№ 4 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ 1949
АКАДЕМИИ НАУК УССР

О задаче Коши в области функций действительных переменных

В. Э. Лянце

В настоящей работе рассматриваются некоторые обобщения известных результатов И. Г. Петровского (ср. [1]).

1°. Пусть дана система линейных диференциальных уравнений в частных производных вида

$$L_i(u) = \frac{\partial u_i}{\partial t} - \sum_{j=1}^{N} \sum_{(k_s)}^{K} A_{ij}^{(k_1, \ldots, k_n)}(t) \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} u_j}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \tag{1}$$

$$(i=1, \ldots, N).$$

Символ $\sum\limits_{(k_s)}^{K}$ означает суммирование по целым неотрицательным k_s, для которых $k_1 + \ldots + k_n \leqslant K$; предполагается, что все коэфициенты $A_{ij}^{(k_1, \ldots, k_n)}(t)$ непрерывны при $0 \leqslant t \leqslant T$*).

Ниже изучается задача Коши для системы (1) с начальными условиями

$$u_i\Big|_{t=t_0} = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i=1, \ldots, N), \tag{2}$$

где $0 \leqslant t_0 < T$; решение требуется определить в неограниченной полосе $t_0 \leqslant t < T$, $|x_1| < \infty, \ldots, |x_n| < \infty$.

Все рассматриваемые функции — комплексные функции действительных аргументов, диференцируемые определенное число раз.

2°. И. Г. Петровским в работе [1] было найдено так называемое условие A, при выполнении которого имеет место теорема существования и единственности для задачи Коши (1), (2). При этом предполагалось, что правые части f_i системы (1), начальные данные φ_i и функции $u_1, \ldots, u_N$, составляющие решение, ограничены вместе с их частными производными до некоторого определенного порядка при всех значениях $t, x_1, \ldots, x_n$. Кроме того, было обнаружено, что условие A необходимо и достаточно для того, чтобы решение $u_1, \ldots, u_N$ зависело непрерывно (и равномерно непрерывно относительно начального момента t_0) от данных $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$. Непрерывная зависимость измерялась посредством метрики равномерной сходимости в неограниченном пространстве (ср. [1]).

---

*) Наши результаты легко обобщаются на системы, в которых встречаются производные по t порядка $\geqslant 1$ вида, рассмотренного И. Г. Петровским [1].

В настоящей работе будет показано, что при выполнении условия А теорема существования имеет место для функций, которые вместе с их производными растут не быстрее, чем

$$e^{(\Sigma|x_k|)^r},$$

где число r $(0 < r < 1)$ зависит от коэфициентов системы (1). При этом предполагается, что порядок диференцируемости функций, возрастающих быстрее всякого полинома, неограниченно повышается по мере удаления от начала координат [ср. теорему (2)] *).

Класс функции $u_1, \ldots, u$, в котором доказана единственность решения задачи Коши (1), (2), в смысле порядка роста, характеризуется вполне аналогично. Однако, кроме того, для каждого u_i постулируется наличие обладающего определенными свойствами разложения в бесконечный ряд, так что автору не известно, содержатся ли все построенные им решения в этом классе [ср. теорему (3)].

Из полученных ниже оценок следует, что все найденные решения зависят непрерывно (и равномерно непрерывно относительно t_0) от правых частей f_i и данных φ_i в смысле определенным образом взвешенной метрики.

В конце работы приводится новое интегральное представление решения задачи Коши [ср. теорему (4)].

Применяемый метод основан на идее И. Г. Петровского, развитой им в [1].

Естественно-научная значимость рассматриваемого круга вопросов достаточно подробно освещена в цитированной работе акад. И. Г. Петровского. Нам остается лишь заметить, что введение взвешенной метрики соответствует тому, что даже весьма значительные изменения, происходящие в далеких участках физической среды (системы), оказывают лишь весьма незначительное влияние вблизи начала координат. Этим подтверждается, что условие А можно истолковать как ослабленное условие гиперболичности: на начальной гиперплоскости отсутствует резко очерченная область зависимости; однако по мере удаления от рассматриваемой точки влияние условий задачи неограниченно убывает.

I. Теорема существования

3°. С целью решения задачи Коши (1), (2) применим алгорифм интеграла Фурье. Сначала будем действовать совершенно формально. Именно, положим

$$u_i(t, \bar{x}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_i(t, \bar{a})\, e^{i\bar{a}\bar{x}}\, da_1 \ldots da_n. \tag{3}$$

$$[i=1, \ldots, N;\quad \bar{x}=(x_1, \ldots, x_n);\quad \bar{a}=(a_1, \ldots, a_n);\quad \bar{a}\bar{x}=a_1x_1 + \ldots + a_nx_n].$$

*) Для случая ограниченных функций требования диференцируемости здесь несколько ослаблены по сравнению с работой [1].

Подстановка интегралов (3) в систему (1) приводит к соотношениям

$$\frac{d\bar{u}_i}{dt}=\sum_{j=1}^{N}\sum_{(k_s)}^{K}A_{ij}^{(k_1,\ldots,k_n)}(t)\,(ia_1)^{k_1}\ldots(ia_n)^{k_n}\bar{u}_j+\bar{f}_i(t,\bar{a}),\qquad (i=1,\ldots,N),\tag{4}$$

где $\bar{f}_i(t,\bar{a})$ — преобразование Фурье $f_i(t,\bar{x})$; аналогично из (2) получим

$$\bar{u}_i\big|_{t=t_0}=\bar{\varphi}_i(\bar{a}),\qquad (i=1,\ldots,N),\tag{5}$$

где $\bar{\varphi}_i(\bar{a})$ — преобразование Фурье $\varphi_i(\bar{x})$.

Этим самым задача (1), (2) сведена к задаче (4), (5); последнюю решаем следующим образом:

Пусть $v_{il}(t,t_0,\bar{a})$, $(i,l=1,\ldots,N)$ фундаментальная система интегралов однородной системы уравнений, соответствующей системе (4)

$$v_{il}(t_0,t_0,\bar{a})=\begin{cases}0 & \text{при } i\neq l\\ 1 & \text{при } i=l.\end{cases}$$
$$(i,l=1,\ldots,N)$$

Для частного решения $v_i(t,t_0,\bar{a})$ системы (4), удовлетворяющего условиям $v_i(t_0,t_0,\bar{a})=0$, $(i=1,\ldots,N)$, имеем

$$v_i(t,t_0,\bar{a})=\int_{t_0}^{t}\sum_{l=1}^{N}v_{il}(t,\tau,\bar{a})\bar{f}_l(\tau,\bar{a})\,d\tau\qquad (i=1,\ldots,N),$$

а для решения задачи (4), (5)

$$\bar{u}_i(t,\bar{a})=\sum_{l=1}^{N}v_{il}(t,t_0,\bar{a})\bar{\varphi}_l(\bar{a})+\int_{t_0}^{t}\sum_{l=1}^{N}v_{il}(t,\tau,\bar{a})\bar{f}_l(\tau,\bar{a})\,d\tau$$
$$(i=1,\ldots,N).$$

Возвращаясь к соотношениям (3) и принимая во внимание, что

$$\bar{f}_l(t,\bar{a})=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}f_l(t,\bar{y})e^{-i\bar{a}\bar{y}}\,dy_1\ldots dy_n,$$

$$\bar{\varphi}_l(\bar{a})=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_l(\bar{y})e^{-i\bar{a}\bar{y}}\,dy_1\ldots dy_n,$$

$$[l=1,\ldots,N;\quad \bar{y}=(y_1,\ldots,y_n);\quad \bar{a}\bar{y}=a_1y_1+\ldots+a_ny_n],$$

формальное решение (1), (2) находим в следующем виде:

$$\begin{gathered}u_i(t,\bar{x})=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{\sum_{l=1}^{N}v_{il}(t,t_0,\bar{a})\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_l(\bar{y})e^{-i\bar{a}\bar{y}}\,dy_1\ldots dy_n+\\ +\int_{t_0}^{t}d\tau\sum_{l=1}^{N}v_{il}(t,\tau,\bar{a})\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}f_l(\tau,\bar{y})e^{-i\bar{a}\bar{y}}\,dy_1\ldots dy_n\Big\}e^{i\bar{a}\bar{x}}\,da_1\ldots da_n\end{gathered}\tag{6}$$
$$(i=1,\ldots,N).$$

Выражения (6) действительно представляют решение выше поставленной задачи Коши, если, во-первых, во всех случаях формулы обращения Фурье применены законно и, во-вторых, интегралы (6) и их формальные производные по $x_1, \dots, x_n$ порядка *) $\leqslant K$, а этим самым первые производные по t сходятся равномерно.

4°. Установим условия, обеспечивающие справедливость соотношений (6).

Ради сокращения записи символом $V(\bar{a})$ будем обозначать какую-либо из функций $v_{il}(t, t_0, \bar{a})$, а символом $F(\bar{x})$ какую-либо из $f_l(t, \bar{x})$ или $\varphi_l(\bar{x})$.

Прежде всего предположим, что для системы (1) выполнено условие А (Петровского). Это означает следующее: существует такая постоянная C и целое неотрицательное число p, что

$$|V(\bar{a})| < C(1 + |a_m|)^p.$$

$$[0 \leqslant t_0 \leqslant t < T; \quad |a_m| = \max(|a_1|, \dots, |a_n|)].$$

Далее, будем считать, что функция $F(\bar{x})$, H раз непрерывно диференцируемая в неограниченном пространстве, причем

$$\left| \frac{\partial^h F(\bar{x})}{\partial x_1^{h_1} \dots \partial x_n^{h_n}} \right| < C_1 e^{-\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}}$$
$$(h_1 + \dots + h_n = h = 0, 1, \dots, H). \tag{7}$$

Пусть $\tilde{F}(\bar{a})$ — преобразование Фурье функций $F(\bar{x})$. Неравенства (7) обеспечивают законность применения формул обращения Фурье к $F(\bar{x})$ и существование производных любого порядка $\tilde{F}(\bar{a})$.

Имеем

$$\left| \frac{\partial^\lambda \tilde{F}(\bar{a})}{\partial a_\gamma^\lambda} \right| \leqslant \varepsilon_1(\bar{a}) \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |F(\bar{y}) y_\gamma^\lambda| \, dy_1 \dots dy_n +$$
$$+ \frac{\varepsilon_2(\bar{a})}{|a_m|^h} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^h}{\partial y_m^h} [F(\bar{y}) y_\gamma^\lambda] \right| dy_1 \dots dy_n, \tag{8}$$
$$[h = 0, 1, \dots, H; \quad \lambda = 0, 1, \dots; \quad \gamma, m = 1, \dots, n],$$

где

$$\left. \begin{array}{c} \varepsilon_1(\bar{x}) = \begin{cases} 0 & \text{при } \max(|x_1|, \dots, |x_n|) > 1 \\ 1 & \text{при } \max(|x_1|, \dots, |x_n|) \leqslant 1 \end{cases} \\ \varepsilon_2(\bar{x}) = 1 - \varepsilon_1(\bar{x}). \end{array} \right\}. \tag{9}$$

Оценку (8) получим, интегрируя по частям

$$\frac{\partial^\lambda \tilde{F}(\bar{a})}{\partial a_\gamma^\lambda} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} F(\bar{y}) (-iy_\gamma)^\lambda e^{-i\bar{a}\bar{y}} dy_1 \dots dy_n,$$

---

*) K — порядок старшей производной в системе (1).

учитывая при этом, что в силу условий (7) обинтегрированные члены исчезают.

Рассмотрим интеграл

$$\frac{\partial^k I(\overline{x})}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} V(\overline{a})\,(ia_1)^{k_1} \dots (ia_n)^{k_n} e^{i\overline{a}\overline{x}} da_1 \dots da_n \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} F(\overline{y})\, e^{-i\overline{a}\overline{y}} dy_1 \dots dy_n. \tag{10}$$

В нашей сокращенной записи интеграл (10) соответствует k-ой формальной производной какого-либо из тех слагаемых, из которых состоят выражения (6); встречающееся в (6) интегрирование по параметру τ не будет в наших дальнейших выкладках играть существенной роли, ибо оно производится в конечных пределах.

Предположим, что число H, фигурирующее в формулировке условия (7), $\geqslant p+K+n+1$. Тогда из неравенств (8) и из условия А, а также из того, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_2(\overline{x})\, dx_1 \dots dx_n}{[\max(|x_1|, \dots, |x_n|)]^{n+1}} \tag{11}$$

сходится, следует равномерная сходимость интегралов (10) при $k=0, 1, \dots, K$. Это означает, что верна

Л е м м а 1. Если для системы (1) выполнено условие А, свободные члены f_l и начальные данные φ_l обладают непрерывными частными производными по $x_1, \dots, x_n$ до порядка $H \geqslant p+K+n+1$ включительно, причем для них выполняются неравенства (7), то существует решение $u_1, \dots, u_N$ задачи Коши (1), (2), выражающееся формулами (6)*).

5°. Приступим теперь к получению некоторых оценок для того решения Коши (1), (2), о котором речь идет в лемме 1.

Докажем предварительно, что

$$\left| \frac{\partial^\lambda V(\overline{a})}{\partial a_\gamma^\lambda} \right| < B^{\lambda+1} (\lambda+1)^{K\lambda} (1+|a_m|)^{p+(p+K-1)\lambda} \text{ **)} \tag{12}$$

[$\lambda=0, 1, \dots$; $\gamma=1, \dots, n$; $|a_m| = \max(|a_1|, \dots, |a_n|)$; $B>1$ постоянная, не зависящая от λ].

При $\lambda=0$ наше утверждение верно в силу условия А.

---

*) Очевидно, достаточно ограничиться предположением непрерывности функций $f_l(t, \overline{x})$ по t.

**) Настоящая оценка является уточнением одной леммы И. Г. Петровского (ср. [1]).

Проведем индукцию по λ. Заметим, что функции $v_{il}(t, t_0, \overline{a})$, $(V(\overline{a})$ — означает любую из них) удовлетвсряют однородной системе обыкновенных диференциальных уравнений вида

$$\frac{dv_{il}}{dt}=\sum_{j=1}^{N} P_{ij}(t, \overline{a})\, v_{jl} \qquad (i=1, \ldots, N), \tag{13}$$

где $P_{ij}(t, \bar{a})$ полиномы от $a_1, \ldots, a_n$ степени $\leqslant K$ (ср. параграф 4°). Продиференцировав уравнение (13), получим

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial^{\lambda+1} v_{il}}{\partial a_{\gamma}^{\lambda+1}}=\sum_{j=1}^{N} P_{ij}(t, \overline{a})\, \frac{\partial^{\lambda+1} v_{jl}}{\partial a_{\gamma}^{\lambda+1}}+R_{il}^{(\lambda+1)}(t, \overline{a}), \tag{13'}$$

где

$$R_{il}^{(\lambda+1)}(t, \overline{a})=\sum_{j=1}^{N} \sum_{s=1}^{K_1}\binom{\lambda+1}{s} \frac{\partial^{s} P_{ij}}{\partial a_{\gamma}^{s}}\, \frac{\partial^{\lambda+1-s} v_{jl}}{\partial a_{\gamma}^{\lambda+1-s}}$$

$[i, l=1, \ldots, N;\quad K_1=\lambda+1$ при $\lambda+1 \leqslant K_1$ и $K_1=K$ при $\lambda+1>K]$.

Из начальных условий, которым удовлетворяют функции $v_{il}(t, t_0, \overline{a})$ (ср. параграф 4°), следует $\left.\frac{\partial^{\lambda+1} v_{il}}{\partial a_{\gamma}^{\lambda+1}}\right|_{t=t_0}=0$ при всех значениях i, l, λ, γ. Поэтому

$$\frac{\partial^{\lambda+1} v_{il}}{\partial a_{\gamma}^{\lambda+1}}=\int_{t_0}^{t} \sum_{l'=1}^{N} v_{il'}(t, \tau, \overline{a})\, R_{l'l}^{(\lambda+1)}(\tau, \overline{a})\, d\tau\, ^{*)}.$$

Как не трудно видеть

$$\sum_{s=1}^{K_1}\binom{\lambda+1}{s}<B_1(\lambda+2)^{K}, \quad\left|\frac{\partial^{s} P_{ij}}{\partial a_{\gamma}^{s}}\right|<B_2(1+|a_m|)^{K-1}$$

[B_1, B_2 — постоянные, не зависящие от λ; $|a_m|=\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}(|a_i|)$; $s \geqslant 1$] и в силу предположения индукции, а также условия А

$$|R_{il}^{(\lambda+1)}(t, \overline{a})|<NB_1B_2B^{\lambda+1}(\lambda+1)^{K\lambda}(\lambda+2)^{K}(1+|a_m|)^{(p+K-1)\ \lambda+1)},$$

$$\left|\frac{\partial^{\lambda+1} v_{il}}{\partial a_{\gamma}^{\lambda+1}}\right|<TCN^2B_1B_2B^{\lambda+1}(\lambda+1)^{K\lambda}(\lambda+2)^{K}(1+|a_m|)^{p+(p+K-1)(\lambda+1)}.$$

Таким образом, достаточно положить $B=TCN^2B_1B_2$ и оценка (12) будет верной для $\lambda+1$.

Вернемся к интегралу (10). Символом $\tilde{F}_d(\overline{a})$ обозначим преобразование Фурье функции $F(\overline{x}+\overline{d})=F(x_1+d_1, \ldots, x_n+d_n)$, где $\overline{d}=(d_1, \ldots, d_n)$

---

*) $\frac{\partial^{\lambda+1} v_{il}}{\partial a_{\gamma}^{\lambda+1}}$, $(i=1, \ldots, N)$ рассматривается как частное решение системы диференциальных уравнений (13), тождественно исчезающее при $t=t_0$.

произвольная фиксированная точка. Во внутреннем интеграле (10) произведем замену переменных

$$y_1'=y_1-d_1, \ldots, y_n'=y_n-d_n.$$

Получим

$$\frac{\partial^k I(\bar{x})}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}=\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} V(\bar{a})\, i^k a_1^{k_1}\ldots a_n^{k_n}\, \tilde{F}_d(\bar{a})\, e^{i\bar{a}(\bar{x}-\bar{d})}\, da_1\ldots da_n \qquad (10')$$

$$[\bar{a}(\bar{x}-\bar{d})=a_1(x_1-d_1)+\ldots+a_n(x_n-d_n)].$$

Интеграл (10′) преобразуем интегрированием по частям следующим образом:

$$\frac{\partial^k I(\bar{x})}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}=(-1)^\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^\lambda}{\partial a_\gamma^\lambda}[V(\bar{a})\, i^k a_1^{k_1}\ldots a_n^{k_n}\, \tilde{F}_d(\bar{a})]\frac{e^{i\bar{a}(\bar{x}-\bar{d})}}{i^\lambda(x_\gamma-d_\gamma)^\lambda}\, da_1\ldots da_n+\sigma,$$

где σ — обинтегрированные члены.

Согласно оценкам (8) и (12) производная, стоящая под знаком последнего интеграла, с точностью до постоянного множителя, мажорируется функцией

$$(1+|a_m|)^{p+(p+K-1)\lambda+K-H}.$$

Из того, что интеграл (11) сходится, следует, что для законности проделанного нами интегрирования по частям достаточно, чтобы $p+(p+K-1)\lambda+K-H$ было $\leqslant -(n+1)$. Нетрудно, однако, видеть, что если последнее соотношение выполнено, то обинтегрированные члены σ исчезают. Поэтому, если число, выступающее в формулировке условия (7), равно H_λ

$$H=H_\lambda=(p+K-1)(\lambda+1)+n+2, \qquad (14)$$

то для интеграла (10′) верна оценка

$$\left|\frac{\partial^k I(\bar{x})}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\right|<\varepsilon_1(\bar{x}-\bar{d})\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}|V(\bar{a})\, a_1^{k_1}\ldots a_n^{k_n}\,\tilde{F}_d(\bar{a})|\, da_1\ldots da_n+$$

$$+\frac{\varepsilon_2(\bar{x}-\bar{d})}{|x_\gamma-d_\gamma|^\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial^\lambda}{\partial a_\gamma^\lambda}[V(\bar{a})\, a_1^{k_1}\ldots a_n^{k_n}\,\tilde{F}_d(\bar{a})]\right| da_1\ldots da_n\text{*)}.$$

Положим

$$\mathfrak{M}=\max\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial^h}{\partial y_m^h}[F(\bar{y}+\bar{a})\, y_\gamma^s]\right| dy_1\ldots dy_n \qquad (15)$$

[максимум распространяется на значения индексов $\gamma, m=1, \ldots, n$; $h=0$; $h=H_\lambda$; $s=0, 1, \ldots, \lambda$]. После простых, но несколько громоздких вычис-

---

*) Ср. (9).

лений, принимая во внимание (8) и (12), вм сто последней оценки, получим

$$\left|\frac{\partial^k I(\bar{x})}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\right| < \mathfrak{M} A_1^{\lambda+1}(\lambda+1)^{K\lambda}\left\{\varepsilon_1(\bar{x}-\bar{d})+\frac{\varepsilon_2(\bar{x}-\bar{d})}{|x_\gamma-d_\gamma|^\lambda}\right\},$$

или ввиду того, что $\varepsilon_1(\bar{x})+\dfrac{\varepsilon_2(\bar{x})}{|x_\gamma|^\lambda}<\dfrac{2^\lambda}{(1+|x_\gamma|)^\lambda}$

$$\left|\frac{\partial^k I(\bar{x})}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\right| < \frac{\mathfrak{M} A^{\lambda+1}(\lambda+1)^{K\lambda}}{(1+|x_\gamma-d_\gamma|)^\lambda} \tag{16}$$

$[k=0, 1, \ldots, K;\ \gamma=1, \ldots, n;\ A$ — постоянная, не зависящая от $\lambda]$.

Это означает, что верна

Лемма 2. В условиях леммы 1, при $H=H_\lambda$ [ср. (14)], решение $u_1, \ldots, u_N$ задачи Коши (1), (2), выражающееся формулами (6), удовлетворяет условию

$$\left|\frac{\partial^k u_i}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\right| < \frac{\mathfrak{M} A^{\lambda+1}(\lambda+1)^{K\lambda}}{(1+|x_\gamma-d_\gamma|)^\lambda}, \tag{16'}$$

$$(i=1, \ldots, N;\ k\leqslant K).$$

6°. Освободимся теперь от того, что функция $F(\bar{x})$ и ее производные обращаются в нуль на бесконечность. Начнем с некоторых нужных для дальнейшего построений *).

Пусть $\varrho_\lambda(z)$ — функция действительного переменного $z\geqslant 0$

$$\varrho_\lambda(z)=\begin{cases}1 & \text{при } 0\leqslant z<\sqrt{n}\\ \dfrac{\delta_\lambda(z)}{\delta_\lambda(\sqrt{n})} & \text{при } \sqrt{n}\leqslant z<2\sqrt{n}\\ 0 & \text{при } 2\sqrt{n}\leqslant z<\infty,\end{cases}$$

где

$$\delta_\lambda(z)=\int\limits_z^{2\sqrt{n}}(\tau-\sqrt{n})^{H_\lambda}(2\sqrt{n}-\tau)^{H_\lambda}\,d\tau.$$

Построим „n-мерную поверхность вращения"

$$\Phi_\lambda(\bar{x})=\varrho_\lambda(\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}).$$

Функция $\Phi_\lambda(x)$ обладает следующими свойствами:

1. $0\leqslant\Phi_\lambda\leqslant 1$ при любых значениях $x_1, \ldots, x_n$.

2. $\Phi_\lambda=1$ внутри сферы $x_1^2+\ldots+x_n^2=n$; в частности $\Phi_\lambda=1$ при $|x_1|\leqslant\sqrt{n}, \ldots, |x_n|\leqslant\sqrt{n}$.

3. $\Phi_\lambda=0$ вне сферы $x_1^2+\ldots+x_n^2=4n$; в частности $\Phi_\lambda=0$ при $|x_1|>2\sqrt{n}, \ldots, |x_n|>2\sqrt{n}$.

*) Идея этих построений заимствована из работы И. Г. Петровского [1].

4. $\Phi_\lambda(\bar{x})$ имеет непрерывные в неограниченном пространстве производные по всевозможным комбинациям из $x_1, \ldots, x_n$ до порядка H_λ включительно.

5. $\left|\dfrac{\partial^h \Phi_\lambda(\bar{x})}{\partial x_\gamma^h}\right| < E^{H_\lambda} h!$ $\left[\begin{matrix} h=0, 1, \ldots, H_\lambda; \quad \gamma=1, \ldots, n; \\ \text{постоянная } E \text{ не зависит от } \lambda \end{matrix}\right]$.

Свойства 1—4 усматриваются непосредственно из определения функции $\varrho_\lambda(z)$. Докажем свойство 5. Нам достаточно ограничиться рассмотрением области G, заключенной между парой концентрических сфер, с центром в начале координат и радиусами соответственно $\sqrt{n}$ и $2\sqrt{n}$, ибо вне этой области все производные тождественно исчезают. В G

$$\Phi_\lambda(\bar{x}) = \frac{1}{\delta_\lambda(\sqrt{n})} \int\limits_{\sqrt{x_\gamma^2+\xi^2}}^{2\sqrt{n}} (\tau-\sqrt{n})^{H_\lambda} (2\sqrt{n}-\tau)^{H_\lambda}\, d\tau \tag{17}$$

$$[\xi^2 = x_1^2 + \ldots + x_{\gamma-1}^2 + x_{\gamma+1}^2 + \ldots + x_n^2]$$

интеграл (17) будем рассматривать как функцию комплексного переменного x_γ, зависящую от вещ ственного параметра ξ, $(0 \leqslant \xi \leqslant 2\sqrt{n})$. С этой точки зрения (17) есть аналитическая функция x_γ с двумя алгебраическими особенностями $i\xi$ и $-i\xi$, расположенными на мнимой оси. Расстояние особых точек $i\xi$, $-i\xi$ от точек x_γ, лежащих на отрезках вещественной оси

$$\max(0, n-\xi^2) \leqslant x_\gamma^2 \leqslant 4n - \xi^2 \tag{18}$$

не меньше $\sqrt{n}$. Поэтому в каждой из этих точек интеграл (17) допускает разложение в строку Тейлора с радиусом сходимости $\geqslant \sqrt{n}$. Пусть D_ξ область комплексной плоскости, состоящая из всех тех точек, расстояние которых от отрезков (18) $\leqslant \frac{1}{2}\sqrt{n}$. Символом $E_{\lambda\xi}$ обозначим максимум модуля интеграла (17) и в области D_ξ. Согласно известным неравенствам Коши $h+1$-ый коэфициент в разложении Тейлора не превосходит по модулю $\dfrac{E_{\lambda\xi}}{\left(\frac{1}{2}\sqrt{n}\right)^h} = \dfrac{2^h E_{\lambda\xi}}{(\sqrt{n})^h}$. Поэтому

$$\left|\frac{\partial^h \Phi_\lambda(\bar{x})}{\partial x_\gamma^h}\right| < \left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^h E_{\lambda\xi} h!$$

Остается проверить, что $E_{\lambda\xi}^{\frac{1}{H_\lambda}}$ равномерно, относительно ξ и λ, ограничено. Имеем

$$\delta_\lambda(\sqrt{x_\gamma^2+\xi^2}) = \sum_{\mu, \nu=0}^{H_\lambda} (-1)^{\mu+\nu} \binom{H_\lambda}{\mu} \binom{H_\lambda}{\nu} (\sqrt{n})^{H_\lambda-\mu} (2\sqrt{n})^{H_\lambda-\nu} \frac{\tau^{\mu+\nu-1}}{\mu+\nu+1} \Bigg|_{\tau=\sqrt{x_\gamma^2+\xi^2}}^{\tau=2\sqrt{n}}.$$

Принимая во внимание, что в области D_ξ

$$|x_\gamma| < 3\sqrt{n}, \quad \sqrt{x_\gamma^2+\xi^2} < 5\sqrt{n}$$

находим, что в этой области

$$\delta_\lambda(\sqrt{x_\gamma^2+\xi^2}) < E_1^{H_\lambda}$$

[E_1 — не зависит от λ].

С другой стороны, интегрируя по частям, легко проверить, что

$$\frac{1}{(\delta_\lambda\sqrt{n})} = \frac{(2H_\lambda+1)!}{(H_\lambda!)^2}\frac{1}{(\sqrt{n})^{2H_\lambda+1}} < E_2^{H_\lambda}.$$

[E_2 — не зависит от λ].

Отсюда следует

$$E_{\lambda\xi} < (E_1\cdot E_2)^{H_\lambda},$$

что и требовалось доказать.

7°. Рассмотрим покрытие пространства $x_1, \ldots, x_n$ n-мерными кубами с ребром длины 2, осуществляемое сеткой всевозможных координатных гиперплоскостей

$$x_\gamma = 2s+1, \ [\gamma=1, \ldots, n; \ s=0, \pm 1, \pm 2, \ldots].$$

Занумеруем эти кубы в таком порядке, что если $\bar{d}^{(\nu)} = (d_1^{(\nu)}, \ldots, d_n^{(\nu)})$ есть центр ν-ого куба $Q_1^{(\nu)}$, а $|d_M^{(\nu)}| = \max(|d_1^{(\nu)}|, \ldots, |d_n^{(\nu)}|)$, то из $\nu' > \nu$ следует $|d_M^{(\nu')}| \geqslant |d_M^{(\nu)}|$.

Наряду с системой $\{Q_1^{(\nu)}\}$ рассмотрим систему кубов $\{Q_2^{(\nu)}\}$

$$Q_2^{(\nu)}: \ |x_1 - d_1^{(\nu)}| \leqslant 2\sqrt{n}, \ldots, |x_n - d_n^{(\nu)}| \leqslant 2\sqrt{n}.$$

Зададимся далее некоторой функцией $\lambda(\bar{x}) = \lambda(x)$, где $x = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$, ограниченной в каждой конечной области и принимающей лишь целые неотрицательные значения. Пусть $\bar{\lambda}_\nu$ означает максимум функции $\lambda(\bar{x})$ в кубе $Q_2^{(\nu)}$.

Образуем бесконечное произведение

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-\Phi_{\bar{\lambda}_\nu}^{(\nu)}(\bar{x})) \tag{19}$$

$$[\Phi_{\bar{\lambda}_\nu}^{(\nu)}(\bar{x}) = \Phi_{\bar{\lambda}_\nu}(\bar{x}-\bar{d}^{(\nu)}); \quad \bar{x}-\bar{d}^{(\nu)} = (x_1-d_1^{(\nu)}, \ldots, x_n-d_n^{(\nu)})].$$

Из свойства 2 функции $\Phi_\lambda(\bar{x})$ (ср. параграф 6°) следует, что в каждой точке пространства по крайней мере одна из функций $\Phi_{\bar{\lambda}_\nu}^{(\nu)}(\bar{x})$ равна единице, так что произведение (19) повсюду расходится к нулю. Поэтому последовательность функции

$$\sigma_j(\bar{x}) = F(\bar{x})\left[1-\prod_{\nu=1}^{j}(1-\Phi_{\bar{\lambda}_\nu}^{(\nu)}(\bar{x}))\right]$$

всюду сходится к $F(\bar{x})$. Положим

$$F^{(1)}(\bar{x}) = \sigma_1(\bar{x}); \quad F^{(j)}(\bar{x}) = \sigma_j(\bar{x}) - \sigma_{j-1}(\bar{x}). \qquad (j>1)$$

Очевидно

$$F^{(1)}(\bar{x}) = F(\bar{x})\,\Phi^{(1)}_{\lambda_1}(\bar{x}); \quad F^{(j)}(\bar{x}) = F(\bar{x})\,\Phi^{(j)}_{\lambda}(\bar{x}) \prod_{\nu=1}^{j-1} (1-\Phi^{(\nu)}_{\lambda_\nu}(\bar{x})) \qquad (20)$$

$$F(\bar{x}) = \sum_{=1}^{\infty} F^{(j)}(\bar{x}).$$

Из свойства 3 функции $\Phi_\lambda(\bar{x})$ следует, что функция $F^{(j)}(\bar{x})$ равна нулю вне куба $Q_2^{(j)}$. Если, кроме того, предположить, что функция $F(\bar{x})$ в некоторой окрестности каждой точки $\bar{x}$ обладает непрерывными производными до порядка $H_{\lambda(\bar{x})} = (\,.+K-1)\ \ (\lambda(\bar{x})+1)+n+2$ включительно*) (это предположение сохраняется в дальнейшем), то в кубе $Q_2^{(j)}$ функция $F^{(j)}(\bar{x})$ будет иметь непрерывные производные до порядка H_{λ_j} включительно, где $\lambda_j = \min\limits_{\bar{x}\in Q_2^{(j)}} \lambda(\bar{x})$ (ср. свойство 4 функции $\Phi_\lambda(\bar{x})$). Поэтому $F^{(j)}(\bar{x})$ удовлетворяет условию (7) при $H=H_{\lambda_j}$ и к ней применима оценка (16).

В очевидных обозначениях [ср. (10) и (16)], имеем

$$\left|\frac{\partial^k I^{(j)}(\bar{x})}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}}\right| < \frac{\mathfrak{M}^{(j)} A^{\lambda_j+1}(\lambda_j+1)^{K\lambda_j}}{(1+|x_\gamma - d_\gamma^{(j)}|)^{\lambda_j}}, \qquad (16^{(j)})$$

причем [ср. (15)]

$$\mathfrak{M}^{(j)} = \max_{(\gamma,m,h,s)} \int_{-2\sqrt{n}}^{2\sqrt{n}} \dots \int_{-2\sqrt{n}}^{2\sqrt{n}} \left| \frac{\partial^h}{\partial y_m^h} [F^{(j)}(\bar{y}+\bar{d}^{(j)})\,y_\gamma^s] \right| dy_1 \dots dy_n. \qquad (15^{(j)})$$

Пусть C_j есть максимум $F(\bar{x})$ и всех ее производных порядка $\leqslant H_{\lambda_j}$ в кубе $Q_2^{(j)}$. Из $(15^{(j)})$, принимая во внимание свойство 5 функции $\Phi_\lambda(\bar{x})$, получим

$$\mathfrak{M}^{(j)} < \mathfrak{N}_1^{H_{\lambda_j}} H_{\lambda_j}!\ C_j,$$

где постоянная $\mathfrak{N}_1$ не зависит от j. Согласно формуле Стирлинга $H_{\lambda_j}! = [0(1)]^{\lambda_j} \lambda_j^{\,p+K-1)\lambda_j}$. Поэтому вместо $(16^{(j)})$ имеем

$$\left|\frac{\partial^k I^{(j)}(\bar{x})}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}}\right| < \frac{\mathfrak{N}^{\lambda_j+1}(\lambda_j+1)^{(p+2K-1)\lambda_j} C_j}{(1+|x_\gamma - d_\gamma^{(j)}|)^{\lambda_j}} \qquad (21)$$

[$\gamma=1,\dots,n$; $j=1,2,\dots$; $k=0,1,\dots,K$; $\mathfrak{N}$ — константа, не зависящая от j].

8°. Смысл предыдущих построений, очевидно, следующий: первоначально заданные свободные члены $f_\lambda(t,\bar{x})$ и начальные данные $\varphi_l(\bar{x})$ разлагаются в бесконечные ряды

$$f_l(t,\bar{x}) = \sum_{=1}^{\infty} f_l^{(j)}(t,\bar{x}); \quad \varphi_l(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_l^{(j)}(\bar{x})$$

$$(l=1,\dots,N)$$

---

*) Ср. (14).

по схеме (20). Затем решается задача Коши

$$L_i(u) = f_i^{(j)}(t, \overline{x}) \tag{$1^{(j)}$}$$

$$u_i\big|_{t=t_0} = \varphi_i^{(j)}(\overline{x}) \qquad (j=1, 2, \ldots) \tag{$2^{(j)}$}$$

и к решению $u_1^{(j)}, \ldots, u_N^{(j)}$, полученному по формулам (6), применяется лемма 2. Поскольку каждая из функций $u_1^{(j)}, \ldots, u_N^{(j)}$ есть сумма конечного числа слагаемых таких, как интеграл $I^{(j)}(\overline{x})$, то к каждой из них применима оценка типа (21).

Предположим, что в силу (21) бесконечные ряды

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial^k I^{(j)}(\overline{x})}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \qquad (k=0, 1, \ldots, K) \tag{22}$$

сходятся равномерно в каждой конечной области. Тогда это же самое имеет место для рядов

$$\frac{\partial^k u_i}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial^k u_i^{(j)}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$$
$$(i=1, \ldots, N; \quad k=0, 1, \ldots, K)$$

и на основании известной теоремы анализа о почленном диференцировании можно утверждать, что существует решение задачи Коши (1), (2).

Теорему существования сформулируем в отдельности для случая, когда можно ограничиться требованием диференцируемости конечного порядка, и отдельно для случая, когда применяемый метод требует, чтобы порядок диференцируемости данных функций неограниченно возрастал по мере удаления от начала координат.

9°. Теорема 1. Если для системы (1) выполнено условие А, свободные члены f_l и начальные данные φ_l обладают непрерывными частными производными по $x_1, \ldots, x_n$ до порядка $H^{(q)}$ включительно,

$$H^{(q)} = (p+K)(n+2) + q(p+K-1)\ ^{*)},$$

причем

$$\left| \frac{\partial^h f_l}{\partial x_1^{h_1} \ldots \partial x_n^{h_n}} \right|, \quad \left| \frac{\partial^h \varphi_l}{\partial x_1^{h_1} \ldots \partial x_n^{h_n}} \right| < \|F\| (1+x)^q \tag{23}$$

[$h=0, 1, \ldots, H^{(q)}$; $l=1, \ldots, N$; постоянная $\|F\|$ не зависит от l и h; $x = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$], то существует такое решение $u_1, \ldots, u_N$ задачи Коши (1), (2), что

$$\left| \frac{\partial^k u_l}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right| < \|F\| D^{q+1} (q+1)^{\theta q} (1+x)^q \tag{24}$$

[$k=0, 1, \ldots, K$; $i=1, \ldots, N$; $\theta = p+2K-1$; константа D не зависит от q, f_l, φ_l].

---

*) В частности $H^{(0)} = (p+K)(n+2)$; в работе [1] $H^{(0} = (p+K)(2n+1)$.

Доказательство. Функцию $\lambda(\bar{x})$, фигурирующую в построениях параграфа 7°, положим равной $q+n+1$. Этим самым $\lambda_j=\bar{\lambda}_j=q+n+1$, $H_{\lambda_j}=(p+K-1)\ (q+n+2)+n+2=H^{(q)}$ [ср. (14)]. В силу (23) C_j зависит от j лишь посредством $|d_M^{(j)}|=\max(|d_1^{(j)}|, \ldots, |d_n^{(j)}|)$. Возможные значения $d_M^{(j)}$ суть $2s=0, \pm 2, \pm 4, \ldots$; соответствующие значения C_j обозначим $C^{(2s)}$. Согласно условию (23)

$$C^{(2s)}<\|F\|(1+2|s|+2\sqrt{n})^q=\|F\|\sum_{\tau=0}^{q}\binom{q}{\tau}(1+2|s|)^{q-\tau}(2\sqrt{n})^\tau<$$

$$<\|F\|(4\sqrt{n})^q(1+2|s|)^q.$$

Поэтому

$$\sigma=\sum_{=1}^{\infty}\frac{\mathfrak{N}^{\lambda_j}(\lambda_j+1)^{(p+2K-1)}C_j}{(1+|x_\gamma-d_\gamma^{(j)}|)^{\lambda_j}}<$$

$$<\|F\|D_1^{q+1}(q+1)^{\theta q}\sum_{(s=-\infty}^{\infty}\frac{(1+2|s|)^q}{(1+|x_M-2s|)^{q+n+1}},$$

причем в сумме справа каждое слагаемое повторяется (с надлежащим изменением индекса M) столько раз, сколько раз $d_M^{(j)}$ принимает соответствующее ему значение $2s$.

Далее

$$\sigma<\|F\|D_1^{q+1}(q+1)^{\theta q}\sum_{(s_1)=-\infty}^{\infty}\frac{(1+2|s_1|+x_M)^q}{(1+2|s_1|)^{q+n+1}}<$$

$$<\|F\|D_1^{q+1}(q+1)^{\theta q}(2x)^q\sum_{(s_1)=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+2|s_1|)^{n+1}},$$

где $x=\max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$. Последний ряд сходится [ср. (11)]. Отсюда в силу (21) вытекает сходимость ряда (22), равномерная в каждой конечной области, а также оценка (24). Таким образом, теорема (1) полностью доказана.

10°. Теорема 2. Пусть для системы (1) выполнено условие А. Пусть r — вещественное число, $0<r<\frac{1}{\theta}$, где $\theta=p+2K-1$. Если в некоторой окрестности каждой точки $x_1, \ldots, x_n$ функции f_i, φ_l обладают непрерывными частными производными по $x_1, \ldots, x_n$ до порядка $H(x)$ включительно,

$$H(x)=(p+K-1)\ ([(1+x)^r]+1)+n+2^{*}),$$

где $x=\max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$, причем все производные, существование которых в данной точке предполагается, не превосходят по модулю

$$\|F\|e^{(1+x)^r},\quad (\|F\|-\text{константа}) \qquad (23')$$

*) $[(1+x)^r]$ означает здесь целую часть числа $(1+x)^r$.

то существует такое решение $u_1, \dots, u_N$ задачи Коши (1), (2), что

$$\left|\frac{\partial^k u_l}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}}\right| < \|F\| D^{(1+x)^{1+r}} \text{ *)} \tag{24'}$$

$[l=1, \dots, N;\ k=0, 1, \dots, K;\ D$ — константа, зависящая лишь от r и коэфициентов системы (1)].

Доказательство. Функцию $\lambda(x)$, фигурирующую в построениях параграфа 7°, положим равной целой части числа $(1+x)^r$. Этим самым [ср. (14)]

$$H_{\lambda(x)} = (p+K-1)(\lambda(x)+1)+n+2 = H(x).$$

Если $\lambda^{(2s)}$, $\overline{\lambda}^{(2s)}$, $C^{(2s)}$ суть значения λ_j, $\overline{\lambda}_j$, C_j, соответствующие $d_M^{(j)}=2s$, то очевидно

$$\lambda^{(2s)} = [(1+2|s|-2\sqrt{n})^r], \quad (s>\sqrt{n}),$$
$$\overline{\lambda}^{(2s)} = [(1+2|s|+2\sqrt{n})^r], \quad C^{(2s)} \leqslant \|F\| e^{(1+2|s|+2\sqrt{n})^r}$$

Поэтому

$$\sigma = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{N}^{\lambda_j+1}(\lambda_j+1)^{(p+2K-1)\lambda_j} C_j}{(1+|x_\gamma-d_\gamma^{(j)}|)^{\lambda_j}} = \sum_{(s)=-\infty}^{\infty} \frac{\mathfrak{N}^{\lambda^{(2s)}+1}(\lambda^{(2s)}+1)^{\theta\lambda^{(2s)}} C^{(2s)}}{(1+|x_M-2s|)^{\lambda^{(2s)}}} \leqslant$$
$$\leqslant \|F\| \sum_{(s)=-\infty}^{\infty} \exp\{0(1)(1+2|s|)^r + \theta r(1+2|s|)^r \ln(1+2|s|) -$$
$$-(1+2|s|)^r \ln(1+|x_M-2s|)\},$$

причем в сумме $\sum\limits_{(s)=-\infty}^{\infty}$ каждое слагаемое повторяется (с надлежащим изменением индекса M) столько раз, сколько раз $d_M^{(j)}$ принимает соответствующее значение $2s$.

Принимая во внимание, что

$$\ln(1+|x_M-2s|) - \ln(1+2|s|) \leqslant \frac{2|x_M|}{1+|2s-\vartheta x_M|},$$
$$(0<\vartheta<1)$$

и

$$\frac{(1+2|s|)^r}{1+|2s-\vartheta x_M|} < 0(1)x^r,$$

находим

$$\sigma < \|F\| D_1^{(1+x)^{r+1}} \sum_{(s)=-\infty} \exp\{0(1)(1+2|s|)^r +$$
$$+(\theta r-1)(1+2|s|)^r \ln(1+2|s|)\}.$$

*) Вероятно, оценка (24) может быть улучшена следующим образом

$$\left|\frac{\partial^k u_l}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}}\right| < \|F\| D^{(1+x)^r \ln(2+x)}.$$

Ввиду того, что $\theta r - 1 < 0$ по условию, последний ряд **сходится.** Таким образом, теорема 2 полностью доказана.

11°. Из теоремы 1 нетрудно вывести следующее

Следствие 1. Пусть для системы (1) выполнено условие А. Пусть для свободных членов $f_l(t, \bar{x})$ и начальных данных $\varphi_l(\bar{x})$ существует разложение в ряд

$$f_l(t, \bar{x}) = \sum_{q=0}^{\infty} f_l^{(q)}(t, \bar{x}); \quad \varphi_l(\bar{x}) = \sum_{q=0}^{\infty} \varphi_l^{(q)}(\bar{x})$$

$$(l = 1, \ldots, N),$$

где функции $f_l^{(q)}$ и $\varphi_l^{(q)}$ обладают непрерывными частными производными по $x_1, \ldots, x_n$ до порядка $H_q = (p+K)(n+2) + q(p+K-1)$ включительно, причем

$$\left.\begin{aligned} &\left|\frac{\partial^h f_l^{(q)}}{\partial x_1^{h_1} \ldots \partial x_n^{h_n}}\right|, \quad \left|\frac{\partial^h \varphi_l^{(q)}}{\partial x_1^{h_1} \ldots \partial x_n^{h_n}}\right| \leqslant \|F_q\|(1+x)^q \\ &[q=0, 1, \ldots; \quad h=0, 1, \ldots, H_q; \quad x = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)] \\ &\lim_{q\to\infty} q^{p+2K-1} \sqrt[q]{\|F_q\|} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (23'')$$

Тогда существует такое решение $u_1, \ldots, u_N$ задачи Коши (1), (2), что

$$\left.\begin{aligned} &u_l(t, \bar{x}) = \sum_{q=0}^{\infty} u_l^{(q)}(t, \bar{x}) \\ &\qquad (i = 1, \ldots, N) \\ &\left|\frac{\partial^k u_i^{(q)}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}\right| \leqslant \|U_q\|(1+x)^q \\ &\|U_q\| \leqslant D_q^{q\,(p+2K-1)\,q} \|F_q\| \end{aligned}\right| \qquad (24'')$$

$[q=0, 1, \ldots;\ k=0, 1, \ldots, K;\ D$ — константа, не зависящая от $q]$.

В самом деле, если решить задачи Коши

$$L_i(u) = f_i^{(q)}(t, \bar{x}), \qquad (1^{(q)})$$

$$u_i\big|_{t=t_0} = \varphi_i^{(q)}(\bar{x}), \qquad (2^{(q)})$$

$$(i = 1, \ldots, N; \quad q = 0, 1, \ldots),$$

а затем составить ряды

$$\sum_{q=0}^{\infty} \frac{\partial^k u_i^{(q)}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$$

$$(i = 1, \ldots, N; \quad k = 0, 1, \ldots, K),$$

то для этих рядов, в силу (24″) будет существовать мажоранта

$$\sum_{q=0}^{\infty} (Dq)^{\theta q} \|F_q\|(1+x)^q,$$

которая согласно предположению (23″) является целой функцией от $1+x$.

Замечание. Оценки (24), (24′), (24″) показывают, в каком смысле найденные решения зависят непрерывно от начальных данных и свободных членов.

II. Теорема единственности

12°. Чтобы доказать единственность решения задачи Коши (1), (2), достаточно убедиться, что не может существовать решения однородной системы.

$$L_i(u)=0 \qquad (i=1, \ldots, N) \tag{25}$$

с нулевыми начальными условиями

$$u_i\big|_{t=t_0}=0 \qquad (i=1, \ldots, N), \tag{26}$$

для которого не все функции $u_1 \ldots, u_N$ тождественно исчезают.

Имеет место с едующая

Теорема 3. Пусть каждая из функций $u_1, \ldots, u_N$ представима в виде ряда

$$u_i=\sum_{q=0}^{\infty} u_i^{(q)}, \qquad (i=1, \ldots, N\ ,$$

где $u_i^{(q)}=u_i^{(q)}(t, \overline{x})=u_i^{(q)}(t, x_1, \ldots, x_n)$ обладает непрерывными частными производными по $x_1, \ldots, x_n$ до порядка $K-1$ включительно, причем

$$\left|\frac{\partial^k u_i^{(q)}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}\right|<D_q(1+x)^q \tag{27}$$

$$[k=0, 1, \ldots, K-1; \quad i=1, \ldots, N; \quad q=0, 1, \ldots; \quad x=\max(|x_1|, \ldots, |x_n|)]$$

$$\lim_{q\to\infty} q^{\theta_1} D_q^{\frac{1}{q}}=0 \tag{28}$$

$$(\theta_1=p+2K+1).$$

Кроме того, пусть u_i $(i=1, \ldots, N)$ обладает интегрируемыми в каждой конечной области частными производными по $x_1, \ldots, x_n$ порядка K. Тогда, если для системы (1) выполнено условие А, то из соотношений (25), (26) следует

$$u_i(t, \overline{x}) \equiv 0 \qquad [i=1, \ldots, N;\ t_0 \leqslant t<T]. \tag{29}$$

Доказательство. Наряду с системой (25) введем в рассмотрение сопряженную ей систему

$$M_i(z)=\frac{\partial z_i}{\partial(-t)}-\sum_{i=1}^{N}\sum_{(k_s)}^{K} A_{ji}^{(k_1, \ldots, k_n)}(t)\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n} z_j}{\partial(-x_1)^{k_1} \ldots \partial(-x_n)^{k_n}}=0 \tag{25′}$$

$$(i=1, \ldots, N)$$

и для диференциальных операторов $L_i(u)$, $M_i(z)$ составим формулу Грина

$$\int_{R_\omega(t_0, t_1)} \cdots \int \sum_{i=1}^{N}\{z_i L_i(u)-u_i M_i(z)\}\, dt\, dx_1 \ldots dx_n=Q_\omega, \tag{30}$$

где $R_\omega(t_0, t_1)$ цилиндр

$$R_\omega(t_0, t_1):\ t_0 \leqslant t \leqslant t_1,\ |x_1| < \omega, \ldots, |x_n| < \omega,$$

а Q_ω равно сумме интегралов, распространенных по нижнему и верхнему основанию цилиндра $R_\omega(t_0, t_1)$, то есть интегралов вида

$$\int\limits_{-\omega}^{\omega} \ldots \int\limits_{-\omega}^{\omega} z_i u \, dx_1 \ldots dx_n \Big|_{t=t_0}^{t=t_1} \tag{31}$$

и интегралов по его боковым граням

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{-\omega}^{\omega} \ldots \int\limits_{-\omega}^{\omega} \frac{\partial^\mu z_i}{\partial(-x_1)^{\mu_1} \ldots \partial(-x_n)^{\mu_n}} A_{ji}^{(k_1, \ldots, k_n)}(t) \times$$
$$\times \frac{\partial^\nu u_j}{\partial x_1^{\nu_1} \ldots \partial x_n^{\nu_n}} dt\, dx_1 \ldots dx_{s-1}\, dx_{s+1} \ldots dx_n \Big|_{x_s=-\omega}^{x_s=+\omega}, \tag{32}$$

где $\mu_\varrho + \nu_\varrho = k_\varrho$ при $\varrho \neq s$ и $\mu_s + \nu_s = k_s - 1$ *).

И. Г. Петровским, в работе [1], было доказано, что если для системы (25) условие A выполняется в интервале $(0, T)$, то оно выполняется также для системы (25′) в интервале $(T, 0)$. Поэтому, если к системе (25) присоединить начальные условия

$$z_\nu\big|_{t=t_1} = \begin{cases} 0 & \text{при } \nu \neq i \\ e^{-(\bar{x}^2 + i\bar{a}\bar{x})} & \text{при } \nu = i \end{cases} \tag{26′}$$

$[\bar{x}^2 + i\bar{a}\bar{x} = x_1^2 + \ldots + x_n^2 + \sqrt{-1}\,(a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n);$ $\bar{a}$ — призводная точка] то в соответствии с леммой 1, существует**) решение $z_1, \ldots, z_N$ задачи Коши (25), (26′), причем ввиду того, что данные (26′) удовлетворяют требованию (7) при любом H, то можно считать, что функции $z_1, \ldots, z_N$ удовлетворяют оценке вида (16′) (ср. лемма 2) при любом λ. Последнее предложение существенно используется в дальнейшем.

Из (25), (25′), (30) следует

$$Q_\omega = 0 \tag{30′}$$

для всех $\omega \geqslant 0$. В соотношении (30′) совершим переход к пределу при $\omega \to \infty$. Ниже будет показано, что при $\omega \to \infty$ интегралы (32) обращаются в нуль. Поэтому, принимая во внимание (26), (26′), (31), в пределе получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_i\big|_{t=t_0} e^{-(\bar{x}^2 + i\bar{a}\bar{x})} dx_1 \ldots dx_n = 0.$$

---

*) Ср. работу [1].

**) При $t_1 \geqslant t \geqslant 0$.

В силу предложений (27), (28) последний интеграл сходится абсолютно и равномерно относительно $\overline{a}$. Следовательно, применяя формулы обращения Фурье, найдем

$$u_i\Big|_{t=t_1} e^{-\bar{x}^2} = 0,$$

откуда из-за произвольности t_1, $t_0 < t_1 < T$ вытекают соотношения (29).

Осталось проверить, что при $\omega \to \infty$ интегралы (32) стремятся к нулю. Согласно условиям теоремы имеем

$$\frac{\partial^\nu u_l}{\partial x_1^{\nu_1} \ldots \partial x_n^{\nu_n}} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\partial^\nu u_l^{(q)}}{\partial x_1^{\nu_1} \ldots \partial x_n^{\nu_n}}.$$

Подставим это значение частной производной в интеграл (32) и проинтегрируем почленно.

$$\sum_{q=0}^{\infty} \int_{t_0}^{t} \int_{-\omega}^{\omega} \cdots \int_{-\omega}^{\omega} \frac{\partial^\mu z_l}{\partial(-x_1)^{\mu_1} \ldots \partial(-x_n)^{\mu_n}} A_{ji}^{(k_1, \ldots, k_n)}(t) \frac{\partial^\nu u_i^{(q)}}{\partial x_1^{\nu_1} \ldots \partial x_n^{\nu_n}} dt\, dx_1 \ldots dx_{s-1}\, dx_{s+1} \ldots dx_n \Bigg|_{x_s=-\omega}^{x_s=+\omega} \qquad (32')$$

Законность почленного диференцирования и интегрирования обеспечивается условиями (27), (28).

При $\omega \to \infty$ каждый член ряда (32) стремится к нулю. В самом деле, согласно (27) производные от $u_j^{(q)}$ возрастают не быстрее полинома степени q, а согласно лемме 2 производные от z_j убывают быстрее любой наперед заданной отрицательной степени наибольшего из чисел $|x_1|, \ldots, |x_n|$. Следовательно, для завершения доказательства достаточно указать мажорантный по отношению к (32′), не зависящий от ω и сходящийся ряд.

С этой целью обратимся вторично к лемме 2. Применяя оценку (16′) к z_l, найдем

$$\left| \frac{\partial^\mu z_l}{\partial(-x_1)^{\mu_1} \ldots \partial(-x_n)^{\mu_n}} \right| < \frac{\mathfrak{M}_\lambda A^{\lambda+1} (\lambda+1)^{K\lambda}}{(1+x)^\lambda}, \qquad (16'')$$

причем, по предыдущему, целое число $\lambda \geqslant 0$ можно взять каким угодно.

Положим $\lambda = q+n+1$. Из (16″) и (27) следует, что

$$B \sum_{q=0}^{\infty} \mathfrak{M}_{q+n+1} A^{q+n+2} (q+n+2)^{K(q+n+1)} D_q, \qquad (32'')$$

где

$$B = \sup_{\substack{0 \leqslant \omega < \infty \\ i, j=1, \ldots, N \\ k_1+\ldots+k_n \leqslant K-1}} \int_{t_0}^{t_1} \int_{-\omega}^{\omega} \cdots \int_{-\omega}^{\omega} | A_{ji}^{(k_1, \ldots, k_n)}(t) | \frac{dt\, dx_1 \ldots dx_{s-1}\, dx_{s+1} \ldots dx_n}{(1+x)^{n+1}} \Bigg|_{x_s=-}^{x_s=+\omega}$$

есть мажорантный ряд для ряда (32′).

Сходимость мажоранты (32'') вытекает из условий (28) и из того, что

$$\mathfrak{M}_{q+n+1}A^{q+n+2}(q+n+2)^{K(q+n+1)} < Z^q q^{\Theta_1 q}, \tag{33}$$

где Z — константа, не зависящая от q.

Докажем неравенство (33). Из (26') и (15) следует, что

$$\mathfrak{M}_{q+n+1} = \mathfrak{M}_\lambda = \max \int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial^h[e^{-(\bar{y}^2+i\alpha\bar{y})}y_\gamma^s]}{\partial y_m^h}\right| dy_1\dots dy_n \tag{15'}$$

[максимум распространяется на значения индексов γ, $m=1,\dots, n$; $h=0$; $h=H_\lambda$; $s=0, 1,\dots, \lambda$].

Оценим величину интеграла

$$J(h, s) = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{d^h(e^{-x^2}x^s)}{dx^h}\right| dx.$$

Прежде всего имеем

$$J(h, s) < 2^h s! \max_{0\leq j\leq \min(h,s)} \frac{1}{j!}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{d^{h-j}e^{-x^2}}{dx^{h-j}}\right| |x|^{s-j}dx. \tag{34}$$

Далее

$$\frac{d^h e^{-x^2}}{dx^h} = h!\, e^{-x^2}\sum_{t=h_1}^{h}\frac{(-1)^t}{t!}\binom{t}{h-t}(2x)^{2t-h}, \tag{35}$$

где $h_1 = \dfrac{h}{2}$ при четном h и $h_1 = \dfrac{h+1}{2}$ при h нечетном. Наконец

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty x^{2n}e^{-x^2}dx = \frac{1\cdot 3\dots(2n-1)}{2^n}\frac{\sqrt{\pi}}{4} < \frac{2\cdot 4\dots(2n)}{2^n}\frac{\sqrt{\pi}}{4} = n!\frac{\sqrt{\pi}}{4} \\ &\int_0^\infty x^{2n+1}e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\Gamma(n+1) = \frac{n!}{2} \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Из (34), (35), (36) после элементарных вычислений найдем

$$J(h, s) < \frac{2^{3h}}{\left[\frac{h}{2}\right]!}\left[\frac{h+s}{2}\right]!\; h!\; s!\; \sqrt{\pi}.$$

Отсюда, применяя формулу Стирлинга, легко вывести, что

$$J(H_\lambda, \lambda) < Z_1^\lambda \lambda^{(\rho+K+1)\lambda} = Z_1\lambda^{(\Theta_1-K)\lambda},$$

где Z_1 от λ не зависит [в отношении H_λ ср. (14)]. Аналогичная оценка верна для $\mathfrak{M}_\lambda$ [ср. (15'')] и следовательно,

$$\mathfrak{M}_{q+n+1} < Z_2^q q^{(\Theta_1-K)q}.$$

Таким образом, неравенства (33) верны и доказательство теоремы 3 завершено.

Замечание. Из (27) и (28) следует, что $\frac{\partial^k u_i}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$, $(k \leqslant K-1)$ растет не быстрее, чем $\exp (1+x)^{\frac{1}{\theta_1}}$.

Следствие 2. Если при формулировке следствия 1 (ср. параграф 11°) условие (23″) заменить более сильным, а именно: потребовать, чтобы

$$\lim_{q \to \infty} q^{2(p+2K)} \| F_q \|^{\frac{1}{q}} = 0,$$

то соответствующее решение будет содержаться в том классе решений, для которого доказана теорема единственности. Для этого случая нетрудно также указать метрику, в которой условие А оказывается необходимым и достаточным для равномерной корректности постановки задачи Коши.

Именно в качестве нормы $\|F\|$ системы $2N$ функций f_l, φ_l следует взять

$$\|F\| = \inf \sup_{0 \leqslant q < \infty} q^{p+2K-1} \| F_q \|^{\frac{1}{q}},$$

где нижняя грань берется по всевозможным представлениям f_l, φ_l в виде рядов, удовлетворяющих видоизмененным (как выше указано) требованиям следствия 1, а в качестве нормы $\|u\|$ системы функций $u_1, \ldots, u_N$

$$\|u\| = \inf \sup_{0 \leqslant q < \infty} \|u_q\|^{\frac{1}{q}}$$

с аналогичной оговоркой.

Доказательство очевидно.

III. Интегральное представление решения задачи Коши

13°. Вернемся к нашей сокращенной записи, в которой $F(\bar{x})$ обозначает любую из функций $f_l(t, \bar{x})$, $\varphi_l(\bar{x})$.

Предположим, что $F(\bar{x})$ непрерывно диференцируемая H_{q+} раз [ср. теорему (1)], причем

$$\left| \frac{\partial^h F(\bar{x})}{\partial x_1^{h_1} \ldots \partial x_n^{h_n}} \right| < \|F\| (1+x)^q \tag{23_1}$$

[$h = 0, 1, \ldots, H_{q+1}$; $\|F\|$ — постоянная, не зависящая от h;

$$x = \max (|x_1|, \ldots, |x_n|)].$$

Положим

$$G_\varrho(\bar{x}) = F(\bar{x}) \ (1 - e^{-\varrho^2 \bar{x}^2}).$$

[ϱ — вещественный параметр; $\bar{x}^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$].

Имеем

$$\left|\frac{\partial^h G_\varrho(\bar{x})}{\partial x_1^{h_1}\dots\partial x_n^{h_n}}\right| < \|F\|(1+x)^q\left[1-e^{-\varrho^2\bar{x}^2}+\right.$$

$$\left.+\sum_{s_1=0}^{h_1}\sum_{s_n=0}^{h_n}\binom{s_1}{h_1}\dots\binom{s_n}{h_n}\frac{\partial^s e^{-\varrho^2\bar{x}^2}}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_n^{s_n}}\right].$$

Из (35) нетрудно вывести, что

$$\frac{\partial^s e^{-\varrho^2 x^2}}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_n^{s_n}} = \varrho^s e^{-\varrho^2\bar{x}^2} s_1!\dots s_n!\sum_{t_1=s_1'}^{s_1}\dots\sum_{t_n=s_n'}^{s_n}\frac{(-1)^{t_1+\dots+t_n}}{t_1!\dots t_n!}\times$$

$$\times\binom{t_1}{s_1-t_1}\dots\binom{t_n}{s_n-t_n}(2\varrho x_1)^{2t_1-s_1}\dots(2\varrho x_n)^{2t_n-s_n},$$

где $s_i'=\frac{s_i}{2}$ при четном s_i и $s_i'=\frac{s_i+1}{2}$ при s_i нечетном. Отсюда следует, что

$$\frac{\partial^s e^{-\varrho^2\bar{x}^2}}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_n^{s_n}}\xrightarrow[\varrho\to 0]{} 0$$

равномерно относительно $\bar{x}$. Принимая во внимание, что также

$$\frac{1-e^{-\varrho^2\bar{x}^2}}{1+x}\xrightarrow[\varrho\to 0]{} 0$$

равномерно относительно $\bar{x}$, находим

$$\left|\frac{\partial^h G_\varrho(\bar{x})}{\partial x_1^{h_1}\dots\partial x_n^{h}}\right| < \|F\|\,\varepsilon(\varrho)\,(1+x)^{q+1}, \tag{37}$$

$$(h=0,1,\dots,H_{q+1}),$$

где $\varepsilon(\varrho)\to 0$ при $\varrho\to 0$.

Рассмотрим теперь задачу Коши

$$L_i(w)=g_{i\varrho}(t,\bar{x})$$

$$w_i\big|_{t=t_0}=\psi_{i\varrho}(\bar{x}),$$

где

$$(i=1,\dots,N),$$

$$g_{i\varrho}(t,\bar{x})=f_i(t,\bar{x})\,(1-e^{-\varrho^2\bar{x}^2}),$$

$$\psi_{i\varrho}(\bar{x})=\varphi(\bar{x})\,(1-e^{-\varrho^2\bar{x}^2}).$$

Согласно теореме 1 и неравенствам (37) существует решение $w_{1\varrho},\dots,w_{N\varrho}$ этой задачи, удовлетворяющее условию

$$\left|\frac{\partial^k w_{i\varrho}}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}}\right| < W\varepsilon(\varrho)\,(1+x)^{q+1} \tag{24_1}$$

[$k=0,1,\dots,K$; $i=1,\dots,N$; W — константа, не зависящая от ϱ].

Из неравенств (24_1) выведем следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть для системы (1) выполнено условие A. Пусть свободные члены f_l и начальные данные φ_l удовлетворяют условию (23_1). Тогда решение $u_1, \ldots, u_N$ задачи Коши (1), (2) существует, единственно в классе функций, мажорирующихся конечным полиномом, вместе с их производными по $x_1, \ldots, x_n$ до порядка K включительно, и может быть получено по формулам

$$u_i(t, \bar{x}) = \lim_{\varrho \to 0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{l=1}^{N} v_{il}(t, t_0, \bar{a}) \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_l(\bar{y}) e^{-(i\bar{a}\bar{y} + \varrho^2 \bar{y}^2)} dy_1 \ldots dy_n + \right. \tag{6'}$$

$$\left. + \int_{t_0}^{t} d\tau \sum_{l=1}^{N} v_{il}(t, \tau, \bar{a}) \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_l(\tau, \bar{y}) e^{-(i\bar{a}\bar{y} + \varrho^2 \bar{y}^2)} dy_1 \ldots dy_n \right\} e^{i\bar{a}\bar{x}} da_1 \ldots da_n$$

$$(i = 1, \ldots, N).$$

Предел существует равномерно в каждой конечной области.

Доказательство. В условиях настоящей теоремы решение $u_{1\varrho}, \ldots, u_{N\varrho}$ задачи Коши

$$L_i(u) = f_i(t, \bar{x}) e^{-\varrho^2 \bar{x}^2},$$

$$u_i \big|_{t=t_0} = \varphi_i(\bar{x}) e^{-\varrho^2 \bar{x}^2} \qquad (i = 1, \ldots, N)$$

может быть определено в соответствии с леммой 1 по формулам (6). Согласно лемме 2 оно ограничено и поэтому (ср. теорему 3 единственности) совпадает с решением этой же задачи, полученным по методу доказательства теоремы 1. Из неравенства (24_1) следует, что последнее решение стремится равномерно в каждой конечной области к решению задачи Коши (1), (2).

Замечание. Интегральное представление (6′) верно в несколько видоизмененных условиях следствия 1. Именно, в (23″) вместо $h = 0, 1, \ldots, H_q$ следует положить $h = 0, 1, \ldots, H_{q+1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Г. Петровский, Бюллетень МГУ, серия А, вып. 7 (1938).