline{z})+[z\overline{\varphi}''(\overline{z})+\overline{\psi}'(\overline{z})]\,e^{-i2\alpha}, \tag{1,5}$$

$$2\mu\frac{dt}{ds}+N+i\left(-2\mu\frac{dv}{ds}+T\right)=(k+1)\,\varphi'(z). \tag{1,6}$$

Эти формулы можно записать в следующем виде

$$\operatorname{Im}[(k+1)\,\varphi'(z)]=-2\mu\frac{dv}{ds}+T \qquad (\text{Im — мнимая часть}), \tag{1,7}$$

$$\operatorname{Im}[\psi'(z)\,e^{i2\alpha}]=2\mu\frac{dv}{ds}+\operatorname{Im}[k\varphi'(z)-\overline{\varphi}'(\overline{z})+z\overline{\varphi}''(\overline{z})\,e^{-i2\alpha}], \tag{1,8}$$

$$\operatorname{Re}[(k+1)\,\varphi'(z)]=2\mu\frac{dt}{ds}+N \qquad (\text{Re — вещественная часть}), \tag{1,9}$$

$$\operatorname{Re}[\psi'(z)\,e^{i2\alpha}]=2\mu\frac{dt}{ds}-\operatorname{Re}[k\varphi'(z)-\overline{\varphi}'(\overline{z})+z\overline{\varphi}''(\overline{z})\,e^{-i2\alpha}], \tag{1,10}$$

или, что все равно, в виде

$$\operatorname{Im}[(k+1)\varphi'(z)] = -2\mu\frac{d\nu}{ds} + T, \tag{1,7'}$$

$$\operatorname{Im}[\psi'(z)e^{i2\alpha}] = T - \operatorname{Im}[\bar{z}\varphi''(z)e^{i2\alpha}], \tag{1,8'}$$

$$\operatorname{Re}[(k+1)\varphi'(z)] = 2\mu\frac{dt}{ds} + N, \tag{1,9'}$$

$$\operatorname{Re}[\psi'(z)e^{i2\alpha}] = \frac{2}{k+1}2\mu\frac{dt}{ds} - \frac{k-1}{k+1}N - \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi''(z)e^{i2\alpha}]. \tag{1,10'}$$

Формулы (1,5), (1,7) и (1,8′) в дальнейшем будут играть основную роль при решении третьей основной задачи, а формулы (1,5), (1,9) и (1,10′) — при решении четвертой задачи. Формула (1,7) показывает, что в случае третьей основной задачи для любой области, ограниченной кусочно прямолинейным контуром, нахождение функции $\varphi'(z)$ сводится к решению задачи Дирихле для этой области. После нахождения же функции $\varphi'(z)$ функция $\psi'(z)$ должна определяться в соответствии с формулой (1,8′), как решение задачи Римана-Гильберта. Формула (1,9) показывает, что в случае четвертой задачи для любой области, ограниченной кусочно прямолинейным контуром, нахождение функции $\varphi'(z)$ сводится также к решению задачи Дирихле для этой области, после нахождения же функции $\varphi'(z)$ функция $\psi'(z)$ должна определяться так же, как решение задачи Римана-Гильберта, в соответствии с формулой (1,10′).

§ 2. Решение третьей и четвертой задач для прямоугольника. Пусть теперь область G, о которой говорилось в предыдущем параграфе, есть прямоугольник с вершинами A_1, A_2, A_3, A_4, имеющими аффиксы $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}+ib$, $-\frac{a}{2}+ib$ и соответственно $-\frac{a}{2}$ (a и b — положительные числа), L — его граница, а σ — длина дуги L, отсчитываемая от точки $z=0$ в положительном направлении обхода L. Пусть $\zeta=\rho e^{i\theta}=\frac{\operatorname{sn} z-i}{\operatorname{sn} z+i}$, где $\operatorname{sn} z$ — эллиптический синус с периодами $2a$ и $2bi$, есть функция, конформно отображающая прямоугольник G на круг $|\zeta|<1$, а a_1, a_2, a_3, a_4 — точки границы γ круга $|\zeta|<1$, соответствующие вершинам этого прямоугольника A_1, A_2, A_3 и соответственно A_4.

Третью основную задачу для прямоугольника будем понимать следующим образом.

Найти напряженное состояние прямоугольника G (а тем самым и показать его существование), допускающее непрерывность функций $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$ и $\psi(z)$ в замкнутом прямоугольнике $G+L$ и непрерывность функции $\psi'(z)$ в этом замкнутом прямоугольнике, если речь не идет об его вершинах, в окрестности которых имеют место неравенства

$$|\psi'(z)| < M \ln \frac{1}{|z - A_i|} \qquad (t = 1, 2, 3, 4; \;\; M = \text{const})^{*}), \tag{2,1}$$

для которого нормальное смещение ν и касательное напряжение T на контуре L принимают наперед заданные значения

$$\nu = \nu(\sigma), \qquad T = T(\sigma),$$

где $\nu(\sigma)$ и $T(\sigma)$ — вещественные функции от σ, которые для простоты мы будем считать удовлетворяющими следующим условиям:

a) функция $\nu(\sigma)$ непрерывна на L за исключением, быть может, угловых точек, где она может иметь точки разрыва первого рода;

b) функция $T(\sigma)$ непрерывна на L за исключением, быть может, угловых точек, где она может иметь точки разрыва первого рода и, кроме того, будучи рассматриваема как функция от θ, удовлетворяет условию Гельдера на каждой закрытой (то есть включающей свои концы) дуге a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4, a_4a_1;

c) функция $-2\mu \dfrac{d\nu(\sigma)}{d\sigma} + T(\sigma)$ как функция от θ непрерывна на окружности $|\zeta| = 1$;

d) производная $\dfrac{d}{d\theta}\left[-2\mu \dfrac{d\nu(\sigma)}{d\sigma} + T(\sigma)\right]$ как функция от θ удовлетворяет условию Гельдера на окружности $|\zeta| = 1$ **.

Приступая к решению этой задачи, учитывая условие c) в силу формулы (1,7), сразу же замечаем, что функция $\varphi'(z)$ должна определяться равенством

$$\varphi'(z) = \varphi'_0(z) + C, \tag{2,2}$$

где C — вещественная постоянная,

$$\varphi'_0(z) = \frac{i}{2\pi(k+1)} \int_0^{2\pi} \left[-2\mu \frac{d\nu(\sigma)}{d\sigma} + T(\sigma)\right] \frac{e^{i\theta} + \zeta}{e^{i\theta} - \zeta}\, d\theta. \tag{2,3}$$

Диференцируя обе части равенства (2,3) по z, получаем

$$\varphi''_0(z) = \frac{1}{\pi(k+1)} \frac{d\zeta}{dz} \int_\gamma \frac{-2\mu \dfrac{d\nu(\sigma)}{d\sigma} + T(\sigma)}{(t-\zeta)^2}\, dt \qquad (t = e^{i\theta}), \tag{2,4}$$

---

* Неравенства (2,1) эквивалентны гипотезе о том, что напряжения в угловых точках могут расти не слишком быстро, то есть в соответствии с этими неравенствами. Введение этой гипотезы даст возможность доказать существование и единственность искомого напряженного состояния.

** Условия b), c) и d) могут быть легко выражены в переменной σ, ибо связь между σ и θ известна.

или

$$\varphi_0''(z) = \frac{2i}{\pi(k+1)} \frac{\dfrac{d\,\mathrm{sn}\,z}{dz}}{(\mathrm{sn}\,z+i)^2} \int\limits_{\gamma} \frac{-2\mu\dfrac{d\nu(\sigma)}{d\sigma}+T(\sigma)}{(t-\zeta)^2}\,dt. \qquad (2,5)$$

Из равенства (2,4), учитывая, что

$$\frac{d\zeta}{dz} = A(\zeta-a_1)^{\frac{1}{2}}(\zeta-a_2)^{\frac{1}{2}}(\zeta-a_3)^{\frac{1}{2}}(\zeta-a_4)^{\frac{1}{2}},$$

где A — некоторая постоянная, а также принимая во внимание условие d) в силу известных свойств производных от интеграла типа Коши [3], [5], видим, что функция $\varphi_0''(z)$ как функция от ζ имеет предельные значения на окружности $|\zeta|=1$, удовлетворяющие на этой окружности условию Гельдера. Обозначив эти предельные значения через $\varphi_0''^{+}(z_\sigma)$, где z_σ — аффикс точки контура L, для которой соответствует длина дуги σ, для определения функции $\psi'(z)$ в силу формулы (1,8′) имеем на контуре L, если речь не идет об его угловых точках, равенство

$$\mathrm{Im}\,[\psi'^{+}(z_\sigma)e^{i2\alpha}] = T(\sigma) - \mathrm{Im}\,[z_\sigma\varphi_0''^{+}(z_\sigma)e^{i2\alpha}], \qquad (2,6)$$

где $\psi'^{+}(z_\sigma)$ — предельное изнутри значение функции $\psi'(z)$ в точке z_σ.

По условию функция $\psi'(z)$ как функция от ζ должна быть непрерывной в замкнутом круге $|\zeta|\leqslant 1$, если речь не идет о точках a_1, a_2, a_3, a_4, вблизи же этих точек она должна в силу (2,1) удовлетворять неравенствам

$$|\psi'(z)| < M'\ln\frac{1}{|\zeta-a_i|} \qquad (i=1,\,2,\,3,\,4;\; M'=\mathrm{const}).$$

Таким образом, функция $-i\psi'(z)$ как функция от ζ должна быть решением задачи Римана-Гильберта для круга $|\zeta|<1$

$$\mathrm{Re}\,[-i\psi'^{+}(z_\sigma)e^{i2\alpha}] = T(\sigma) - \mathrm{Im}\,[\bar{z}_\sigma\varphi_0''^{+}(z_\sigma)e^{i2\alpha}] \quad \text{на } \gamma \qquad (2,7)$$

с правой частью, в силу условия b), удовлетворяющей условию Гельдера на каждой из закрытых дуг a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4, a_4a_1. Индекс m этой задачи, как видно, равен нулю, а общее решение представляется в виде [6]

$$-i\psi'(z) = \frac{X(z)}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{ce^{-i2\alpha}dt}{X^{+}(t)\,(t-\zeta)} - \frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{ce^{-i2\alpha}}{X^{+}(t)}\frac{dt}{t} - X(z)\,C', \qquad (2,8)$$

где C' — любая вещественная постоянная, $c=T(\sigma)-\mathrm{Im}\,[\bar{z}_\sigma\varphi_0''^{+}(z_\sigma)e^{i2\alpha}]$,

$$X(z) = \begin{cases} e^{\Gamma(z)-i\frac{\beta}{2}} & \text{при } |\zeta|<1, \\ \zeta^{-m}e^{\Gamma(z)-i\frac{\beta}{2}} & \text{при } |\zeta|>1, \end{cases}$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma}\frac{\arg\,(-t^{-m}e^{-i4\alpha})\,dt}{t-\zeta}, \quad \beta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma}\arg\,(-t^{-m}e^{-i4\alpha})\,d\theta \quad (t=e^{i\theta}).$$

Из равенства (2,8), считая $\arg(-t^{-m}e^{-i4\alpha}) = \pi$, после подсчетов получаем

$$\psi'(z) = \psi'_0(z) + C', \tag{2,9}$$

где

$$\psi'_0(z) = \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{ \operatorname{Im}[z_0\overline{\varphi''_0}+\overline{(z_0)}] + \delta T(\sigma)\right\}\frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}\,d\theta, \tag{2,10}$$

где δ — число равное $+1$, если точка $e^{i\theta}$ принадлежит дугам a_1a_2 и a_3a_4 и равное -1, если точка $e^{i\theta}$ принадлежит дугам a_2a_3 и a_4a_1.

Подставляя равенства (2,2), (2,9) в формулу (1,5), получаем

$$2\mu\left(\frac{dv}{ds} + i\frac{dt}{ds}\right) = i\Big\{ k\varphi'_0(z) - \overline{\varphi'_0(\bar z)} + (k-1)C +$$

$$+ [z\overline{\varphi''_0(z)} + \overline{\psi'_0(z)} + \overline{C'}]e^{-i2\alpha}\Big\}. \tag{2,11}$$

Замечая теперь, что функции

$$\varphi_0(z) = \int_0^z \varphi'_0(z)\,dz, \tag{2,12}$$

$$\psi_0(z) = \int_0^z \psi'_0(z)\,dz, \tag{2,13}$$

в силу (2,3) и соответственно в силу (2,1) непрерывны в замкнутом прямоугольнике $G+L$ и, интегрируя равенство (2,11) от точки $z=0$ до любой точки $z \in G+L$ вдоль любого кусочно прямолинейного контура Γ^*, выходящего из точки $z=0$ в направлении оси x, по его длине дуги s, получаем равенство

$$2\mu(v+it) = e^{-i\alpha}[k\varphi_0(z) - z\overline{\varphi'_0(z)} - \overline{\psi_0(z)} +$$

$$+ (k-1)Cz - \overline{C'}\bar z + 2\mu t(0) - i2\mu v(0)], \tag{2,14}$$

где α — угол, составленный нормалью к Γ^*, остающейся справа при движении вдоль Γ^* от $z=0$ до точки z, с осью x, $t(0)$ — касательное смещение в точке $z=0$.

Вводя обозначения $v_1 = v\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)$, $v_2 = v(a+b)$, $v_3 = v\left(\frac{3a}{2}+\frac{3b}{2}\right)$ и учитывая непрерывность функций $\varphi_0(z)$, $\varphi'_0(z)$ и $\psi_0(z)$ в замкнутом прямоугольнике $G+L$ из равенства (2,14) для определения постоянных C, C' и $t(0)$, получаем систему линейных уравнений

$$(k-1)\frac{a}{2}C-\frac{a}{2}C'+2\mu t(0)=-\operatorname{Re}[k\varphi_0(z_1)-z_1\overline{\varphi'_0(z_1)}-\overline{\psi_0(z_1)}]+2\mu v_1,$$

$$(k-1)bC+bC'=-\operatorname{Im}[k\varphi_0(z_2)-z_2\overline{\varphi'_0(z_2)}-\overline{\psi_0(z_2)}]+2\mu v_2+2\mu v(0), \quad (2,15)$$

$$(k-1)\frac{a}{2}C-\frac{a}{2}C'-2\mu t(0)=\operatorname{Re}[k\varphi_0(z_3)-z_3\overline{\varphi'_0(z_3)}-\overline{\psi_0(z_3)}]+2\mu v_3,$$

где $z_1=\frac{a}{2}+i\frac{b}{2}$, $z_2=ib$, $z_3=-\frac{a}{2}+i\frac{b}{2}$.

Из этой системы уравнений $t(0)$ и постоянные C и C' однозначно определяются, так как определитель этой системы равен $-4\mu(k-1)ab$ и, следовательно, отличен от нуля.

Таким образом, искомое напряженное состояние прямоугольника G существует и, как следует из проведенных выкладок, единственно. И если через u и v обозначить проекции смещений точек прямоугольника на ось x и соответственно на ось y, то для этого напряженного состояния имеют место равенства

$$2\mu(u+iv)=k\varphi_0(z)-z\overline{\varphi'_0(z)}-\overline{\psi_0(z)}+(k-1)Cz-C'\bar{z}+2\mu t(0)-i2\mu v(0), \quad (2,16)$$

$$N+iT=\varphi'_0(z)+\overline{\varphi'_0(z)}+2C-[\bar{z}\varphi''_0(z)+\psi'_0(z)+C']e^{-i2\alpha}, \quad (2,17)$$

где функции $\varphi'_0(z)$, $\psi'_0(z)$, $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ определяются равенствами (2,3), (2,10), (2,12) и соответственно (2,13), а $t(0)$ и постоянные C и C' определяются из системы линейных уравнений (2,15). Этим задача решена полностью.

Если, например, для простоты положить $T(\sigma)\equiv 0$, а $v(\sigma)=v_1=\mathrm{const}$ на сторонах прямоугольника A_1A_2 и A_3A_4 и $v(\sigma)=v_2=\mathrm{const}$ на сторонах прямоугольника A_2A_3 и A_4A_1, то сразу же видим, что функции $\varphi'_0(z)$, $\psi'_0(z)$, $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ тождественно равны нулю в силу формул их определяющих. Из системы же уравнений (2,15) получаем

$$t(0)=0, \quad C=\frac{2\mu}{k-1}\left(\frac{v_1}{a}+\frac{v_2}{b}\right); \quad C'=2\mu\left(\frac{v_2}{b}-\frac{v_1}{a}\right),$$

и, следовательно, формулы (2,16) и (2,17) для этого случая дают

$$u+iv=\left(\frac{v_1}{a}+\frac{v_2}{b}\right)z-\left(\frac{v_2}{b}-\frac{v_1}{a}\right)\bar{z}-iv_2,$$

$$N+iT=\frac{4\mu}{k-1}\left(\frac{v_1}{a}+\frac{v_2}{b}\right)-2\mu\left(\frac{v_2}{b}-\frac{v_1}{a}\right)e^{-i2\alpha}.$$

Так же просто, как и в этом примере, проводятся расчеты в случае любых заданных нормальных смещений и касательных напряжений на сторонах прямоугольника, усложняется лишь вычисление интегралов правых частей равенств (2,3), (2,10) (2,12) и (2,13), определяющих функции $\varphi_0'(z)$, $\psi_0'(z)$, $\varphi_0(z)$ и соответственно $\psi_0(z)$.

Из формул (2,17) и (2,10) легко можно сделать качественные выводы о поведении напряжений вблизи угловых точек прямоугольника. А именно, если заданное на L касательное напряжение $T(\sigma)$ такое, что функция $\partial T(\sigma)$ при подходе к угловой точке A_i в положительном и в отрицательном направлениях имеет одно и то же предельное значение, то есть не делает ненулевого скачка, то из формулы (2,10) видим, что функция $\psi_0'(z)$ будет непрерывной в замкнутом прямоугольнике $G+L$, за исключением, быть может, угловых точек, отличных от точки A_i. И, следовательно, в силу формулы (2,17) напряжения N и T, действующие на любое направление, то есть на направление, соответствующее любому углу α, остаются ограниченными вблизи точки A_i и, даже больше, они остаются непрерывными функциями от z в замкнутом прямоугольнике $G+L$, если речь не идет об угловых точках прямоугольника G, отличных от точки A_i.

Если же заданное на L касательное напряжение $T(\sigma)$ такое, что функция $\partial T(\sigma)$ при переходе через угловую точку A_i в положительном направлении делает ненулевой скачок Δ_i, то функцию $\psi_0'(z)$ в силу известных свойств интеграла типа Коши с разрывной плотностью [6] можно представить в виде

$$\psi_0'(z)=\Phi_0(z)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma}\frac{\partial T(\sigma)\,(t+z)}{t-z}\,\frac{dt}{t}=\Phi(z)+\frac{2\Delta_i}{\pi}\ln\frac{1}{z-A_i}, \qquad (2,18)$$

где $\Phi_0(z)$ и $\Phi(z)$ — голоморфные функции от z, стремящиеся к определенным конечным пределам, когда z стремится к A_i по любым путям. Таким образом, вблизи угловой точки A_i, в которой $\Delta_i \neq 0$, в соответствии с формулой (2,17) напряжения N и T уже обязательно будут неограниченными, с другой же стороны, они будут подчиняться неравенствам

$$|N|,\ |T|<M\ln\frac{1}{|z-A_i|}, \qquad (2,19)$$

где M — положительная постоянная.

Таким образом, напряжения при подходе к угловой точке A_i будет неограниченно возрастать тогда и только тогда, когда скачок Δ_i функции $\partial T(\sigma)$ при переходе этой точки в положительном направлении вдоль контура Γ отличен от нуля. Всякую точку A_i, для которой этот скачок Δ_i равен нулю, можно назвать точкой выполнимости закона Гука для контурных условий в том смысле, что в этой точке выполняется равенство $\partial T(\sigma)=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)$, где $T(\sigma)$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ понимаются в смысле их предельных значений при подходе к точке A_i, при этом $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ предварительно считаются выраженными через $\frac{d\nu(\sigma)}{d\sigma}$.

С физической точки зрения полученные качественные выводы о поведении напряжений в угловых точках являются вполне естественными. Пусть, например, точка A_i такая, что $\Delta_i < 0$. Тогда из формул (2,17), принимая во внимание равенство (2,18), непосредственно видим, что касательные напряжения, действующие на направления, нормаль к которым составляет с осью x углы $\alpha=0$ и $\alpha=\frac{\pi}{2}$, остаются ограниченными в окрестности точки A_i, а нормальные напряжения, действующие на направления, соответствующие углам $\alpha=0$ и $\alpha=\frac{\pi}{2}$, стремятся при подходе к точке A_i к $+\infty$ и соответственно к $-\infty$. При этом, конечно, и в том и в другом случае имеют место неравенства (2,19).

Перейдем теперь к четвертой задаче. Четвертую задачу плоской теории упругости для прямоугольника поставим следующим образом.

Найти напряженное состояние прямоугольника G (а тем самым и показать его существование), допускающее непрерывность функций $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$ и $\psi(z)$ в замкнутом прямоугольнике $G+L$ и непрерывность функции $\psi'(z)$ в этом замкнутом прямоугольнике, если речь не идет об его вершинах, в окрестности которых имеют место неравенства

$$|\psi'(z)| < M \ln \frac{1}{|z-A_i|} \qquad (i=1, 2, 3, 4;\ M=\text{const})^{*}, \tag{2,20}$$

для которого касательное смещение t и нормальное напряжение N на контуре L принимают наперед заданные значения

$$t = t(\sigma), \quad N = N(\sigma),$$

где $t(\sigma)$ и $N(\sigma)$ — вещественные функции от σ, которые считаются удовлетворяющими следующим условиям:

a′) функция $t(\sigma)$ непрерывна на L, за исключением, быть может, угловых точек, где она может иметь точки разрыва первого рода;

b′) функция $N(\sigma)$ непрерывна на L, за исключением, быть может, угловых точек, где она может иметь точки разрыва первого рода и, кроме того, будучи рассматриваема как функция от θ, удовлетворяет условию Гельдера на каждой закрытой дуге a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4, a_4a_1;

c′) функция $2\mu\frac{dt(\sigma)}{d\sigma}+N(\sigma)$ как функция от θ непрерывна на окружности $|\zeta|=1$;

d′) производная $\frac{d}{d\theta}\left[2\mu\frac{dt(\sigma)}{d\sigma}+N(\sigma)\right]$ как функция от θ удовлетворяет условию Гельдера на окружности $|\zeta|=1$.

* Ясно, что физический смысл неравенств (2,20) таков же, что и неравенств (2,1).

Для решения этой задачи обратим прежде всего внимание на формулу (1,9). Эта формула сразу же в силу условия c′) показывает, что функция $\varphi'(z)$ определяется равенством

$$\varphi'(z) = \varphi_0'(z) + iC, \tag{2,21}$$

где C — вещественная, пока неопределенная, постоянная,

$$\varphi_0'(z) = \frac{1}{2\pi(k+1)} \int_0^{2\pi} \left[2\mu \frac{dt(\sigma)}{d\sigma} + N(\sigma)\right] \frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}\, d\theta. \tag{2,22}$$

Диференцируя обе части равенства (2,22) по z, получаем

$$\varphi_0''(z) = \frac{2}{\pi(k+1)} \frac{\frac{d \operatorname{sn} z}{dz}}{(\operatorname{sn} z + i)^2} \int_\gamma \frac{2\mu \frac{dt(\sigma)}{d\sigma} + N(\sigma)}{(t-\zeta)^2}\, dt. \tag{2,23}$$

Учитывая условие d′), так же как и в предыдущем случае, убеждаемся, что функция $\varphi_0''(z)$, определенная равенством (2,23) как функция от ζ на окружности $|\zeta| = 1$, имеет предельные значения изнутри, удовлетворяющие на этой окружности условию Гельдера. Обозначив эти предельные значения через $\varphi_0''^{+}(z_0)$ (z_0 — аффикс точки контура L, для которой соответствует длина дуги σ), для определения функции $\psi'(z)$ в силу формулы (1,10′) имеем на L, если речь не идет об угловых точках, равенство

$$\operatorname{Re}[\psi'^{+}(z_0) e^{i2\alpha}] = \frac{2}{k+1}\, 2\mu \frac{dt(\sigma)}{d\sigma} - \frac{k-1}{k+1} N(\sigma) -$$

$$- \operatorname{Re}[\bar{z}_0 \varphi_0''^{+}(z_0) e^{i2\alpha}], \tag{2,24}$$

где $\psi'^{+}(z_0)$ — предельное значение изнутри функции $\psi'(z)$ в точке z_0. По условию $\psi'(z)$ как функция от ζ непрерывна в замкнутом круге $|\zeta| \leqslant 1$, за исключением, быть может, точек a_1, a_2, a_3, a_4, вблизи которых она в силу неравенств (2,20) должна удовлетворять неравенствам

$$|\psi'(z)| < M' \ln \frac{1}{|\zeta - a_i|} \qquad (i = 1, 2, 3, 4; \quad M' = \text{const}).$$

Таким образом, функция $\psi'(z)$ как функция от ζ должна быть решением задачи Римана-Гильберта для круга $|\zeta| < 1$

$$\operatorname{Re}[\psi'^{+}(z_0) e^{i2\alpha}] = \frac{2}{k+1} 2\mu \frac{dt(\sigma)}{d\sigma} - \frac{k-1}{k+1} N(\sigma) - \operatorname{Re}[\bar{z}_0 \varphi_0''^{+}(z_0) e^{i2\alpha}] \text{ на } \gamma \tag{2,25}$$

с правой частью, удовлетворяющей условию Гельдера на каждой из закрытых дуг a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4, a_4a_1 (в силу условий b′) и d′)). Индекс

m этой задачи равен нулю, а общее решение легко находится в виде

$$\psi'(z) = \frac{X(z)}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{ce^{-i2\alpha}dt}{X^+(t)(t-\zeta)} - \frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{ce^{-i2\alpha}dt}{X^+(t)\,t} + X(z)\,C', \quad (2,26)$$

где C' — любая вещественная постоянная,

$$c = \frac{2}{k+1}2\mu\frac{dt(\sigma)}{d\sigma} - \frac{k-1}{k+1}N(\sigma) - \operatorname{Re}[\bar{z}_\sigma\varphi_0''^{+}(z_\sigma)\,e^{i2\alpha}],$$

$$X(z) = \begin{cases} e^{\Gamma(z) - i\frac{\beta}{2}} & \text{при } |\zeta| < 1, \\ \zeta^{-m}e^{\Gamma(z) - i\frac{\beta}{2}} & \text{при } |\zeta| > 1, \end{cases}$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma}\frac{\arg(-t^{-m}e^{-i4\alpha})}{t-\zeta}dt,\ \beta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma}\arg(-t^{-m}e^{-i4\alpha})\,d\theta \quad (t = e^{i\theta}).$$

Считая $\arg(-t^{-m}e^{-i4\alpha}) = \pi$, из равенства (2,26) после подсчетов получаем

$$\psi'(z) = \psi_0'(z) + iC', \quad (2,27)$$

где

$$\psi_0'(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left\{\delta\left[\frac{2}{k+1}2\mu\frac{dt(\sigma)}{d\sigma} - \frac{k-1}{k+1}N(\sigma)\right] - \right.$$

$$\left. - \operatorname{Re}[\bar{z}_\sigma\varphi_0''^{+}(z_\sigma)]\right\}\frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}d\theta \quad (2,28)$$

(δ — число равное $+1$, если точка $e^{i\theta}$ принадлежит дугам a_1a_2 и a_3a_4 и равное -1, если эта точка принадлежит дугам a_2a_3 и a_4a_1).

Подставляя теперь равенства (2,21) и (2,27) в формулу (1,5), получаем

$$2\mu\left(\frac{dv}{ds} + i\frac{dt}{ds}\right) = i\{k\varphi_0(z) - \overline{\varphi_0'(z)} + (k+1)\,iC +$$

$$+ [z\overline{\varphi_0''(z)} + \overline{\psi_0'(z)} + iC']\,e^{-i2\alpha}\}. \quad (2,29)$$

Замечая теперь, что функции

$$\varphi_0(z) = \int\limits_0^z \varphi_0'(z)\,dz, \quad (2,30)$$

$$\psi_0(z) = \int\limits_0^z \psi_0'(z)\,dz \quad (2,31)$$

в силу (2,22) и соответственно в силу (2,20) непрерывны в замкнутом прямоугольнике $G + L$ и, интегрируя равенство (2,29) от точки $z = 0$

до любой точки $z \subset G+L$ вдоль любого кусочно прямолинейного контура Γ^*, выходящего из точки $z=0$ в направлении оси x, по его длине дуги s, получаем равенство

$$2\mu(\nu+it)=e^{-i\alpha}[k\varphi_0(z)-z\overline{\varphi'_0(z)}-\overline{\psi_0(z)}+$$
$$+(k+1)iCz-iC'\bar{z}+2\mu t(0)-i2\mu\nu(0)], \qquad (2,32)$$

где α — угол, составленный нормалью к Γ^*, остающейся справа при движении вдоль Γ^* от точки $z=0$ до точки $z \subset G+L$, с осью x, $\nu(0)$ — нормальное смещение в точке $z=0$.

Вводя обозначения $t_1=t\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)$, $t_2=t(a+b)$, $t_3=t\left(\frac{3a}{2}+\frac{3b}{2}\right)$, $z_1=\frac{a}{2}+i\frac{b}{2}$, $z_2=ib$, $z_3=-\frac{a}{2}+i\frac{b}{2}$ и учитывая непрерывность функций $\varphi_0(z)$, $\varphi'_0(z)$ и $\psi_0(z)$ в замкнутом прямоугольнике $G+L$, из равенства (2,32) для определения постоянных C, C' и $\nu(0)$ получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$(k+1)\frac{a}{2}C-\frac{a}{2}C'-2\mu\nu(0)=-\operatorname{Im}[k\varphi_0(z_1)-z_1\overline{\varphi'_0(z_1)}-\overline{\psi'_0(z_1)}]+2\mu t_1,$$
$$(k+1)bC+bC'=\operatorname{Re}[k\varphi_0(z_2)-z_2\overline{\varphi'_0(z_2)}-\overline{\psi'_0(z_2)}]+2\mu t_2+2\mu t(0), \qquad (2,33)$$
$$(k+1)\frac{a}{2}C-\frac{a}{2}C'+2\mu\nu(0)=\operatorname{Im}[k\varphi_0(z_3)-z_3\overline{\varphi'_0(z_3)}-\overline{\psi_0(z_3)}]+2\mu t_3.$$

Из этой системы уравнений $\nu(0)$ и постоянные C и C' однозначно определяются, так как определитель этой системы равен $4\mu(k+1)ab$ и, следовательно, отличен от нуля.

Таким образом, искомое напряженное состояние существует единственно и для проекций смещений точек прямоугольника u и v на ось x и соответственно на ось y и для N и T имеют место равенства

$$2\mu(u+iv)=k\varphi_0(z)-z\overline{\varphi'_0(z)}-\overline{\psi_0(z)}+(k+1)iCz-iC'\bar{z}+2\mu t(0)-i2\mu\nu(0), \quad (2,34)$$

$$N+iT=\varphi'_0(z)+\overline{\varphi'_0(z)}-[z\overline{\varphi''_0(z)}+\overline{\psi'_0(z)}-iC']e^{-i2\alpha}, \qquad (2,35)$$

где функции $\varphi'_0(z)$, $\psi'_0(z)$, $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ определяются равенствами (2,22), (2,28), (2,30) и соответственно (2,31), а $\nu(0)$ и постоянные C и C' определяются из системы линейных уравнений (2,33). Этим четвертая задача для прямоугольника решена полностью.

Так, например, если положить $N(\sigma)\equiv 0$, а $t(\sigma)=t_1\equiv\text{const}$ на сторонах прямоугольника A_1A_2 и A_3A_4 и $t(\sigma)=t_2=\text{const}$ на сторонах прямоугольника A_2A_3 и A_4A_1, то функции $\varphi'_0(z)$, $\psi'_0(z)$, $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ будут тождественно равны нулю, а для постоянных $\nu(0)$, C и C' из системы уравнений (2,33) будем иметь равенства

$$\nu(0)=0, \quad C=\frac{2\mu}{k+1}\left(\frac{t_1}{a}+\frac{t_2}{b}\right), \quad C'=2\mu\left(\frac{t_2}{b}-\frac{t_1}{a}\right).$$

и, следовательно, формулы (2,34) и (2,35) для этого случая дадут

$$u+iv=i\left(\frac{t_1}{a}+\frac{t_2}{b}\right)z-i\left(\frac{t_2}{b}-\frac{t_1}{a}\right)\bar{z}+i_2,$$

$$N+iT=i\,2\mu\left(\frac{t_2}{b}-\frac{t_1}{a}\right)e^{-i2\alpha}.$$

Так же проводятся расчеты в случае и любых заданных на контуре значений $t(\sigma)$ и $N(\sigma)$, хотя и усложняется несколько расчет интегралов правых частей равенств (2,22), (2,28), (2,30) и (2,31), определяющих функции $\varphi'_0(z)$, $\psi'_0(z)$, $\varphi_0(z)$ и, соответственно, $\psi_0(z)$. То есть полученное решение задачи является вполне эффективным.

Сделаем теперь качественные выводы из формул (2,35) и (2,28) о поведении напряжений вблизи угловых точек прямоугольника G. Допустим, что заданные на L касательное смещение $t(\sigma)$ и нормальное напряжение $N(\sigma)$ такие, что функция $\delta\left|\frac{2}{k-1}2\mu\frac{dt(\sigma)}{d\sigma}-N(\sigma)\right|$ при подходе к угловой точке A_i в положительном и в отрицательном направлениях имеет одинаковые предельные значения. Всякую угловую точку A_i, где выполнено это условие, можно назвать точкой выполнимости закона Гука для контурных условий данной задачи. В самом деле непрерывность функции $\delta\left|\frac{2}{k-1}2\mu\frac{dt(\sigma)}{d\sigma}-N(\sigma)\right|$, например, в точке A_2 в сочетании с условием c′) показывает, что при подходе к точке A_2 в положительном и в отрицательном направлениях в пределе имеют место равенства

$$N(\sigma)=\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}$$

и соответственно

$$N(\sigma)=\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+2\mu\frac{\partial v}{\partial y},$$

где под $N(\sigma)$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$ нужно понимать их предельные значения при подходе к точке A_2, причем $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$ предварительно предполагаются выраженными через $\frac{dt(\sigma)}{d\sigma}$. Эти равенства говорят о том, что контурные условия $t(\sigma)$ и $N(\sigma)$ таковы, что связь между ними в данной точке не противоречит закону Гука, то есть обычной связи между компонентами тензора напряжений и тензора деформаций. Заметив это, обратимся к рассмотрению напряжений в точке A_i, в которой функция $\delta\left|\frac{2}{k-1}2\mu\frac{dt(\sigma)}{d\sigma}-N(\sigma)\right|$ удовлетворяет высказанному услозию, то есть имеют одинаковые предельные значения при подходе к A_i в положительном и в отрицательном направлениях. Из равенства (2,28) видим, что функция $\psi'_0(z)$ будет непрерывной в замкнутом прямоугольнике $G+L$ за исключением, быть может, его угловых точек, отличных от точки A_i, и, следовательно, напряжения N и T, действующие на любое направление, остаются ограниченными вблизи точки A_i, и, даже больше, они будут непрерывными функциями от z в замкнутом прямоугольнике $G+L$, если речь не идет об угловых точках этого прямоугольника, отличных от точки A_i.

Если же заданное на L касательное смещение $t(\sigma)$ и нормальное напряжение $N(\sigma)$ такие, что функция $\delta\left|\frac{2}{k-1}2\mu\frac{dt(\sigma)}{d\sigma}-N(\sigma)\right|$ при переходе через угловую точку A_i в положительном направлении делает ненулевой скачок Δ_i', то для функции $\psi'_0(z)$ как для интеграла типа Коши с разрывной плотностью в силу (2,28) имеем равенство

$$\psi'_0(z)=\Phi_0(z)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\delta\left|\frac{2}{k+1}2\mu\frac{dt(\sigma)}{d\sigma}-\frac{k-1}{k+1}N(\sigma)\right|\frac{t+\zeta}{t-\zeta}\frac{dt}{t}=$$

$$=\Phi(z)+\frac{k-1}{k+1}\frac{2\Delta_i'}{\pi i}\ln\frac{1}{z-A_i}, \tag{2,36}$$

где $\Phi_0(z)$ и $\Phi(z)$ — голоморфные функции от z, непрерывные в замкнутом прямоугольнике $G+L$, если речь не идет об его угловых точках, отличных от точки A_i. Следовательно, вблизи угловой точки A_i, в которой $\Delta_i'\neq 0$ в соответствии с формулой (2,35) напряжения N и T уже не остаются ограниченными, а, с другой стороны, имеют место неравенства

$$|N|,\ |T|<M\ln\frac{1}{|z-A_i|}, \tag{2,37}$$

где M — положительная постоянная.

Таким образом, условие $\Delta_i'\neq 0$ есть необходимое и достаточное условие для того, чтобы напряжения вблизи угловой точки A_i неограниченно возрастали. Пусть, например, $\Delta_i'<0$, тогда из формулы (2,35) и из равенства (2,36) видим, что нормальные напряжения, действующие на направления, нормаль к которым составляет с осью x углы $\alpha=0$ и $\alpha=\frac{\pi}{2}$, остаются ограниченными в окрестности точки A_i (ибо вещественная часть правой части равенства (2,36) в окрестности точки A_i ограничена), а касательные напряжения, действующие на направления, соответствующие углам $\alpha=0$ и $\alpha=\frac{\pi}{2}$, стремятся при подходе к точке A_i к $+\infty$ и, соответственно, к $-\infty$.

§ 3. Решение третьей и четвертой задач для остроугольного и прямоугольного треугольников. Пусть теперь область G, о которой говорилось в § 1, есть прямоугольный или остроугольный треугольник с вершинами A_1, A_2, A_3, имеющими аффиксы 0, a, и соответственно $b+ic$ (a, b и c — положительные конечные числа), а L — его граница, и пусть $\alpha_1\pi$, $\alpha_2\pi$, $\alpha_3\pi$ $\left(0<\alpha_1\leqslant\frac{1}{2},\ 0<\alpha_2<\frac{1}{2},\ 0<\alpha_3<\frac{1}{2}\right)$ — внутренние углы этого треугольника при вершинах A_1, A_2 и соответственно A_3, а σ — длина дуги контура L, отсчитываемая от точки $z=0$ в положительном направлении обхода L. Пусть $\zeta=\varrho e^{i\vartheta}=\zeta(z)$ есть функция, конформно отображающая треугольник G на круг $|\zeta|<1$, a_1, a_2, a_3 — точки границы γ круга $|\zeta|<1$ с аффиксами $e^{i\theta_1}$, $e^{i\theta_2}$ и соответственно $e^{i\theta_3}$ $(\theta_1<\theta_2<\theta_3)$, соответствующие вершинам треугольника A_1, A_2 и соответственно A_3. Для определения этой функции $\zeta=\zeta(z)$, как легко видеть, имеет место равенство

$$z=B\int\limits_{e^{i\theta_1}}^{\zeta}(\zeta-e^{i\theta_1})^{-\mu_1}(\zeta-e^{i\theta_2})^{-\mu_2}(\zeta-e^{i\theta_3})^{-\mu_3}d\zeta, \tag{3,1}$$

где $\mu_1=1-\alpha_1$, $\mu_2=1-\alpha_2$, $\mu_3=1-\alpha_3$,

$$B=\frac{a}{i\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2}(e^{i\theta}-e^{i\theta_1})^{-\mu_1}(e^{i\theta}-e^{i\theta_2})^{-\mu_2}(e^{i\theta}-e^{i\theta_3})^{-\mu_3}e^{i\theta}\,d\theta}.$$

Третью основную задачу для прямоугольного или остроугольного треугольника поставим следующим образом.

Найти напряженное состояние прямоугольного или остроугольного треугольника G, допускающее непрерывность функций $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$ и $\psi(z)$ в замкнутом треугольнике $G+L$ и непрерывность функции $\psi'(z)$ в этом замкнутом треугольнике, если речь не идет об его угловых точках, в окрестности которых имеет место неравенство

$$|\psi'(z)|<M\ln\frac{1}{|z-A_i|}\qquad(i=1,\ 2,\ 3;\quad M=\mathrm{const}), \tag{3,2}$$

для которого нормальное смещение v и касательное напряжение T на контуре L принимают наперед заданные значения

$$v=v(\sigma),\quad T=T(\sigma),$$

где $v(\sigma)$ и $T(\sigma)$ — вещественные функции от σ, которые мы будем считать удовлетворяющими следующим условиям:

a) функция $v(\sigma)$ непрерывна на L, за исключением, быть может, угловых точек, где она может иметь точки разрыва первого рода;

b) функция $T(\sigma)$ непрерывна на L, за исключением, быть может, угловых точек и, кроме того, будучи рассматриваема как функция от θ, удовлетворяет условию Гельдера на каждой закрытой дуге a_1a_2, a_2a_3, a_3a_1;

c) функция $-2\mu \frac{d\nu(\sigma)}{d\sigma} + T(\sigma)$ как функция от θ непрерывна на окружности $|\zeta| = 1$;

d) производная $\frac{d}{d\theta}\left[-2\mu \frac{d\nu(\sigma)}{d\sigma} + T(\sigma)\right]$ как функция от θ удовлетворяет условию Гельдера на окружности $|\zeta| = 1$ *.

Приступая к решению этой задачи, так же как в предыдущем параграфе, учитывая условие с), из формулы (1,7) для искомой функции $\varphi'(z)$ имеем равенство

$$\varphi'(z) = \varphi'_0(z) + C, \tag{3,3}$$

где C — вещественная постоянная,

$$\varphi'_0(z) = \frac{i}{2\pi(k+1)} \int_0^{2\pi} \left[-2\mu \frac{d\nu(\sigma)}{d\sigma} + T(\sigma)\right] \frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}\, d\theta. \tag{3,4}$$

Диференцируя обе части равенства (3,4) по z и учитывая равенство (3,1), получаем

$$\varphi''_0(z) = \frac{1}{\pi(k+1)B} (\zeta-a_1)^{\mu_1} (\zeta-a_2)^{\mu_2} (\zeta-a_3)^{\mu_3} \int_\gamma \frac{-2\mu \frac{d\nu(\sigma)}{d\sigma} + T(\sigma)}{(t-\zeta)^2}\, dt \quad (t=e^{i\theta}). \tag{3,5}$$

Учитывая условие d) и то, что μ_1, μ_2 и μ_3 положительные числа, видим, что функция $\varphi''_0(z)$ как функция от ζ на окружности $|\zeta| = 1$ имеет предельные значения $\varphi''^{+}_0(z_0)$ изнутри (z_0 — точка на L, которой соответствует длина дуги σ), удовлетворяющие на этой окружности условию Гельдера.

Для определения функции $\psi'(z)$ в силу формулы (1,8′) имеем на контуре L, если речь не идет об его угловых точках, равенство

$$\mathrm{Im}\,[\psi'^{+}(z_0)\, e^{i2\alpha}] = T(\sigma) - \mathrm{Im}\,[\bar{z}_0 \varphi''^{+}_0(z_0)\, e^{i2\alpha}], \tag{3,6}$$

где $\psi'^{+}(z_0)$ — предельное изнутри значение $\psi'(z)$ в точке z_0.

По условию функция $\psi'(z)$ как функция от ζ должна быть непрерывной в замкнутом круге $|\zeta| \leqslant 1$, если речь не идет о точках a_1, a_2, a_3, вблизи же этих точек в силу (3,2) она должна удовлетворять неравенствам

$$|\psi'(z)| < M' \ln \frac{1}{|\zeta-a_i|} \qquad (i=1,\,2,\,3;\quad M'=\mathrm{const}). \tag{3,7}$$

* Условия b), с) и d) могут быть выражены в переменной σ, ибо связь между σ и θ известна и дается равенством (3,1).

Таким образом, функция $-i\psi'(z)$ как функция от ζ должна быть решением задачи Римана-Гильберта для круга $|\zeta|<1$

$$\operatorname{Re}\left[-i\psi'^{+}(z_0)\,e^{i2\alpha}\right] = T(\sigma) - \operatorname{Im}\left[z_0\varphi_0''^{+}(z_0)\,e^{i2\alpha}\right] \quad \text{на } \gamma \tag{3,8}$$

с правой частью, удовлетворяющей условию Гельдера на каждой из закрытых дуг a_1a_2, a_2a_3, a_3a_1. Замечая, что

$$-4\alpha = \begin{cases} 2\pi & \text{на } a_1a_2, \\ -4\left(\frac{\pi}{2} - \pi\alpha_2\right) & \text{на } a_2a_3, \\ -4\left(\frac{\pi}{2} + \pi\alpha_1\right) & \text{на } a_3a_1, \end{cases}$$

видим, что индекс m однородной задачи Римана-Гильберта

$$\operatorname{Re}\left[-i\psi'^{+}(z_0)\,e^{i2\alpha}\right] = 0 \quad \text{на } \gamma, \tag{3,9}$$

соответствующий классу ее решений, ограниченных вблизи точек a_1, a_2, a_3, равен -1. Следовательно, неоднородная задача Римана-Гильберта (3,8) имеет и притом единственное решение вблизи точек a_1, a_2, a_3, удовлетворяющее неравенствам (3,7). Это решение на основании общей теории задачи Римана-Гильберта с разрывными коэфициентами можно записать в виде

$$\psi'(z) = \psi_0'(z), \tag{3,10}$$

где $\psi_0'(z)$ определяется равенством

$$-i\psi_0'(z) = \frac{X(z)}{\pi i}\int_\gamma \frac{c e^{-i2\alpha}\,dt}{X^{+}(t)(t-\zeta)}, \tag{3,11}$$

где $c = T(\sigma) - \operatorname{Im}\left[z_0\varphi_0''^{+}(z_0)\,e^{i2\alpha}\right]$,

$$X(z) = \begin{cases} e^{\Gamma(z) - i\frac{\beta}{2}} & \text{при } |\zeta|<1, \\ \zeta^{-m} e^{\Gamma(z) - i\frac{\beta}{2}} & \text{при } |\zeta|>1, \end{cases}$$

$X^{+}(t)$ — предельное значение $X(z)$ при ζ, стремящемся к точке $t = e^{i\theta}$ изнутри,

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{\arg\left(-t^{-m}e^{i\omega}\right)dt}{t-\zeta}, \quad \beta = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \arg\left(-t^{-m}e^{i\omega}\right)d\theta,$$

$$\omega = \begin{cases} 2\pi & \text{на } a_1'a_2, \\ 4\alpha_2 & \text{на } a_2a_3, \\ 2\pi - 4\alpha_1 & \text{на } a_3a_1, \\ 0 & \text{на } a_1a_1', \end{cases} \tag{3,12}$$

a_1' — точка на окружности $|\zeta| = 1$, лежащая на открытой (то есть не включающей своих концов) дуге $a_1 a_2$.

Из равенства (3,10) после элементарных подсчетов получаем

$$\psi_0'(z) = \frac{e^{\Gamma(z)}}{\pi} \int\limits_{\gamma} \frac{\{\operatorname{Im}[z_\sigma \overline{\varphi}_0''+(\overline{z}_\sigma) e^{-i2\alpha}] + T(\sigma)\} e^{-i2\alpha}}{e^{\Gamma^+(t)}(t-\zeta)} dt, \tag{3,13}$$

где

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma} \frac{\arg(-te^{i\omega})\, dt}{(t-\zeta)}. \tag{3,14}$$

Подставляя определенные равенствами (3,3), (3,10) функции $\varphi'(z)$ и соответственно $\psi'(z)$ в формулу (1,5), получаем

$$2\mu\left(\frac{dv}{ds} + i\frac{dt}{ds}\right) = i\left\{k\varphi_0'(z) - \overline{\varphi}_0'(\overline{z}) + (k-1)C + [z\overline{\varphi}_0''(\overline{z}) + \overline{\psi}_0'(\overline{z})]\, e^{-i2\alpha}\right\}. \tag{3,15}$$

Замечая, что функции

$$\varphi_0(z) = \int\limits_0^z \varphi_0'(z)\, dz, \tag{3,16}$$

$$\psi_0(z) = \int\limits_0^z \psi_0'(z)\, dz \tag{3,17}$$

в силу (3,4) и соответственно в силу (3,2) непрерывны в замкнутом треугольнике $G+L$ и, интегрируя равенство (3,15) от точки $z=0$ до любой точки $z \subset G+L$ вдоль любого кусочно прямолинейного контура Γ^*, выходящего из точки $z=0$ в направлении оси x по его длине дуги s, получаем равенство

$$2\mu(v+it) = e^{-i\alpha}[k\varphi_0(z) - z\overline{\varphi}_0'(\overline{z}) - \overline{\psi}_0(\overline{z}) + (k-1)Cz + 2\mu t(0) - i2\mu v(0)], \tag{3,18}$$

где α — угол, составленный нормалью к Γ^*, остающейся справа при движении вдоль Γ^* от точки $z=0$ до точки z, с осью x, $t(0)$ — касательное смещение точки $z=0$ (в направлении оси x), $v(0)$ — предельное значение функции $v(\sigma)$ при $\sigma \to 0$, то есть при подходе к точке A_1 в направлении стороны A_2A_1.

Пусть v_2 и v_3 обозначают значения заданной функции $v(\sigma)$ в каких-либо фиксированных точках $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy$, лежащих на пересечении некоторой прямой параллельной оси x со стороной A_2A_3 и соответственно со стороной A_3A. Тогда, учитывая непрерывность функций $\varphi_0(z)$, $\varphi_0'(z)$ и $\psi_0(z)$ в замкнутом треугольнике $G+L$ из равенства (3,18) для определения постоянных C и $t(0)$, получаем систему уравнений

$$(k-1)(x_1 \sin \alpha_2 + y_1 \cos \alpha_2) C + 2\mu t(0) \sin \alpha_2 =$$

$$= -\operatorname{Re}\left[e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_2\right)} (k\varphi_0(z_1) - z_1\overline{\varphi}'_0(\overline{z}_1) - \overline{\psi}_0(\overline{z}_1))\right] + 2\mu\nu(0)\cos\alpha_2 + 2\mu\nu_2,$$

$$(k-1)(-x_2 \sin \alpha_1 + y_1 \cos \alpha_1) C - 2\mu t(0) \sin \alpha_1 =$$

$$= -\operatorname{Re}\left[e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha_1\right)} (k\varphi_0(z_2) - z_2\overline{\varphi}'_0(\overline{z}_2) - \overline{\psi}_0(\overline{z}_2))\right] + 2\mu\nu(0)\cos\alpha_1 + 2\mu\nu_3,$$

или проще

$$(k-1)\, a \sin \alpha_2 C + t(0)\, 2\mu \sin \alpha_2 =$$

$$= -\operatorname{Im}\left[e^{i\alpha_2}(k\varphi_0(z_1) - z_1\overline{\varphi}'_0(\overline{z}_1) - \overline{\psi}_0(\overline{z}_1))\right] + 2\mu\nu(0)\cos\alpha_2 + 2\mu\nu_2,$$

$$-t(0)\, 2\mu \sin \alpha_1 = -\operatorname{Im}\left[e^{-i\alpha_1}(k\varphi_0(z_2) - z_2\overline{\varphi}'_0(\overline{z}_2) - \overline{\psi}_0(\overline{z}_2))\right] +$$

$$+ 2\mu\nu(0)\cos\alpha_1 + 2\mu\nu_3. \tag{3,19}$$

Из этой системы уравнений постоянные C и $t(0)$ однозначно определяются, так как определитель этой системы равен

$$-2\mu(k-1)\, a \sin \alpha_1 \sin \alpha_2$$

и, следовательно, отличен от нуля.

Следовательно, искомое напряженное состояние треугольника существует единственно для проекций смещений u и v точек этого треугольника на ось x и соответственно на ось y, и для N и T имеют место равенства

$$2\mu(u+iv) = k\varphi_0(z) - z\overline{\varphi}'_0(\overline{z}) - \overline{\psi}_0(\overline{z}) + (k-1)Cz + 2\mu t(0) - i2\mu\nu(0), \tag{3,20}$$

$$N + iT = \varphi'_0(z) + \overline{\varphi}'_0(\overline{z}) + 2C - [\overline{z}\varphi''_0(z) + \overline{\psi}'_0(\overline{z})]\, e^{-i2\alpha}, \tag{3,21}$$

где функции $\varphi'_0(z)$, $\psi'_0(z)$, $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ определяются равенствами (3,4), (3,13), (3,16) и соответственно (3,17), а постоянные C и $t(0)$ определяются из системы линейных уравнений (3,19). Этим задача решена полностью.

Если, например, положить $T(\sigma) \equiv 0$, а функцию $\nu(\sigma)$ считать постоянной на каждой из сторон треугольника A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1; $\nu(\sigma)=0$, $\nu(\sigma)=\nu_2$ и соответственно $\nu(\sigma)=\nu_3$, то функции $\varphi'_0(z)$, $\psi'_0(z)$, $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ будут тождественно равны нулю. Из системы же уравнений (3,19) получаем

$$C = \frac{2\mu}{k-1}\left(\frac{\nu_2}{a \sin \alpha_2} + \frac{\nu_3}{a \sin \alpha_1}\right), \quad t(0) = -\frac{\nu_3}{\sin \alpha_1}$$

и, следовательно, формулы (3,20) и (3,21) для этого случая дадут

$$u + iv = \left(\frac{\nu_2}{a \sin \alpha_2} + \frac{\nu_3}{a \sin \alpha_1}\right) z - \frac{\nu_3}{\sin \alpha_1},$$

$$N + iT = \frac{4\mu}{k-1}\left(\frac{\nu_2}{a \sin \alpha_2} + \frac{\nu_3}{a \sin \alpha_1}\right).$$

Сделаем теперь качественные выводы из формул (3,21) и (3,13) о поведении напряжений в угловых точках треугольника при любых контурных условиях $\nu(\sigma)$ и $T(\sigma)$, удовлетворяющих условиям a), b), c) и d).

Функцию $\Gamma^+(t)$ в окрестности каждой точки a_i ($i=1, 2, 3$) на основании известных формул можно представить в виде

$$\Gamma^+(t_0) = \frac{i\arg(-t_0 e^{i\omega_0})}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{i\arg(-te^{i\omega})\,dt}{t-t_0} =$$

$$= \frac{i\arg(-t_0 e^{i\omega_0})}{2} + \frac{[\omega]_{a_i}}{2\pi}\ln\frac{1}{t_0-a_i} + \Phi(t_0), \qquad (3,22)$$

где ω_0 — значение ω при $t=t_0$, $[\omega]_{a_i}$ — скачок функции ω при переходе через точку a_i в положительном направлении, $\Phi(t_0)$ — функция от t_0, удовлетворяющая условию Гельдера на каждом из полуоткрытых дуг $a_{i-1}a_i$, a_ia_{i+1}, включающих точку a_i ($a_{i-1}=a_3$ при $i=1$ и $a_{i+1}=a_1$ при $i=3$). Учитывая, что $-1<\frac{[\omega]_{a_i}}{2\pi}=-\omega_i<0$ (мы рассматриваем пока случай, когда $\omega_i \neq 0$), в силу формулы (3,13) имеем

$$\frac{\psi'_0(z)}{2e^{\Gamma(z)}} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\Phi^*(t)}{(t-a_i)^{\omega_i}(t-\zeta)}\,dt, \qquad (3,23)$$

где $\Phi^*(t)$ — функция, удовлетворяющая условию Гельдера на каждой из полуоткрытых дуг $a_{i-1}a_i$, a_ia_{i+1}, включающих точку a_i. Следовательно, функцию $\frac{\psi'_0(z)}{2e^{\Gamma(z)}}$ на основании известных формул Н. И. Мусхелишвили [6] в окрестности точки a_i можно представить в виде

$$\frac{\psi'_0(z)}{2e^{\Gamma(z)}} = \frac{e^{\omega_i\pi i}\Phi^*(a_i+0) - e^{-\omega_i\pi i}\Phi^*(a_i-0)}{2i\sin\omega_i\pi}\,\frac{1}{(\zeta-a_i)^{\omega_i}} + \psi^*(\zeta), \qquad (3,24)$$

где $\Phi^*(a_i+0)$ — предельное значение функции $\Phi^*(t)$ при подходе к точке $t=a_i$ в отрицательном направлении, а $\psi^*(a_i-0)$ — предельное значение этой функции при подходе к точке $t=a_i$ в положительном направлении, $\psi^*(\zeta)$ — функция от ζ, удовлетворяющая в окрестности точки $\zeta=a_i$ неравенству

$$|\psi^*(\zeta)| < \frac{M}{|\zeta-a_i|^{\omega_i^0}}, \qquad 3,25)$$

где M и ω_i^0 — положительные постоянные, причем $\omega_i^0<\omega_i$.

Далее функция $\Gamma(z)$ в окрестности точки $\zeta=a_i$ в силу (3,14) может быть представлена в виде

$$\Gamma(z) = -\omega_i\ln\frac{1}{\zeta-a_i} + \Phi^{**}(\zeta), \qquad (3,26)$$

где $\Phi^{**}(\zeta)$ — ограниченная функция от ζ, стремящаяся к вполне определенному пределу, когда ζ стремится к точке a_i изнутри. Из (3,24), (3,25) и (3,26) заключаем, что функция $\psi'_0(z)$ остается ограниченной при подходе точки ζ к точке a_i изнутри и стремится к вполне определенному пределу, не зависящему от способа стремления ζ к точке a_i. Учитывая это обстоятельство, из формулы (3,21) видим, что напряжения N и T, действующие на любое направление, то есть на направление, соответствующее любому углу α, остаются непрерывными функциями от z в замкнутом треугольнике $G+L$, если речь не идет о прямом угле этого треугольника, когда таковой имеется.

Если же прямой угол имеется, то есть, если $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, то функция $\Gamma(z)$ непрерывна к окрестности точки $\zeta = a_1$ и ее предельные значения $\Gamma^+(t)$ на некоторой дуге окружности $|\zeta| = 1$, содержащей точки a_1 внутри, удовлетворяют условию Гельдера. Обращаясь теперь к равенству (3,13), видим, что функция $\psi'_0(z)$ будет непрерывной в замкнутом треугольнике $G+L$ (включая и точку A_1), если скачок функции $\delta T(\sigma)$ (δ — число равное -1 на стороне A_3A_1 и равное $+1$ на стороне A_1A_2) при переходе через точку A_1 в положительном направлении равен нулю, то есть, если точка A_1 является точкой выполнимости закона Гука для контурных условий. В противном же случае, то есть, если этот скачок Δ_1 удовлетворяет условию $\Delta_1 \neq 0$, то в окрестности точки a_1 функция $\psi'_0(z)$ может быть представлена в виде

$$\psi'_0(z) = 2i\left[\frac{\Delta_1}{\Gamma^+(a_1)} \ln\frac{1}{\zeta - a_1} + F(\zeta)\right], \tag{3,27}$$

где $F(\zeta)$ — ограниченная функция, стремящаяся к определенному пределу, когда точка ζ стремится изнутри к точке a_1 по любому пути.

Следовательно, если угол треугольника G при вершине A_1 прямой, то напряжения N и T, действующие на любое направление, будут непрерывными функциями от z в замкнутом треугольнике $G+L$ тогда и только тогда, когда скачок функции $\delta T(\sigma)$ при переходе через точку A_1 равен нулю. В противном случае, то есть если этот скачок отличен от нуля, эти напряжения обязательно растут при подходе к точке A_1, однако же при этом имеют место неравенства

$$|N|,\ |T| < M \ln\frac{1}{|z - A_1|},$$

где M — положительная постоянная.

Перейдем теперь к четвертой задаче. Четвертую задачу для остроугольного или прямоугольного треугольника поставим следующим образом.

Найти напряженное состояние остроугольного или прямоугольного треугольника G, допускающее непрерывность функций $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$

и $\psi(z)$ в замкнутом треугольнике $G+L$ и непрерывность функции $\psi'(z)$ в этом замкнутом треугольнике, если речь не идет о его вершинах, в окрестности которых имеют место неравенства

$$|\psi'(z)| < M \ln \frac{1}{|z-A_i|} \qquad (i=1,\ 2,\ 3;\ M=\text{const}), \tag{3,28}$$

для которого касательное смещение t и нормальное напряжение N на контуре L принимают наперед заданные значения

$$t=t(\sigma), \qquad N=N(\sigma),$$

где $t(\sigma)$ и $N(\sigma)$ — вещественные функции от σ, которые считаются удовлетворяющими следующим условиям:

a′) функция $t(\sigma)$ непрерывна на L за исключением, быть может, угловых точек, где она может иметь точки разрыва первого рода;

b′) функция $N(\sigma)$ непрерывна на L за исключением, быть может, угловых точек, где она может иметь точки разрыва первого рода и, кроме того, будучи рассматриваема как функция от θ, удовлетворяет условию Гельдера на каждой закрытой дуге a_1a_2, a_2a_3, a_3a_1;

c′) функция $2\mu \dfrac{dt(\sigma)}{d\sigma} + N(\sigma)$ как функция от θ непрерывна на окружности $|\zeta|=1$;

d′) производная $\dfrac{d}{d\theta}\left[2\mu \dfrac{dt(\sigma)}{d\sigma} + N(\sigma)\right]$ как функция от θ удовлетворяет условию Гельдера на окружности $|\zeta|=1$.

Для решения этой задачи используем формулы (1,9) и (1,10′). Формула (1,9) в силу условия c′) для искомой функции $\varphi'(z)$ дает

$$\varphi'(z) = \varphi_0'(z) + iC, \tag{3,29}$$

где C — вещественная постоянная

$$\varphi_0'(z) = \frac{1}{2\pi(k+1)} \int\limits_0^{2\pi} \left[2\mu \frac{dt(\sigma)}{d\sigma} + N(\sigma)\right] \frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta} d\theta. \tag{3,30}$$

Из этого равенства получаем

$$\varphi_0''(z) = \frac{1}{\pi i(k+1)B} (\zeta-a_1)^{\mu_1} (\zeta-a_2)^{\mu_2} (\zeta-a_3)^{\mu_3} \int\limits_\gamma \frac{2\mu \dfrac{dt(\sigma)}{d\sigma} + N(\sigma)}{(t-\zeta)^2} dt. \tag{3,31}$$

Учитывая условие d′), видим, что функция $\varphi_0''(z)$ как функция от ζ на окружности $|\zeta|=1$ имеет предельные значения изнутри $\varphi_0''^{+}(z_0)$, удовлетворяющие на этой окружности условию Гельдера.

Для определения функции $\psi'(z)$ в силу формулы (1,10′) имеем на контуре L, если речь не идет об его угловых точках, равенство

$$\operatorname{Re}[\psi'^{+}(z_0)\, e^{i2\alpha}] = \frac{2}{k+1} 2\mu \frac{dt(\sigma)}{d\sigma} - \frac{k-1}{k+1} N(\sigma) - \operatorname{Re}[\bar{z}_0 \varphi_0''^{+}(z_0)\, e^{i2\alpha}]. \tag{3,32}$$

По условию функция $\psi'(z)$ как функция от ζ должна быть непрерывной в замкнутом круге $|\zeta| \leqslant 1$, если речь не идет о точках a_1, a_2, a_3, вблизи же этих точек в силу (3,28) она должна удовлетворять неравенствам

$$|\psi'(z)| < M' \ln \frac{1}{|\zeta - a_i|} \qquad (i=1,\ 2,\ 3;\ M' = \text{const}). \tag{3,33}$$

Таким образом, функция $\psi'(z)$ как функция от ζ должна быть решением задачи Римана-Гильберта для круга $|\zeta| < 1$

$$\operatorname{Re}[\psi'^{+}(z_\sigma)\, e^{i2\alpha}] = \frac{2}{k+1} 2\mu \frac{dt(\sigma)}{d\sigma} - \frac{k-1}{k+1} N(\sigma) - \operatorname{Re}[\bar{z}_\sigma \varphi_0''^{+}(z_\sigma)\, e^{i2\alpha}] \text{ на } \gamma \tag{3,34}$$

с правой частью в силу (3,31) и в силу b′) и d′), удовлетворяющей условию Гельдера на каждой из закрытых дуг a_1a_2, a_2a_3, a_3a_1.

Так же, как и в случае задачи Римана-Гильберта (3,8), убеждаемся, что решение задачи Римана-Гильберта (3,34) существует единственно и может быть записано в виде

$$\psi'(z) = \psi_0'(z), \tag{3,35}$$

где

$$\psi_0'(z) = \frac{X(z)}{\pi i} \int_\gamma \frac{c e^{-i2\alpha}\, dt}{X^{+}(t)\, t - \zeta)}, \tag{3,36}$$

где, в свою очередь, $c = \dfrac{2}{k+1} 2\mu \dfrac{dt(\sigma)}{d\sigma} - \dfrac{k-1}{k+1} N(\sigma) - \operatorname{Re}[\bar{z}_\sigma \varphi_0''^{+}(z_\sigma)\, e^{i2\alpha}]$,

$$X(z) = \begin{cases} e^{\Gamma(z) - i\frac{\beta}{2}} & \text{при } |\zeta| < 1, \\ \zeta^{-m} e^{\Gamma(z) - i\frac{\beta}{2}} & \text{при } |\zeta| > 1, \end{cases}$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{\arg(-t^{-m} e^{i\omega})\, dt}{t - \zeta}, \quad \beta = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \arg(-t^{-m} e^{i\omega})\, d\theta,\ m = -1,$$

а функция ω определяется равенством (3,12).

Равенство (3,36) можно записать в виде

$$\psi_0'(z) = \frac{e^{\Gamma(z)}}{\pi i} \int_\gamma \frac{\left\{\dfrac{2}{k+1} 2\mu \dfrac{dt(\sigma)}{d\sigma} - \dfrac{k-1}{k+1} N(\sigma) - \operatorname{Re}[\bar{z}_\sigma \varphi_0''^{+}(z_\sigma)\, e^{i2\alpha}]\right\} e^{-i2\alpha}}{e^{\Gamma^{+}(t)} \quad (t-\zeta)}\, dt, \tag{3,37}$$

где

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{\arg(-t e^{i\omega})\, dt}{t - \zeta}. \tag{3,38}$$

Подставляя равенства (3,29) и (3,36) в формулу (1,5), получаем

$$2\mu\left(\frac{dv}{ds} + i\frac{dt}{ds}\right) = i\left\{k\varphi_0'(z) - \overline{\varphi_0'(z)} + i(k+1)C + [z\overline{\varphi_0''(z)} + \overline{\psi_0'(z)}]\, e^{-i2\alpha}\right\}. \tag{3,39}$$

Замечая, что функции

$$\varphi_0(z) = \int_0^z \varphi'_0(z)\,dz, \tag{3,40}$$

$$\psi_0(z) = \int_0^z \psi'_0(z)\,dz \tag{3,41}$$

в силу (3,30) и соответственно в силу (3,28) и (3,35) непрерывны в замкнутом треугольнике $G+L$ и интегрируя равенство (3,39) от точки $z=0$ до любой точки $z \subset G+L$ вдоль любого кусочно прямолинейного контура Γ^*, выходящего из точки $z=0$ в направлении стороны A_1A_2 по его длине дуги s, получаем равенство

$$2\mu(\nu+it) = e^{-i\alpha}[k\varphi_0(z) - z\overline{\varphi'_0}(\overline{z}) - \overline{\psi_0}(\overline{z}) + i(k+1)Cz + 2\mu t(0) - i2\mu\nu(0)], \tag{3,42}$$

где α — угол, составленный нормалью к Γ^*, остающейся справа при движении вдоль Γ^* от точки $z=0$ до точки $z \subset G+L$ с осью x, $\nu(0)$ — нормальное смещение в точке $z=0$ (в направлении нормали к стороне A_1A_2), $t(0)$ — предельное значение функции $t(\sigma)$ при $\sigma \to 0$, то есть при подходе к точке A_1 в направлении стороны A_2A_1.

Пусть t_2 и t_3 обозначают значения заданной функции $t(\sigma)$ в каких-либо фиксированных точках $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_1$, лежащих на сторонах треугольника A_2A_3 и соответственно A_3A_1. Тогда, учитывая непрерывность функций $\varphi_0(z)$, $\varphi'_0(z)$ и $\psi_0(z)$ в замкнутом треугольнике $G+L$, из равенства (3,42) для определения постоянных C и $\nu(0)$ получаем следующую систему уравнений

$$\begin{gathered}
(k+1)\,a\sin\alpha_2\,C - \nu(0)\,2\mu\sin\alpha_2 = \\
= \mathrm{Re}\,[e^{i\alpha_2}(k\varphi_0(z_1) - z_1\overline{\varphi'_0}(\overline{z}_1) - \overline{\psi_0}(\overline{z}_1)] + 2\mu t(0)\cos\alpha_2 + 2\mu t_2, \\
\nu(0)\,2\mu\sin\alpha_1 = \mathrm{Re}\,[e^{-i\alpha_1}(k\varphi_0(z_2) - z_2\overline{\varphi'_0}(\overline{z}_2) - \overline{\psi_0}(\overline{z}_2))] + \\
+ 2\mu t(0)\cos\alpha_1 + 2\mu t_3.
\end{gathered} \tag{3,43}$$

Из этой системы уравнений постоянные C и $\nu(0)$ однозначно определяются, ибо определитель этой системы равен $2(k+1)\,a\sin\alpha_1\sin\alpha_2$ и, следовательно, отличен от нуля.

Таким образом, искомое напряженное состояние треугольника существует единственно и для проекций смещений u и v точек этого треугольника на ось x и соответственно на ось y, и для N и T имеют место равенства

$$2\mu(u+iv) = k\varphi_0(z) - z\overline{\varphi'_0}(\overline{z}) - \overline{\psi_0}(\overline{z}) + (k+1)\,iCz + 2\mu t(0) - i2\mu\nu(0), \tag{3,44}$$

$$N + iT = \varphi'_0(z) + \overline{\varphi'_0}(\overline{z}) + [\,\overline{z}\varphi''_0(z) + \psi'_0(z)\,]\,e^{-i2\alpha}, \tag{3,45}$$

где функции $\varphi'_0(z)$, $\psi'_0(z)$, $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ определяются равенствами (3,30), (3,37), (3,40) и соответственно (3,41), а постоянные C и $\nu(0)$

определяются из системы уравнений (3,43). Этим четвертая задача для остроугольного или прямоугольного треугольника решена полностью.

Если, например, для простоты технических расчетов положить $N(\sigma)\equiv 0$, а функцию $t(\sigma)$ считать постоянной на каждой из сторон треугольника A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1; $t(\sigma)=0$, $t(\sigma)=t_2$ и соответственно $t(\sigma)=t_3$, то функции $\varphi_0'(z)$, $\psi_0'(z)$, $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$, в силу формул их определяющих, будут тождественно равны нулю. Из системы же уравнений (3,43) получаем

$$C=\frac{2\mu}{k+1}\left(\frac{t_2}{a\sin\alpha_2}+\frac{t_3}{a\sin\alpha_1}\right),\quad \nu(0)=\frac{t_3}{\sin\alpha_1}$$

и, следовательно, формулы (3,44) и (3,45) для этого примера дают

$$u+iv=\left(\frac{t_2}{a\sin\alpha_2}+\frac{t_3}{a\sin\alpha_1}\right)iz-i\frac{t_3}{\sin\alpha_1},\quad N+iT=0.$$

Сделаем теперь качественные выводы о поведении напряжений в угловых точках при любых заданных функциях $t(\sigma)$ и $N(\sigma)$. При $\omega_i\neq 0$ $\Big(\omega_i$ — скачок функции $\frac{\omega}{2\pi}$ при переходе точки a_i в положительном направлении, взятый с обратным знаком$\Big)$ функция $\frac{\psi_0'(z)}{2e^{\Gamma(z)}}$ в окрестности точки a_i представима в виде равенства (3,23) и, так же как в предыдущем случае, функция $\psi_0'(z)$ будет непрерывной в замкнутом треугольнике $G+L$, за исключением, быть может, прямого угла при вершине A_1, если $\alpha_1=\frac{1}{2}$. Если $\alpha_1=\frac{1}{2}$, то из равенства (3,38) видно, что функция $\Gamma(z)$ непрерывна в окрестности точки a_1 и ее предельные значения $\Gamma^+(t)$ на некоторой дуге окружности $|\zeta|=1$, содержащей точку a_1 внутри, удовлетворяют условию Гельдера. Обращаясь теперь к равенству (3,37), видим, что функция $\psi_0'(z)$ будет непрерывной в замкнутом треугольнике $G+L$, если скачок функции $\delta\left[\frac{2}{k-1}2\mu\frac{dt(\sigma)}{d\sigma}-N(\sigma)\right]$ (δ — число, равное -1 на стороне A_3A_1 и равное $+1$ на стороне A_1A_2) при переходе через точку A_1 в положительном направлении равен нулю, то есть если точка A_1 является точкой выполнимости закона Гука для контурных условий $t(\sigma)$ и $N(\sigma)$. В противном же случае, то есть, если этот скачок Δ_1' удовлетворяет условию $\Delta_1'\neq 0$, то в окрестности точки A_1 функция $\psi_0'(z)$ может быть представлена в виде

$$\psi_0'(z)=2\left[\frac{\Delta_1'}{\Gamma^+(a_1)}\ln\frac{1}{\zeta-a_1}+F^*(\zeta)\right], \tag{3,46}$$

где $F^*(\zeta)$ — ограниченная функция, стремящаяся к определенному пределу, когда точка ζ стремится изнутри к точке a_1 по любому пути.

Следовательно, если угол при вершине a_1 прямой, то в этом угле, включая и его стороны вместе с точкой A_1 напряжения N и T, действующие на любое направление, будут непрерывными тогда и только тогда, когда скачок функции $\delta\left[\frac{2}{k-1}2\mu\frac{dt(\sigma)}{d\sigma}-N(\sigma)\right]$ при переходе через эту точку равен нулю. В противном же случае, то есть, если этот скачок отличен от нуля, эти напряжения обязательно растут, но однако для них в окрестности точки A_1 имеют место неравенства

$$|N|,\ |T| < M\ln\frac{1}{|z-A_1|},$$

где M — положительная постоянная.

Киевский государственный университет.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. М. Мусхелишвили, Некоторые задачи теории упругости, Ленинград (1933), стр. 216.

2. Н. И. Мусхелишвили, Об одной новой контурной задаче теории упругости, Доклады Академии наук СССР, т. 3, № 3 (1934).

3. Н. И. Мусхелишвили, Некоторые задачи теории упругости, Москва (1935), стр. 303—318, 234.

4. Д. И. Шерман, Об одной смешанной задаче теории упругости, Прикладная математика и механика, т. VII (1943).

5. И. И. Привалов, Введение в теорию функций комплексного переменного, Москва (1945), стр. 165—171.

6. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, Москва (1946), стр. 88, 254, 279—283.