№ 4 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ 1949
АКАДЕМИИ НАУК УССР

Эрмитово-положительные ядра на однородных пространствах

(I часть)

М. Г. Крейн

Комплекснозначная функция $F(p, q)$, определенная для всех p, q из некоторого множества Q, называется эрмитово-положительным (э. п.) ядром, если для любых $p_1 \in Q, \ldots, p_n \in Q$ и любых комплексных $\xi_1, \ldots, \xi_n$ выполняется неравенство

$$\sum_{i, k=1}^{n} F(p_i, p_k)\, \xi_i \bar{\xi}_k \geqslant 0.$$

Легко видеть, что это условие влечет за собой условие

$$F(p, q) = \overline{F(q, p)} \qquad (p, q \in Q).$$

Пусть теперь на Q задана группа G отображений Q на самое себя. Ядро $F(p, q)$ $(p, q \in Q)$ называется инвариантным, если для любого $s \in G$

$$F(sp, sq) = F(p, q) \qquad (p, q \in Q).$$

Настоящая статья посвящается изучению непрерывных инвариантных эрмитово-положительных ядер на топологическом пространстве Q с непрерывной группой G гомеоморфизмов. Совокупность этих ядер мы будем обозначать через $\mathfrak{P}_{QG}$.

Как известно, для случая, когда Q и G бикомпактны, изучение класса функций $\mathfrak{P}_{QG}$ приводит к теории Картана [23] Q-гармонических функций (см. также Г. Вейль [36]), содержащей в себе, как весьма частный случай, теорию обычных шаровых функций.

Изучение класса функций $\mathfrak{P}_{QG}$ значительно усложняется, если Q и G локально бикомпактные топологические множества. Для установления основных результатов здесь приходится привлекать значительные средства спектральной теории эрмитовых операторов; в частности, мы используем наши недавние исследования по теории эрмитовых операторов с направляющими функционалами [9и, к] *).

---

*) Цифры в квадратных скобках относятся к списку литературы, помещаемому в конце II части статьи.

Всякую топологическую группу G можно мыслить всегда, как группу гомеоморфизмов пространства $Q = G$, сопоставляя каждому $s \in G$ гомеоморфизм $p \to sp$ ($p \in G$). В этом случае каждое инвариантное ядро $F(p, q)$ ($p, q \in G$) получается по формуле $F(p, q) = f(q^{-1}p)$, где $f(p)$ некоторая функция, определенная на G. Соответственно этому функция $f(p)$ ($p \in G$) называется эрмитово-положительной, если ядро $f(q^{-1}p)$ эрмитово-положительно. Изучение класса ядер $\mathfrak{P}_{QG}$ сводится в данном случае ($Q = G$) к изучению класса $\mathfrak{P}(G)$ всех непрерывных э. п. функций на G.

Изучение класса функций $\mathfrak{P}(G)$ для случая локально бикомпактной группы привело И. М. Гельфанда и Д. А. Райкова [6] к ряду фундаментальных результатов теории представлений группы с помощью унитарных преобразований в гильбертовом пространстве.

По техническим причинам настоящая работа будет печататься тремя частями, причем разделение на первые две части никак не вызвано соображениями логического порядка.

В первой части излагаются общие предложения об инвариантных и неинвариантных э. п. ядрах на любом топологическом пространстве. В этой части используется и обобщается ряд идей работы И. М. Гельфанда и Д. А. Райкова [6].

В теории Картана существенную роль играют понятия о зональных функциях и о неприводимом семействе Q-гармонических функций. Здесь устанавливаются аналоги этих понятий для общего случая любого топологического пространства Q и транзитивной группы его гомеоморфизмов G (без предположений бикомпактности).

Там же в первой части вводится в рассмотрение нормированное кольцо $\mathfrak{R}_Q$, являющееся линейной оболочкой множества всех непрерывных э. п. ядер на Q.

Вторая часть, в основном, посвящена исследованию различных подколец кольца $\mathfrak{R}_Q$. В результате этих исследований мы получаем принцип двойственности для бикомпактных групп и алгебр особого типа. Этот принцип следует рассматривать как полное обобщение принципа двойственности Л. С. Понтрягина [15] для коммутативных бикомпактных и дискретных групп. В некоторой его части (более простой) это обобщение было ранее получено Т. Таннака [32] и независимо от него автором [9з]. Кроме того, мы доказываем, что бикомпакт Q и бикомпактная группа его гомеоморфизмов (в случае, если она достаточно полна) в известном смысле характеризуются алгеброй Q-гармонических функций.

Третья, наиболее трудная, часть работы посвящена интегральным представлениям инвариантных э. п. ядер через зональные для случая, когда Q — локально компактное риманово пространство, а G — группа всех его твердых движений. Наши методы спектральной теории операторов позволяют получать эти представления для инвариантных э. п.

ядер, задаваемых не на всем пространстве, а на гипершаре пространства. Таким образом мы решаем вопросы продолжения э. п. ядер.

Выражаю благодарность аспиранту Ю. М. Березанскому и доценту М. С. Бродскому за критические замечания, которые ими были сделаны при прочтении рукописи.

§ 1. ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО, ПОРОЖДАЕМОЕ ЭРМИТОВО-ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ

1. Пусть Q — некоторое абстрактное множество, а $F(p, q)$ $(p, q \in Q)$ — э. п. ядро.

Каждому $p \in Q$ отнесем символ e_p. Образуем множество L всевозможных агрегатов вида:

$$\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_{p_j},$$

где $p_1 \in Q, \ldots, p_n \in Q$, а $\xi_1, \ldots, \xi_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ — комплексные числа. Множество L мы будем рассматривать, как линейное множество, определяя операцию сложения двух агрегатов и умножения агрегата на скаляр в согласии с обычными правилами алгебры действия над буквенными выражениями с числовыми коэфициентами.

Введем в L квазискалярное произведение, полагая для любых двух агрегатов

$$x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_{p_j}, \quad y = \sum_{k=1}^{m} \eta_k e_{q_k}$$

это произведение равным

$$(x, y) = \sum F(p_j, q_k) \xi_j \overline{\eta_k}. \tag{1,1}$$

Отождествляя в L всякие два элемента x, y, для которых $(x-y, x-y) = 0$, мы превратим L в некоторое пространство, которое будет удовлетворять всем аксиомам гильбертова пространства, кроме, может быть, аксиомы полноты.

Фундаментальную роль в дальнейшем будет играть понятие гильбертова пространства $\mathfrak{H}_F$.

Пространство $\mathfrak{H}_F$ мы определяем, как замыкание пространства L. В п. 4 этого параграфа покажем, как реализовать $\mathfrak{H}_F$ в виде некоторого пространства функций на Q.

2. Пусть теперь на Q задана некоторая топология. Понятие о пространстве $\mathfrak{H}_F$ позволяет сразу установить ряд свойств э. п. ядра F.

1°. *Для того чтобы э. п. ядро $F(p, q)$ было непрерывной функцией на $Q \times Q$, достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:*

1) диагональная функция $F(p, p)$ $(p \in Q)$ непрерывна,

2) при любом фиксированном $p \in Q$ функция $\operatorname{Re} F(p, q)$ аргумента $q \in Q$ непрерывна в точке $q = p$.

В самом деле, в силу определения (1,1) будем иметь

$$\|e_p - e_q\|^2 = (e_p - e_q,\ e_p - e_q) = F(p, p) - 2\operatorname{Re} F(p, q) + F(q, q).$$

Так как $\operatorname{Re} F(p, p) = F(p, p)$, то в силу условий 1) и 2), при любом фиксированном $p \in Q$ выражение, стоящее справа, будет сколь угодно мало, если только q будет принадлежать достаточно малой окрестности точки p.

Этим доказано, что e_p есть непрерывная вектор-функция на Q со значениями в $\mathfrak{H}_F$. Но тогда скалярное произведение

$$F(p, q) = (e_p, e_q)$$

будет непрерывной функцией на $Q \times Q$.

В частности, из 1° вытекает:

2°. Для того чтобы э. п. функция $F(p, q)$ $(p, q \in Q)$ была непрерывна на $Q \times Q$, достаточно, чтобы функция $\operatorname{Re} F(p, q)$ была непрерывна в каждой точке диагонали $p = q$.

3. В дальнейшем будем предполагать, что э. п. функция $F(p, q)$ $(p, q \in Q)$ непрерывна на $Q \times Q$.

Так как в этом случае $e_p (p \in Q)$ — непрерывная вектор-функция на Q со значениями в $\mathfrak{H}_F$, а линейная замкнутая оболочка множества всех $e_p (p \in Q)$ совпадает с $\mathfrak{H}_F$, то, очевидно, число измерений $\mathfrak{H}_F$ не больше минимальной из мощностей множеств $E \subset Q$, плотных в Q.

Пусть $\{\varphi_\nu\}_{\nu \in N}$ ортонормированный базис $\mathfrak{H}_F$. Согласно только что сказанному этот базис будет содержать не более, чем счетное число элементов в том случае, когда Q сепарабельно.

Для каждого $\nu \in N$ определим функцию

$$\Phi_\nu(p) = (e_p, \varphi_\nu) \qquad (p \in Q).$$

В силу непрерывности вектор-функции e_p $(p \in Q)$ каждая из функций $\Phi_\nu(p)$ $(\nu \in N)$ непрерывна на Q. Равенство Бесселя

$$(x, y) = \sum_{\nu \in N} (x, \varphi_\nu)(\varphi_\nu, y) \qquad (x, y \in \mathfrak{H}_F)$$

при $x = e_p$, $y = e_q$ приводит нас к разложению

$$F(p, q) = \sum_{\nu \in N} \Phi_\nu(p)\, \overline{\Phi_\nu(q)}. \tag{1,2}$$

В стоящей здесь сумме для любых $p, q \in Q$ только счетное число слагаемых отлично от нуля, и суммация идет именно по этим слагаемым.

Если N счетно, то, по теореме Дини, на каждой бикомпактной части $B \subset Q$ разложение

$$F(p, p) = \sum_{\nu \in N} |\Phi_\nu(p)|^2$$

будет равномерно сходиться, а отсюда по известному способу заключаем, что и разложение (1,2) будет равномерно сходиться на $B \times B$.

Условимся говорить, что функции на Q: $\Psi_\mu(p)$ $(\mu \in M)$ ω-линейно независимы, если из тождества

$$\sum_{\mu \in M} c_\mu \Psi_\mu(p) = 0 \qquad (p \in Q), \qquad \sum_{\mu \in M} |c_\mu|^2 < \infty,$$

вытекает, что все $c_\mu = 0$ $(\mu \in M)$.

Легко видеть, что в построенном разложении (1,2) функции $\Phi_\nu(p)$ $(\nu \in N)$ ω-линейно независимы.

В самом деле, соотношение

$$\sum_{\nu \in N} c_\nu \Phi_\nu(p) = 0 \qquad (p \in Q)$$

равносильно соотношению

$$\sum_{\nu \in N} (c_\nu \varphi_\nu, e_p) = 0 \qquad (p \in Q),$$

а так как линейная замкнутая оболочка множества $\{e_p\}_{p \in Q}$ дает все $\mathfrak{H}_F$, то отсюда заключаем, что $\sum_{\nu \in N} c_\nu \varphi_\nu = 0$, т. е.

$$c_\nu = 0 \qquad (\nu \in N).$$

Рассмотрим теперь какое-либо иное разложение $F(p, q)$ вида

$$F(p, q) = \sum_{\mu \in M} \Psi_\mu(p) \overline{\Psi_\mu(q)} \qquad (p, q \in Q). \tag{1,3}$$

Образуем гильбертово пространство H всех „последовательностей" $a = \{\alpha_\mu\}_{\mu \in M}$ таких, что

$$\sum_{\mu \in M} |\alpha_\mu|^2 < \infty,$$

определяя, как обычно, для двух элементов $a, b \in H$ скалярное произведение равенством:

$$(a, b) = \sum_{\mu \in M} \alpha_\mu \overline{\beta}_\mu.$$

Отнесем каждому вектору e_p $(p \in Q)$ вектор $a_p = \{\Psi_\mu(p)\}_{\mu \in M} \in H$ и соответственно каждому вектору $x = \Sigma \xi_j e_{p_j}$ из L — вектор $\Sigma \xi_j a_{p_j} \in H$. В силу (1,3) мы получаем изометрическое отображение L в H, а так как L плотно в $\mathfrak{H}_F$, то это отображение может быть расширено до изометрического отображения всего $\mathfrak{H}_F$ в H.

Отсюда, в частности, следует, что $\dim \mathfrak{H}_F \leqslant \dim H$, т. е. мощность M не меньше мощности N.

Обозначим через $\psi_\lambda = \{\delta_{\lambda\mu}\}_{\mu \in M}$ $(\lambda \in M)$ орт из H, для которого

$$\delta_{\lambda\mu} = \begin{cases} 0 & \lambda \neq \mu \\ 1 & \lambda = \mu. \end{cases}$$

Вектора $\psi_\mu\,(\mu \in M)$ образуют ортонормированный базис в H и, очевидно,

$$\Psi_\mu(p) = (a_p, \psi_\mu) \qquad (\mu \in M). \tag{1,4}$$

В силу сказанного ранее мы можем рассматривать $\mathfrak{H}_F$ как часть H, отождествляя вектор e_p с a_p $(p \in Q)$. Разложим орты $\varphi_\nu\,(\nu \in N)$ ортонормированного базиса $\mathfrak{H}_F$ по ортам $\psi_\mu\,(\mu \in M)$, получим:

$$\varphi_\nu = \sum_{\mu \in M} u_{\nu\mu}\psi_\mu \qquad (\nu \in N), \tag{1,5}$$

причем

$$\sum_{\mu \in M} u_{\nu\mu}\bar{u}_{\lambda\mu} = \begin{cases} 1 & \lambda = \nu \\ 0 & \lambda \neq \nu \end{cases} \quad (\lambda, \nu \in N). \tag{1,6}$$

Помножая слева равенство (1,5) на вектор $e_p = a_p$, получим:

$$\Phi_\nu(p) = \sum_{\mu \in M} u_{\nu\mu}\Psi_\mu(p) \qquad (\nu \in N). \tag{1,7}$$

Легко видеть, что и обратно, если система функций $\{\Phi_\nu(p)\}_{\nu \in N}$ выражается через систему $\{\Psi_\mu(p)\}_{\mu \in M}$ с помощью преобразования (1,7), матрица которого полуунитарна слева (т. е. ее элементы удовлетворяют соотношениям (1,6), то вместе с разложением (1,2) будет иметь место и разложение (1,3).

Заметим, что из формулы (1,7) одновременно следует непрерывность функций $\Psi_\nu(p)$ на Q $(e_p = a_p)$.

Выясним теперь, когда $\mathfrak{H}_F$ совпадает с H. Если $\mathfrak{H}_F$ правильная часть H, то в H найдется вектор $\Sigma \bar{c}_\mu \psi_\mu \neq 0$ и ортогональный к $\mathfrak{H}_F$, в частности, будем иметь

$$\left(a_p, \sum_{\mu \in M} \bar{c}_\mu \psi_\mu\right) = \sum_{\mu \in M} c_\mu \Psi_\mu(p) = 0. \qquad (p \in \dot{Q}).$$

Обращая эти рассуждения, мы приходим к выводу, что $\mathfrak{H}_F$ будет совпадать с H в том и только том случае, когда функции $\Psi_\nu(\nu \in N)$ будут ω-линейно независимы. В этом и только этом случае орты ψ_μ

будут разлагаться по ортам φ_ν, мощности M и N будут совпадать, и матрица $\| u_{\nu\mu} \|_{\nu, \mu \in N}$ будет унитарной.

Таким образом, мы доказали предложение:

Теорема 1. *Непрерывная э. п. функция* $F(p, q)$ $(p, q \in Q)$ *всегда допускает разложение.*

$$F(p, q) = \sum_{\nu \in N} \Phi_\nu(p) \overline{\Phi_\nu(q)} \qquad (p, q \in Q) \tag{1,8}$$

с ω-линейно независимыми функциями Φ_ν $(\nu \in N)$. *Система ω-линейно независимых функций* Φ_ν $(\nu \in N)$ *определяется разложением* (1,8) *с точностью до унитарного преобразования, и все функции этой системы обязательно непрерывны.*

Заметим, что приведенные рассуждения одновременно показали, что способ, который мы первоначально указали для получения разложения (1,8) с ω-линейно независимыми функциями Φ_ν, является исчерпывающим.

4. Элементы $f \in \mathfrak{H}_F$ можно привести во взаимнооднозначное линейное соответствие с некоторыми непрерывными функциями $f(q)$ на Q, полагая

$$f(q) = (f, e_q) \qquad (q \in Q).$$

Обозначим через $\mathfrak{H}_F(q)$ множество функций, в которое переходит $\mathfrak{H}_F$ при этом соответствии.

Имея разложение (1,8), легко описать множество $\mathfrak{H}_F(q)$.

3°. Множество $\mathfrak{H}_F(q)$ состоит из всех функций $f(q)$ $(q \in Q)$ вида

$$f(q) = \sum_{\nu \in N} c_\nu \overline{\Phi_\nu(q)}, \tag{1,9}$$

где

$$\sum_{\nu \in N} |c_\nu|^2 < \infty. \tag{1,10}$$

В самом деле, пусть $\{\varphi_\nu\}_{\nu \in N}$ — ортонормированный базис $\mathfrak{H}_F$, порождающий разложение (1,8), т. е.

$$\Phi_\nu(q) = (e_q, \varphi_\nu) \qquad (\nu \in N;\ q \in Q).$$

Всякому элементу $f \in \mathfrak{H}_F$ соответствует квадрируемая „последовательность“ $\{c_\nu\}_{\nu \in N}$, такая, что

$$f = \sum_{\nu \in N} c_\nu \varphi_\nu. \tag{1,11}$$

Помножая это равенство скалярно на e_q, получим (1,9).

Обратно, всякой квадрируемой „последовательности" $\{c_\nu\}_{\nu \in N}$ отвечает по формуле (1,11) некоторый элемент $f \in \mathfrak{H}_F$, для которого имеет место (1,9).

Метрика в $\mathfrak{H}_F$ индуцирует некоторую метрику в $\mathfrak{H}_F(q)$. Из приведенных рассуждений явствует, что если функция $f(q) \in \mathfrak{H}_F(q)$ допускает разложение (1,11), а $g(q) \in \mathfrak{H}_F(q)$ — разложение

$$g(q) = \sum_{\nu \in N} d_\nu \Phi_\nu(q) \qquad \left(\sum_{\nu \in N} |d_\nu|^2 < \infty\right),$$

то

$$(f, g) = \sum_{\nu \in N} c_\nu \bar{d}_\nu.$$

Не прибегая к разложению (1,9), функции $f(p) \in \mathfrak{H}_F(q)$ можно охарактеризовать следующим образом.

4°. Функция $f(q)$ $(q \in Q)$ принадлежит $\mathfrak{H}_F(q)$ в том и только том случае, если при достаточно малом $\varepsilon > 0$, функция

$$R_\varepsilon(p, q) = F(p, q) - \varepsilon \overline{f(p)} f(q) \qquad (p, q \in Q) \tag{1,12}$$

есть э. п. ядро.

В самом деле, если $f(q) = (f, e_q)$, то при любых $q_j \in Q$ и комплексных ξ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$

$$\sum R_\varepsilon(q_j, q_k)\, \xi_j \bar{\xi}_k = (x, x) - \varepsilon |(f, f)|^2,$$

где

$$x = \sum \xi_j e_{q_j}. \tag{1,13}$$

Из неравенства Буняковского

$$|(f, x)|^2 \leqslant (f, f)\,(x, x)$$

заключаем, что R_ε — э. п. ядро при $\varepsilon \leqslant \dfrac{1}{(f, f)}$.

Пусть теперь обратно при некотором $\varepsilon > 0$ $R_\varepsilon(p, q)$ — э. п. ядро.

Определим на L (см. п. 1) линейный функционал $l(x)$, полагая для элемента $x \in L$ вида (1,13)

$$l(x) = \sum \xi_j \overline{f(q_j)}.$$

Функционал $l(x)$ ограничен на L, ибо согласно (1,12)

$$(x, x) - \varepsilon |l(x)|^2 = \sum R_\varepsilon(q_j, q_k)\, \xi_j \bar{\xi}_k \geqslant 0.$$

Так как L плотно в $\mathfrak{H}_F$, то $l(x)$ однозначно расширяется до непрерывного функционала на $\mathfrak{H}_F$, и по лемме Рисса ему соответствует элемент $f \in \mathfrak{H}_F$, такой, что $l(x) = (x, f)$.

Полагая, в частности, $x = e_q$, получим $f(q) = (f, e_q)$ $(q \in Q)$. Предложение доказано.

Из приведенных рассуждений легко также заключить, что

$$(f, f) = \frac{1}{\varepsilon_f},$$

где ε_f есть максимальное из $\varepsilon > 0$, при которых

$$F(p, q) - \varepsilon \overline{f(p)} f(q) \in \mathfrak{P}_Q$$

5. Пусть теперь Q бикомпактно, а $\Omega(\mathscr{E})$ некоторая вполне аддитивная мера, определенная на теле всех борелевских множеств из Q и обладающая свойством, что для любого открытого множества $O \in Q : \Omega(O) > 0$.

По данной непрерывной э. п. функции $F(p, q)$ $(p, q \in Q)$ составим интегральное уравнение:

$$\chi(p) = \lambda \int_Q F(p, q) \chi(q) \, d\Omega(q). \tag{1,14}$$

К этому уравнению применима теорема Мерсера; в силу нее

$$F(p, q) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\chi_\nu(p) \overline{\chi_\nu(q)}}{\lambda_\nu} \qquad (p, q \in Q), \tag{1,15}$$

где $\{\chi_\nu\}$ — полная ортонормированная система фундаментальных функций интегрального уравнения (1,14), а $\{\lambda_\nu\}$ — соответствующая последовательность характеристических чисел. В силу равномерной сходимости ряда (1,15), всякий ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \frac{\chi_\nu(p)}{\sqrt{\lambda_\nu}} \qquad \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu|^2 < \infty\right) \tag{1,16}$$

будет равномерно сходиться. А так как функции $\frac{\chi_\nu(p)}{\sqrt{\lambda_\nu}}$ ортогональны друг к другу

$$\int_Q \chi_\nu(p) \overline{\chi_\mu(p)} \, d\Omega(p) = \begin{cases} 1 & \text{при } \mu = \nu \\ 0 & \text{при } \mu \neq \nu, \end{cases}$$

то ряд (1,16) будет сходиться к нулю только при условии, что:

$$c_1 = c_2 = \ldots = 0.$$

Таким образом, функции χ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ ω-линейно независимы.

Если зафиксировать функцию F, а функцию Ω менять, то мы будем получать различные системы $\left\{\frac{\chi_\nu}{\sqrt{\lambda_\nu}}\right\}$ функций, но согласно 3° они всегда будут получаться одна из другой с помощью унитарного преобразования.

Для случая, когда Q — конечный интервал: $Q = (a, b)$, это предложение было обнаружено иным путем А. М. Данилевским и автором в их совместной заметке в журнале „ДАН" [8]. Там же можно найти предложение, близкое к 3°, но значительно менее полное, которое было получено с помощью специальных рассуждений, связанных с теорией интегральных уравнений.

6. Пусть Q — открытый, полуоткрытый или закрытый интервал (a, b) вещественной оси $(-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty)$ и пусть ядро $F(p, q) \in \mathfrak{P}_Q$ обладает непрерывными производными

$$F_{mn}(p, q) = \frac{\partial^{m+n} F(p, q)}{\partial p^m \partial q^n} \qquad (m, n = 0, 1, \ldots, r). \tag{1,17}$$

Предоставляем читателю доказать, что существование непрерывных производных (1,17) у ядра означает, что вектор-функция e_p имеет непрерывные сильные производные.

$$e_p^{(m)} = \frac{d^m e_p}{dp^m} \qquad (m = 0, 1, \ldots, r;\ p \in Q).$$

Коль скоро это установлено, то можно утверждать, что в разложении (1,8) каждая из функций $\Phi_\nu(p)$ $(\nu \in N)$ r раз непрерывно диференцируема, причем

$$\Phi_\nu^{(m)}(p) = \frac{d^m \Phi_\nu(p)}{dp^m} = (e_p^{(m)}, \varphi_\nu) \qquad (m = 0, 1, \ldots, r;\ p \in Q).$$

Так как, кроме того,

$$F_{mn}(p, q) = (e_p^{(m)}, e_q^{(n)}) \qquad (m, n = 0, 1, \ldots, r),$$

а

$$(e_p^{(m)}, e_q^{(n)}) = \sum_{\nu \in N} (e_p^{(m)}, \varphi_\nu)(\varphi_\nu, e_q^{(n)}) \qquad (m, n = 0, 1, \ldots, r),$$

то мы приходим к следующему предложению.

5°. Если ядро $F(p, q) \in \mathfrak{P}_Q$ имеет непрерывные производные $F_{mn}(p, q)$ $(m, n = 0, 1, \ldots, r)$, то во всяком его разложении*)

$$F(p, q) = \sum_{\nu \in N} \Phi_\nu(p) \overline{\Phi_\nu(q)}$$

функции Φ_ν r раз непрерывно диференцируемы и при этом

$$F_{mn}(p, q) = \sum_{\nu \in N} \Phi_\nu^{(m)}(p) \overline{\Phi_\nu^{(n)}(q)} \qquad (m, n = 0, 1, \ldots, r;\ p, q \in Q).$$

Этим предложением мы неоднократно пользовались в наших исследованиях по одномерной краевой задаче. Здесь указан более идейный способ его получения (ср. с [9а, б, в]).

---

*) Без предположения, что функции $\Phi_\nu (\nu \in N)$ ω-линейно независимы.

Предположим теперь, что ядро $F(p, q)$ есть аналитическая функция переменных p, q в окрестности некоторой точки $p=q=p_0$. Пусть оно голоморфно в бицилиндре

$$|z-p_0|<R, \quad |\zeta-p_0|<R, \tag{1,18}$$

т. е. его ряд Тэйлора в точке (p_0, p_0):

$$\sum_{m, n=0}^{\infty} F_{mn}(p_0, p_0)(z-p_0)^m(\zeta-p_0)^n \tag{1,19}$$

сходится всюду в четырехмерном бицилиндре (1,18) (z и ζ — комплексные числа).

Тогда для любого положительного $\varrho<R$ и положительного $\delta<R-\varrho$ найдется такое M, что

$$|F_{mn}(p, p)| \leqslant m!\, n!\, \frac{M^{m+n}}{\varrho^{m+n}} \text{ при } |p-p_0|<\delta \qquad (m, n=0, 1, 2, \ldots).$$

Отсюда

$$\|e_p^{(n)}\| \leqslant \sqrt{F_{nn}(p, p)} \leqslant n!\, \frac{M^n}{\varrho^n} \text{ при } |p-p_0|<\delta \qquad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

и, следовательно, для всякого $x \in \mathfrak{H}_F$ скалярная функция

$$f_x(p)=(e_p, x) \qquad (p \in Q),$$

имея производные $f_x^{(n)}(p)$ всех порядков в интервале $(p_0-\delta,\ p_0+\delta)$, удовлетворяющие неравенствам:

$$|f_x^{(n)}(p)| \leqslant \frac{n!\, M^n}{\varrho^n}\|x\| \text{ при } |p-p_0|<\delta \ (n=0, 1, 2, \ldots),$$

голоморфна в круге $|z-p_0|<\varrho$. Так как ϱ — произвольное положительное число $<R$, то функция $f_x(p)$ голоморфна в круге $|z-p_0|<R$.

Следовательно, для любого z из этого круга и окружности C_ϱ $(|z-p_0|=\varrho)$, где $|z|<\varrho<R$,

$$(e_z, x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varrho}\frac{(e_\zeta, x)}{\zeta-z}\,d\zeta=\left(\frac{1}{2\pi i}\int\frac{e_\zeta\, d\zeta}{\zeta-z},\ x\right).$$

Так как это равенство справедливо для любого $x \in \mathfrak{H}_F$, то отсюда заключаем

$$e_z=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varrho}\frac{e_\zeta\, d\zeta}{\zeta-z}.$$

Таким образом

6°. Если ядро $F(p, q) \in \mathfrak{P}_Q$ аналитично в бицилиндре (1,18)*), то вектор-функция e_p аналитична в круге $|z-p_0|<R$.

*) Т. е. его ряд Тэйлора (1,19) сходится в бицилиндре (1,18).

Отсюда и из равенства

$$F(p, q) = (e_p, e_q) \qquad (p, q \in Q)$$

мы заключаем, что, если ядро $F(p, q) \in \mathfrak{P}_Q$ аналитично в бицилиндре (1,18) и некотором бицилиндре

$$|z - q_0| < R_1, \quad |\zeta - q_0| < R_2,$$

то ядро $F(p, q)$ будет аналитичной функцией также в бицилиндре

$$|z - p_0| < R_1, \quad |\zeta - q_0| < R_2.$$

Мы пришли к предложению:

7°. Если ядро $F(p, q) \in \mathfrak{P}_Q$ аналитично в окрестности каждой точки диагонали p, q, то оно аналитично всюду на $Q \times Q$.

Если, кроме того, ядро $F(p, q)$ аналитично в бицилиндре одного и того же радиуса с центром в любой точке диагонали, то оно будет аналитично в бицилиндре того же радиуса с центром в любой точке $Q \times Q$.

Очевидно также, что при выполнении первого предположения предложения 6° в любом разложении (1,8) все функции $\Phi_\nu(p)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ аналитичны на Q.

Рассмотрим теперь область комплексной плоскости D, составленную из всевозможных кругов

$$|z - p| < R_p \qquad (p \in Q),$$

где R_p — радиус бицилиндра с центром в точке (p, p).

Ядро $F(p, q)$ будет аналитически продолжаться на $D \times D$. Обозначим через $F(z, \zeta)$ $(z, \zeta \in D)$ аналитическое продолжение $F(p, q)$ на $D \times D$. Очевидно, оно получится по формуле

$$F(z, \zeta) = (e_z, e_\zeta),$$

где вектор-функция e_z $(z \in D)$ есть аналитическое продолжение вектор-функции e_p $(p \in Q)$.

Ядро $F(z, \zeta)$, если оно не есть тождественная константа, не будет э. п. ядром ($F(z, z)$ не будет вещественным числом).

Если же положить

$$F(z, \zeta) = F(z, \overline{\zeta}) = (e_z, e_\zeta) \qquad (z, \zeta \in D),$$

то, очевидно, ядро $F(z, \zeta)$ будет эрмитово-положительным продолжением ядра $F(p, q)$ $(p, q \in Q)$.

Этого же типа рассуждения приводят к такому неожиданному предложению:

8°. Если ядро $F(p, q) \in \mathfrak{P}_Q$ аналитически продолжается с квадрата $Q \times Q$ на некоторый квадрат $Q_1 \times Q_1$

(Q_1 — интервал вещественной оси, содержащий Q), то его продолжение есть э. п. ядро.

В самом деле, пусть, например, ядро $F(p, q)$ продолжается через конец b и пусть $|z-b|<R$, $|\zeta-b|<R$ бицилиндр максимального радиуса, внутрь которого аналитически продолжается ядро F.

На основании 6° в этом случае можно утверждать, что вектор-функция e_p продолжается через конец b до голоморфной функции в круге $|z-b|<R$. Следовательно, если мы положим

$$F(p, q)=(e_p,\ e_q) \quad \text{для} \quad p, q \in Q',$$

где Q' получается из Q присоединением к нему открытого справа интервала $(b, b+R)$, то $F_1(p, q)$ будет, очевидно, э. п. ядром на $Q' \times Q'$ и одновременно будет аналитическим продолжением F с $Q \times Q$ на $Q' \times Q'$.

Отсюда уже нетрудно получить предложение 8°.

Прим ним предложение 7° к тому случаю, когда $Q=(-\infty, \infty)$, а $F(p, q) \in \mathfrak{P}_Q$ имеет специальный вид.

$$F(p, q)=f(p-q).$$

Если функция $f(p-q)$ аналитична в окрестности точки $p=q=0$:

$$|z|<R, \quad |\zeta|<R,$$

то она будет аналитична в окрестности $|z-p|<R$, $|\zeta-p|<R$ любой точки диагонали $p=q$, а следовательно, и в окрестности $|z-p|<R$, $|\zeta-q|<R$ любой точки $p, q \in Q \times Q$.

Мы приходим, таким образом, к выводу, что если некоторая функция $f(z)$ $(-\infty<z<\infty)$ аналитична в круге $|z|<2R$ и $f(p-q) \in \mathfrak{P}_{(-\infty, \infty)}$, то она аналитична в полосе

$$|\operatorname{Im} z|<2R.$$

Это предложение хорошо известно см. [27, 16a]) и всегда доказывалось с помощью представления Бохнера функций $f(p-q) \in \mathfrak{P}_{(-\infty, \infty)}$:

$$f(p)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ip\lambda}\, d\sigma(\lambda),$$

где $\sigma(\lambda)$ $(-\infty<\lambda<\infty)$ — некоторая ограниченная неубывающая функция.

Наш метод доказательства позволяет обобщить это предложение на случай инвариантных э. п. ядер на любом однородном аналитическом многообразии (об этих понятиях см. § 3).

Очевидно также, что предложения 5°, 6°, 7° непосредственно обобщаются на тот случай, когда Q не интервал вещественной оси, а r раз диференцируемое или соответственно аналитическое многообразие.

§ 2. КОЛЬЦО $\mathfrak{R}_Q$*)

1. Неравенства

$$(x, x) \geqslant 0, \quad |(x, y)|^2 \leqslant (x, x)\,(y, y)$$

в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_F$ при $x = e_p$, $y = e_q$ дают неравенства

$$F(p, p) \geqslant 0, \quad |F(p, q)|^2 \leqslant F(p, p) \cdot F(q, q) \qquad (p, q \in Q).$$

Отсюда, в частности, следует, что э. п. ядро $F(p, q)$ $(p, q \in Q)$ ограничено, если оно ограничено на диагонали $p = q$.

Обозначим через $\mathfrak{P}_Q$ множество всех ограниченных непрерывных э. п. ядер на Q, а через $\mathfrak{R}_Q$ линейную комплексную оболочку этого множества.

Ядро $\Phi(p, q)$ $(p, q \in Q)$ будет, очевидно, принадлежать $\mathfrak{R}_Q$ в том и только том случае, если каждая из его эрмитовых компонент

$$\Phi^+(p, q) = \frac{1}{2}[\Phi(p, q) + \overline{\Phi(q, p)}], \quad \Phi^-(p, q) = \frac{1}{2i}[\Phi(p, q) - \overline{\Phi(q, p)}]$$

представима в виде разности двух функций из $\mathfrak{P}_Q$.

В силу известной теоремы Шура произведение двух функций из $\mathfrak{P}_Q$ снова принадлежит $\mathfrak{P}_Q$, следовательно, $\mathfrak{R}_Q$ — кольцо.

Введем в $\mathfrak{R}_Q$ норму.

Для $F \in \mathfrak{P}_Q$ положим

$$\|F\| = \sup_{p \in Q} F(p, p) = \sup_{p, q \in Q} |F(p, q)|.$$

Для любого эрмитового ядра $\Phi(p, q)$ $(= \overline{\Phi(q, p)})$ из $\mathfrak{R}_Q$ положим

$$\|\Phi\| = \inf\{\|F'\| + \|F''\|\},$$

где infimum распространяется на все пары $F', F'' \in \mathfrak{P}_Q$, такие, что $\Phi = F' - F''$.

Наконец, для ядра $\Phi \in \mathfrak{R}_Q$ общего вида положим

$$\|\Phi\| = \sup_{0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi} \|\Phi^+ \cos\alpha + \Phi^- \sin\alpha\|. \tag{2,1'}$$

Легко видеть, что так определенный функционал $\|F\|$ будет обладать всеми свойствами нормы:

1) $\|\Phi\| > 0$, если $\Phi \neq 0$.

2) $\|\lambda\Phi\| = |\lambda| \cdot \|\Phi\|$ (λ — комплексное число).

3) $\|\Phi + \Psi\| \leqslant \|\Phi\| + \|\Psi\|$.

Нетрудно также убедиться в том, что для любых двух ядер $\Phi, \Psi \in \mathfrak{R}_Q$ выполняется.

4) $\|\Phi\Psi\| \leqslant \sqrt{2}\,\|\Phi\| \cdot \|\Psi\|$,

---

* Результаты этого параграфа были получены нами ранее [9е, ж], причем теорема 1 была приведена без доказательства. Полноты ради мы излагаем здесь их снова.

при этом коэфициент $\sqrt{2}$ в этом неравенстве может быть заменен на 1, если, хотя бы одно из ядер Φ, Ψ эрмитово.

Оказывается, более того:

Теорема 2. *$\Re_Q$ — полное нормированное кольцо.*

Доказательство. Нам нужно показать, что если $\{\Phi_n\} \subset \Re_Q$ некоторая последовательность Коши, т. е.

$$\| \Phi_n - \Phi_m \| \to 0 \quad \text{при } m, n \to \infty, \tag{2,2}$$

то существует ядро $\Psi \in \Re_Q$, к которому эта последовательность сходится по рассматриваемой норме.

Последовательность $\{\Phi_n\}$ можно расщепить на две последовательности $\{\Phi_n^+\}$ и $\{\Phi_n^-\}$, каждая из которых вместе с данной будет последовательностью Коши. Если мы докажем, что каждая из этих двух последовательностей имеет предел в $\Re_Q$, то этим самым будет доказано, что и $\{\Phi_n\}$ имеет предел в $\Re_Q$. Поэтому, без ограничения общности, можно сразу предположить, что все ядра последовательности $\{\Phi_n\}$ эрмитовы.

Далее, без ограничения общности, мы можем предположить, что, вместо условия (2,2) выполняется более сильное условие:

$$\| \Phi_{n+1} - \Phi_n \| < \frac{1}{2^n} \qquad (n=1, 2 \ldots), \tag{2,3}$$

иначе этого можно было бы добиться, просеяв данную последовательность $\{\Phi_n\}$.

Согласно определению (2,1) неравенства (2,3) означают, что для каждого натурального n найдется такая пара $F_n^{(1)}, F_n^{(2)} \in \mathfrak{P}_Q$, что

$$\Phi_{n+1} - \Phi_n \equiv F_n^{(1)} - F_n^{(2)}, \; \sup_{p, q \in Q} | F_n^{(1)}(p, q)| + \sup_{p, q \in Q} | F_n^{(2)}(p, q)| < \frac{1}{2^n}. \tag{2,4}$$

Тогда

$$\Phi_n \equiv \Phi_1 + \sum_{k=1}^{n-1} F_k^{(1)} - \sum_{k=1}^{n-1} F_k^{(2)}. \tag{2,5}$$

В силу (2,4) имеют смысл функции

$$\Psi^{(1)}(p, q) = \sum_1^\infty F_k^{(1)}(p, q), \quad \Psi^{(2)}(p, q) = \sum_1^\infty F_k^{(2)}(p, q) \tag{2,6}$$

и, так как ряды, которые их определяют, равномерно сходятся и состоят из непрерывных э. п. ядер, то ядра $\Psi^{(1)}$ и $\Psi^{(2)}$ также принадлежат $\mathfrak{P}_Q$. Разложения (2,6) сходятся также по норме кольца $\Re_Q$, ибо

$$\left\| \Psi^{(i)} - \sum_1^n F_k^{(i)} \right\| \leqslant \left\| \sum_{n+1}^\infty F_k^{(i)} \right\| \leqslant \sum_{n+1}^\infty \| F_k^{(i)} \| \leqslant \sum_{n+1}^\infty \frac{1}{2^k} \qquad (i=1, 2).$$

А следовательно, в силу (2,5), последовательность $\{\Phi_n\}$ сходится в $\Re_Q$ к элементу $\Phi_1 + \Psi^{(1)} - \Psi^{(2)}$.

Теорема доказана.

Заметим, что, в силу наших определений, для эрмитова ядра $\Phi \in \Re_Q$

$$|\Phi(p,q)| \leqslant \|\Phi\| \qquad (p, q \in Q). \tag{2,7}$$

2. Обозначим через C_p (соответственно C_q) совокупность всех функций $\Phi \in \Re_Q$, зависящих только от p (соответственно только от q). Покажем, что C_p (равно как и C_q) совпадает с совокупностью всех непрерывных ограниченных функций на Q.

В самом деле, пусть, например, $\varphi(p)$ $(p \in Q)$ некоторая ограниченная непрерывная функция.

Полагая $\varphi(p, q) = \varphi(p) \quad (p, q \in Q)$ будем иметь:

$$\varphi^+(p, q) = \frac{1}{2}\{\varphi(p) + \overline{\varphi(q)}\} = \frac{[\mu + \varphi(p)]\,[\mu + \overline{\varphi(q)}]}{4\mu} - \frac{[\mu - \varphi(p)] \cdot [\mu - \overline{\varphi(q)}]}{4\mu}.$$

Так как при $\mu > 0$ каждая из написанных дробей имеет вид $\Phi(p) \cdot \overline{\Phi(q)}$ и, следовательно, принадлежит $\mathfrak{P}_Q$, то и $\varphi^+ \in \Re_Q$ и, кроме того

$$\|\varphi^+\| \leqslant \sup_{p \in Q} \frac{|\mu + \varphi(p)|^2}{4\mu} + \sup_{p \in Q} \frac{|\mu - \varphi(p)|^2}{4\mu} \leqslant \frac{1}{2\mu}[\mu + \sup_{p \in Q}|\varphi(p)|]^2.$$

Полагая здесь $\mu = \sup|\varphi(p)|$, найдем, что

$$\|\varphi^+\| = \frac{1}{2}\|\varphi(p) + \overline{\varphi(q)}\| \leqslant 2 \sup_{p \in Q}|\varphi(p)|.$$

Аналогично показывается что и

$$\varphi^-(p, q) = \frac{1}{2i}\{\varphi(p) - \overline{\varphi(q)}\} \in \Re_Q .$$

Но тогда и $\varphi = \varphi^+ + i\varphi^- \in \Re_Q$ и согласно (2,1) и (2,2)

$$\|\varphi\| = \max_{\alpha}\|\cos\alpha \cdot \varphi^+ + \sin\alpha \cdot \varphi^-\| =$$

$$= \max_{\alpha}\left\|\frac{1}{2}\{e^{-i\alpha}\varphi(p) + e^{-i\alpha}\varphi(q)\}\right\| \leqslant 2 \sup_{p \in Q}|\varphi(p)|.$$

Замечая еще, что согласно (2,7)

$$|\varphi(p)| = |\varphi^+(p, q) + i\varphi^-(p, q)| \leqslant |\varphi^+(p, q)| +$$
$$+ |\varphi^-(p, q)| \leqslant \|\varphi^+\| + \|\varphi^-\| \leqslant 2\|\varphi\|,$$

мы находим, что

$$\frac{1}{2}\sup_{p \in Q}|\varphi(p)| \leqslant \|\varphi\| \leqslant 2 \sup_{p \in Q}|\varphi(p)|.$$

Таким образом, мы доказали

1°. Подкольцо $C_p \subset \Re_Q$ совпадает с кольцом всех непрерывных ограниченных функций на Q и заданная в нем норма топологически эквивалентна равномерной норме.

3. Случай, когда Q — компакт. Пусть R — некоторое нормированное кольцо. Линейный ограниченный функционал $\Gamma(x)$ в $\mathfrak{R}_R$ называется мультипликативным, если для любых $x, y \in R$

$$\Gamma(x, y) = \Gamma(x) \cdot \Gamma(y).$$

Найдем все мультипликативные функционалы Γ в $\mathfrak{R}_Q$ в предположении, что Q компакт.

Функционал Γ порождает в подкольцах C_p и C_q мультипликативные функционалы Γ_1 и Γ_2.

По известной теореме Стона ([31], см также [7]), мультипликативный функционал в кольце всех непрерывных функций на компакте Q представляет собой значение функции в какой-либо точке компакта. Поэтому Γ_1 и Γ_2 соответствуют точки $p_0 \in Q$ и $q_0 \in Q$ такие, что $\Gamma_1(\varphi) = \varphi(p_0)$ при $\varphi \in C_p$ и $\Gamma_2(\varphi) = \varphi(q_0)$ при $\varphi \in C_q$.

Пусть теперь F—некоторое ядро из $\mathfrak{P}_Q$. Согласно § 1 оно будет допускать равномерно сходящееся на $Q \times Q$ разложение:

$$F(p, q) = \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_j(p)\, \overline{\Phi_j(q)}.$$

Это разложение сходится также и по норме в $\mathfrak{R}_Q$, ибо

$$\left\| F(p, q) - \sum_{1}^{n} \Phi_j(p)\, \overline{\Phi_j(q)} \right\| = \left\| \sum_{n+1}^{\infty} \Phi_j(p)\, \overline{\Phi_j(q)} \right\| = \sup_{p \in Q} \sum_{n+1}^{\infty} |\Phi_j(p)|^2 \to 0$$

при $n \to \infty$.

В силу линейности, непрерывности и мультипликативности функционала Γ будем иметь

$$\Gamma(F) = \sum_{j=1}^{\infty} \Gamma[\Phi_j(p)\, \overline{\Phi_j(q)}] = \sum_{j=1}^{\infty} \Gamma_1(\Phi_j)\, \Gamma_2(\overline{\Phi}_j) =$$

$$= \sum_{j=1} \Phi_j(p_0)\, \overline{\Phi_j(q_0)} = F(p_0, q_0).$$

А так как $\mathfrak{R}_Q$ есть линейная оболочка $\mathfrak{P}_Q$, то для любого ядра $\Phi \in \mathfrak{R}_Q$

$$\Gamma(\Phi) = \Phi(p_0, q_0). \tag{2,8}$$

Мы получили общий вид мультипликативного функционала в $\mathfrak{R}_Q$, ибо, очевидно, и обратно, выбирая произвольную точку $(p_0, q_0) \in Q \times Q$ и определяя Γ с помощью (2,8), мы получим мультипликативный функционал.

Пусть R — некоторое кольцо функций $\varphi(x)$ (с обычным определением умножения), определенных на некотором множестве X. Такое кольцо мы будем называть аналитически полным, если вместе с $\varphi \in R$ также и $f(\varphi) \in R$, где $f(z)$ — произвольная функция, определенная и голоморфная в некотором конечном числе непересекающихся областей, сумма которых покрывает замыкание множества значений функции φ.

В теории нормированных колец И. М. Гельфанда [4а, 7] доказывается, что если X компакт, а R — некоторое нормированное кольцо непрерывных функций, содержащее вместе с каждой функцией $\varphi(x)$ также и функцию $\overline{\varphi}(x)$, то оно будет аналитически полным в том и только том случае, когда любой мультипликативный функционал Γ в R есть значение в некоторой точке $x_0 \in X : \Gamma(\varphi) = \varphi(x_0)$.

Так как кольцо $\mathfrak{R}_Q$, очевидно, всегда обладает свойством, что если $\Phi \in \mathfrak{R}_Q$, то и $\overline{\Phi} \in \mathfrak{R}_Q$, то мы убеждаемся в справедливости следующей теоремы

Теорема 3. *Если Q — компакт, то кольцо $\mathfrak{R}_Q$ аналитически полно.*

4. Нам понадобится следующая

Лемма*). *Пусть B — некоторое хаусдорфово бикомпактное пространство, а R — некоторое подкольцо кольца непрерывных функций на R, обладающее следующими свойствами:*

1) *Если $\varphi \in R$, то и $\overline{\varphi} \in R$.*

2) *Если $\varphi \in R$ и $\varphi(p) > 0$ $(p \in B)$, то $\varphi^{-1} \in R$.*

3) *Для каждой точки $p_0 \in B$ и ее окрестности $U_0 \in B$ найдется функция $\varphi \in R$ такая, что $\varphi(p_0) \neq 0$ и $\varphi(p) = 0$, при $p \overline{\in} U_0$.*

Тогда, для того чтобы некоторая функция $\psi(p)$ принадлежала R, достаточно, чтобы она локально принадлежала R, т. е., чтобы для каждой точки $p_0 \in R$ существовала бы такая ее окрестность U_0 и такая функция $\varphi_0 \in R$, что $\psi(p) = \varphi_0(p)$ при $p \in U_0$.

Доказательство. Пусть $F \subset B$ некоторое замкнутое, а $G \subset B$ — некоторое открытое множества и $F \subset G$. Для каждой точки $p \in F$ найдутся согласно условию 3) теоремы некоторая ее окрестность U_p и функция $\varphi_p \in R$ такие, что $\varphi_p(p) \neq 0$ и $\varphi_p(q) = 0$ для $q \overline{\in} U_p$. Пусть $V_p \subset U_p$ такая окрестность точки p, что $|\varphi_p(q)|^2 > 0$ для $q \in V_p$. Так как $F \subset B$ бикомпактно, то найдутся точки $p_1, p_2, \ldots, p_r$, такие, что $F \subset \sum_{k=1}^{n} F_{p_k}$. Положим

$$\chi_{FG}(p) = \sum_{l=1}^{n} |\varphi_{p_l}(q)|^2.$$

В силу условия 1) теоремы эта неотрицательная функция принадлежит R. Очевидно,

$$\chi_{FG}(p) > 0 \text{ для } p \in F \text{ и } \chi_{FG}(p) = 0 \text{ для } p \overline{\in} G.$$

*) Впервые эту лемму автор установил в своей заметке [9e]. Одновременно с ним это предложение в другой форме было получено Г. Е. Шиловым [19].

По условию теоремы, для каждой точки $q \in B$ существуют такая ее окрестность W_q и функция $\varphi_q \in R$, что $\varphi_q(p) = \psi(p)$ для $p \in W_q$. Построим для каждой точки $q \in B$ такую ее окрестность W'_q, что $\overline{W'_q} \subset W_q$.

Выберем точки $q_1, \ldots, q_m$ так, чтобы $B = \sum_{i=1}^{m} \overline{W'_{q_i}}$. Положим затем

$$F_i = W'_{q_i}, \quad G_i = W_{q_i} \text{ и } \chi_i = \chi_{F_i G_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

Так как $B = \Sigma F_i$, то функция

$$\chi(p) = \chi_1(p) + \ldots + \chi_m(p) > 0 \quad \text{при } p \in B.$$

Следовательно, в силу условия 3):

$$\omega_i = \frac{\chi_i}{\chi} \in R \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Так как

$$\Sigma\omega_i = 1, \ \omega_i(p) = 0 \text{ при } p \overline{\in} G_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

то

$$\psi(p) = \sum_{i=1}^{m} \psi(p)\,\omega_i(p) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_{q_i}(p)\,\omega_i(p) \in R.$$

Лемма доказана.

Теорема 4. *Если Q — компакт, то для того чтобы некоторое ядро $\Phi(p, q)$ $(p, q \in Q)$ принадлежало $\mathfrak{R}_Q$, достаточно, чтобы оно как функция на $Q \times Q$ локально принадлежало $\mathfrak{R}_Q$.*

Доказательство. Кольцо $\mathfrak{R}_Q$ есть кольцо непрерывных функций на компакте $B = Q \times Q$. Условия 1) и 2) леммы (в силу теоремы 2) для него выполняются. Проверим для него выполнение условия 3).

Пусть (p_0, q_0) произвольная точка из $Q \times Q$, а W — некоторая ее окрестность. Тогда всегда найдутся две окрестности $U \subset Q$ и $V \subset Q$ соответственно точкам p_0 и q_0, такие, что $W \subset U \times V$. Образуем какие-либо непрерывные функции $\varphi(p)$ и $\psi(p)$ такие, что $\varphi(p_0) \neq 0$, $\psi(q_0) \neq 0$ и $\varphi(p) = 0$ при $p \overline{\in} U$; $\psi(q) = 0$ при $q \overline{\in} V$.

Тогда ядро

$$\Phi(p, q) = \varphi(p)\,\overline{\psi(q)}$$

будет удовлетворять условиям

$$\Phi(p_0, q_0) \neq 0, \ \ \Phi(p, q) = 0 \text{ при } (p, q) \overline{\in} W,$$

а так как

$$\varphi(p) \in C_p \subset \mathfrak{R}_Q, \ \ \psi(q) \in C_q \subset \mathfrak{R}_Q,$$

то и $\Phi \in \mathfrak{R}_Q$. Теорема доказана.

§ 3. ИНВАРИАНТНЫЕ ЭРМИТОВО-ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ НА ОДНОРОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Предположим, что Q — однородное топологическое пространство, т. е. что на Q задана транзитивная топологическая группа гомеоморфных преобразований G; элементы этой группы будем обозначать буквами $s, t, \dots$.

Если $q \in Q$ и $s \in G$, то через sq обозначается точка из Q, в которую переходит точка q при гомеоморфизме s.

По определению sq есть непрерывная функция на $Q \times G$.

Ядро $\Phi(p, q)$ $(p, q \in Q)$ называется **инвариантным**, если для любого $s \in G$

$$\Phi(sp, sq) = \Phi(p, q).$$

В частности, для инвариантного ядра $\Phi(sp, sp) = \Phi(p, p)$ $(s \in G)$, и в силу транзитивности группы G

$$\Phi(p, p) \equiv \text{const}.$$

Припоминая предложения 1°, 2° § 1 легко убедиться в справедливости:

1°. *Для того чтобы э. п. инвариантное ядро $F(p, q)$ было непрерывной функцией на $Q \times Q$, достаточно, чтобы при каком-либо $p_0 \in Q$ функция от q: $F(p_0, q)$ $(q \in Q)$ была непрерывна в точке $q = p_0$.*

В самом деле, если при некотором $p = p_0$ функция $F(p_0, q)$ от q непрерывна в точке $q = p_0$, то это же будет иметь место для любого иного $p_1 \in Q$, ибо если $s \in G$ выбрано так, что $p_1 = sp_0$, то $F(p_1, q) = F(p_0, s^{-1}q)$ и, если q лежит в „достаточно малой“ окрестности U точки p_1, то $s^{-1}q$ лежит в конгруентной „достаточно малой“ окрестности $s^{-1}U$ точки p_0. Так как, кроме того, $F(p, p) = \text{const}$, то все условия предложения 1° § 1 выполнены.

Очевидно также, *что непрерывность на $Q \times Q$ инвариантного э. п. ядра F влечет его равномерную непрерывность на $Q \times Q$.*

2. Пусть $F(p, q)$ $(p, q \in Q)$ некоторое непрерывное инвариантное э. п. ядро на однородном пространстве Q.

Так же, как и в § 1, введем в рассмотрение пространство $\mathfrak{H}_F$. Каждому $s \in G$ отнесем оператор U_s в $\mathfrak{H}_F$, который мы определим следующим образом. Для всякого элемента $x \in \mathfrak{H}_F$ вида:

$$x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_{p_j},$$

где $p_1 \in Q, \dots, p_n \in Q$; $\xi_1, \dots, \xi_n$ — комплексные числа, $n = 1, 2, \dots$, положим

$$U_s x = \Sigma \xi_j e_{sp_j}.$$

Тогда

$$(U_s x,\ U_s x) = (x, x) = \sum_{i,k=1}^{n} F(p_j p_k)\, \xi_j \bar{\xi}_k.$$

Последнее показывает, что оператор U_s определен однозначно на L (линейной оболочке всех $e_p\,(p \in Q)$) и что он на L изометричен; так как L плотно в $\mathfrak{H}_F$, то оператор U_s однозначно расширяется до изометрического оператора, определенного на всем $\mathfrak{H}_F$. Область значений оператора U_s содержит любой вектор $e_p\,(p \in Q)$, ибо $e_p = U_s e_{s^{-1}p}$, а следовательно, содержит и все L, и стало быть, совпадает с $\mathfrak{H}_F$. Таким образом, U_s — унитарный оператор.

Геометрически полученный результат можно пояснить следующим образом:

Отображение $p \to e_p$ отображает непрерывно Q в некоторую часть $\mathfrak{S}$ гиперсферы $\|x\| = R$ пространства $\mathfrak{H}_F$, где $R = (e_p, e_p) = F(p, p) = \text{const}$. „Движение“ s в Q порождает унитарный поворот U_s куска $\mathfrak{S}$ гиперсферы в самом себе, а так как линейная замкнутая оболочка $\mathfrak{S}$ дает все $\mathfrak{H}_F$, то этим самым порождается унитарный поворот всего $\mathfrak{H}_F$.

2°. Отображение $s \to U_s$ есть непрерывное унитарное представление группы G.

В самом деле, для любого $p \in Q$:

$$U_s U_t e_p = U_s e_{tp} = e_{stp} = U_{st}\, e_p \qquad (s, t \in G).$$

Таким образом, для любого $x = e_p \quad (p \in Q)$:

$$U_s U_t x = U_{st} x \qquad (s, t \in G),$$

но тогда это равенство справедливо для любого $x \in L$ и так как $\bar{L} = \mathfrak{H}_F$, то для любого $x \in \mathfrak{H}_F$. Следовательно,

$$U_s U_t = U_{st} \qquad (s, t \in G).$$

Осталось доказать непрерывность представления $s \to U_s$. Последнее означает, что для любого $x \in \mathfrak{H}_F$ выражение $U_s x$ есть непрерывная вектор-функция аргумента $s \in G$.

Для этого заметим, что при $x = e_p\ (p \in Q)$:

$$\|U_s e_p - U_t e_p\|^2 = \|e_{sp} - e_{tp}\|^2 = 2F(p, p) - 2\operatorname{Re} F(sp, tp) =$$
$$= 2F(p, p) - 2\operatorname{Re} F(t^{-1} sp, p),$$

и следовательно, это выражение сколь угодно мало, если t лежит в „достаточно малой“ окрестности s, т. е. $t^{-1} s$ лежит в достаточно малой окрестности единицы e группы.

Из непрерывности вектор-функции $U_s e_p$ следует непрерывность вектор-функции $U_s x$ при любом $x \in L$. А так как для любого $x \in \mathfrak{H}_F$ найдется последовательность $\{x_n\} \subset L$, такая, что $x_n \to x$, и при этом вектор-функция $U_s x$ будет равномерным пределом относительно $s \in G$

вектор-функций $U_s x_n$ $(n=1, 2, \ldots)$, то отсюда получается непрерывность $U_s x$ $(s \in G)$ при любом $x \in \mathfrak{H}_F$.

Предложение 2° доказано.

Замечание. Напомним (см. п. 4, § 1), что пространство $\mathfrak{H}_F$ может быть реализовано в виде пространства функций $\mathfrak{H}_F(q)$, если „изображать" всякий элемент $f \in \mathfrak{H}_F$ функцией

$$f(q) = (f, e_q).$$

При такой реализации $\mathfrak{H}_F$ унитарный оператор U_s будет определяться равенством:

$$U_s f(q) = f(s^{-1} q),$$

ибо

$$(U_s f, e_q) = (f, U_s^{-1} e_q) = (f, U_{s^{-1}} e_q) = (f, e_{s^{-1}q}) = f(s^{-1} q).$$

3. Изображение унитарных операторов U_s унитарными матрицами может быть получено следующим образом.

Согласно п. 2, § 1 ядро $F(p, q)$ допускает сходящееся разложение

$$F(p, q) = \sum_{\nu \in N} \Phi_\nu(p) \overline{\Phi_\nu(q)} \qquad (p, q \in Q)$$

с ω-линейно независимыми функциями Φ_ν $(\nu \in N)$.

В силу инвариантности ядра F из (3,1) следует, что при любом $s \in G$:

$$F(p, q) = \sum_{\nu \in N} \Phi_\nu(sp) \overline{\Phi_\nu(sq)} \qquad (p, q \in Q).$$

Функции $\Phi_\nu(sp)$ $(\nu \in N)$, очевидно, также ω-линейно независимы, а поэтому согласно предложению 3° § 1

$$\Phi_\nu(sp) = \sum_{\mu \in N} u_{\nu\mu}(s) \Phi_\mu(p) \qquad (\nu \in N),$$

где $\mathfrak{A}(s) = \| u_{\nu\mu}(s) \|$ — некоторая унитарная матрица.

Очевидно $\mathfrak{A}(s)$ есть унитарное представление группы G:

$$\mathfrak{A}(st) = \mathfrak{A}(s)\mathfrak{A}(t) \qquad (s, t \in G).$$

Легко видеть, что представление $\mathfrak{A}(s)$ есть матричное изображение представления U_s в том смысле, что, если в $\mathfrak{H}_F$ выбрать соответствующий базис, то оператор U_s изобразится матрицей $\mathfrak{A}(s)$.

4. Конечную или бесконечную последовательность непрерывных функций $\{\Phi_j(p)\}$ $(j \in N)$, заданных на однородном сепарабельном пространстве Q, будем называть *ортоинвариантной*, если для нее выполняются два условия:

1) при любом $p \in Q$

$$\sum_{\in N} |\Phi_j(p)|^2 < \infty, \tag{3,1}$$

2) для любого $s \in G$

$$\Phi_j(sp) = \sum_{k \in N} u_{jk}(s)\, \Phi_k(p) \qquad (j \in N), \tag{3,2}$$

где $\|u_{jk}(s)\|$ — некоторая унитарная матрица.

Покажем, что

3°. Всякая ортоинвариантная система $\{\Phi_j(p)\}$ порождается некоторым непрерывным инвариантным э. п. ядром $F(p, q)$.

В самом деле, в силу (3,1) имеет смысл определение

$$F(p, q) = \sum_{j \in N} \Phi_j(p)\, \overline{\Phi_j(q)}. \tag{3,3}$$

Очевидно, ядро F эрмитово-положительно. В силу (3,2) оно инвариантно. Остается показать его непрерывность, когда $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Для этого согласно предложению 1° этого параграфа достаточно доказать его непрерывность по переменной q при фиксированном p. Это следует из равномерной сходимости разложения (3,3) относительно q при фиксированном p. Последнее ж вытекает из неравенства:

$$\left| F(p, q) - \sum_1^n \Phi_j(p)\, \overline{\Phi_j(q)} \right| \leqslant \left(\sum_{n+1}^{\infty} |\Phi_j(p)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n+1}^{\infty} |\Phi_j(q)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant c \left(\sum_{n+1}^{\infty} |\Phi_j(p)|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

где c есть значение F на диагонали $(F(q, q) = c, \quad q \in Q)$.

Предложение 3° доказано.

§ 4. ЗОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Для двух ядер $\Phi_1(p, q)$ и $\Phi_2(p, q)$ $(p, q \in Q)$ условимся писать

$$\Phi_1 \prec \Phi_2 \quad \text{или} \quad \Phi_2 \succ \Phi_1,$$

если разность $\Phi_2 - \Phi_1$ есть э. п. ядро.

Нам понадобятся следующие простые предложения:

1°. Если $F(p, q)$ — э. п. ядро, а $\mathfrak{H}_F$ — соответствующее ему гильбертово пространство, то ядро $\Phi(p, q)$ $(p, q \in Q)$ будет удовлетворять условию

$$-F \prec \Phi \prec F \tag{4,1}$$

в том и только том случае, если в $\mathfrak{H}_F$ существует эрмитов оператор A с нормой $\leqslant 1$ такой, что

$$\Phi(p, q) = (Ae_p, e_q) \quad (p, q \in Q).$$

В самом деле, определим на линейной оболочке L всех векторов $\{e_p\}$ билинейный эрмитов функционал $A(x, y)$, полагая, для любых

$$x = \sum \xi_j e_{p_j}, \quad y = \sum \eta_k e_{q_k}$$

из L

$$A(x, y) = \sum \Phi(p_j, q_k) \xi_j \bar{\eta}_k.$$

Неравенство (4,1) выражает, что для $x = \Sigma \xi e_{p_j}$

$$|A(x, x)| \leqslant \sum F(p_j, p_k) \xi_j \bar{\xi}_k = (x, x).$$

Иными словами, (4,1) означает, что на L функционал $A(x, y)$ непрерывен и, более того, имеет норму $\|A\| \leqslant 1$. Следовательно, он однозначно расширяется с сохранением непрерывности и нормы на все $\bar{L} = \mathfrak{H}_F$ и, по известной теореме, ему соответствует такой эрмитов оператор A с той же нормой, что $A(x, y) = (Ax, y)$, и, следовательно:

$$(Ae_p, e_q) = A(e_p, e_q) = \Phi(p, q).$$

Очевидно также, что и обратно, если нам задан в $\mathfrak{H}_F$ произвольный эрмитов оператор A с $\|A\| \leqslant 1$, то, полагая

$$\Phi(p, q) = (Ae_p, e_q) \qquad (p, q \in Q),$$

мы получим ядро, удовлетворяющее условию (4,1).

В качестве следствия 1°, получаем:

2°. Если э. п. ядро F непрерывно на $Q \times Q$, а Φ удовлетворяет условию $-F \prec \Phi \prec F$, то и ядро Φ непрерывно на $Q \times Q$.

В самом деле, если F непрерывно, то e_p $(p \in Q)$, а с ним и Ae_p суть непрерывные вектор-функции на Q. Но тогда и скалярное произведение $\Phi(p, q) = (Ae_p, e_q)$ непрерывно на $Q \times Q$.

2. Пусть теперь Q и G будут такими же, как и в § 3.

3°. Если $F(p, q)$ — инвариантное э. п. ядро, а $\mathfrak{H}_F$ — соответствующее ему гильбертово пространство, то оператор A, соответствующий ядру Φ, удовлетворяющему условию (4,1), будет коммутировать со всеми операторами U_s в том и только том случае, если Φ инвариантное ядро.

В самом деле, если $AU_s = U_s A$ $(s \in G)$, то

$$\Phi(sp, sq) = (Ae_{sp}, e_{sq}) = (AU_s e_p, U_s e_q) = (U_s^{-1} AU_s e_p, e_q) = (Ae_p, e_q) = \Phi(p, q).$$

Обратно, если $\Phi(sp, sq) = \Phi(p, q)$ $(p, q \in Q,\ s \in G)$, то мы найдем, что

$$(AU_s e_p, U_s e_q) = (Ae_p, e_q),$$

а отсюда легко заключить, что для всех $x, y \in L$, а значит, вообще для всех $x, y \in \mathfrak{H}_F$

$$(AU_s x,\ U_s y) = (Ax, y),$$

откуда

$$U_s^{-1} A U_s = A \quad (s \in G).$$

3. Как известно, унитарное представление $s \to U_s$ некоторой группы G называется **приводимым**, если в пространстве $\mathfrak{H}$, в котором действуют унитарные представления, имеется хотя бы одно правильное подпространство $\mathfrak{M}$, инвариантное по отношению ко всем операторам U_s ($U_s\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$, $s \in G$).

Заметим, что если $\mathfrak{M}$ инвариантно по отношению ко всем $U_s (s \in G)$, то и $\mathfrak{N} = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}$ обладает этим свойством, ибо, если $\mathfrak{H} = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}$, то $\mathfrak{H} = U_s\mathfrak{H} = U_s\mathfrak{M} \oplus U_s\mathfrak{N}$ $(s \in G)$ и $U_s\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$ $(s \in G)$ влечет $U_s\mathfrak{M} = \mathfrak{M}, U_s\mathfrak{N} = \mathfrak{N} (s \in G)$.

Последние же равенства эквивалентны также тому, что оператор P проектирования на $\mathfrak{M}$ перестановочен с U_s

$$PU_s = U_s P \quad (s \in G).$$

Обозначим через $\mathfrak{P}_{QG}$ совокупность всех инвариантных непрерывных э. п. ядер $F(p, q)$.

Ядро $Z \in \mathfrak{P}_{QG}$ будем называть **зональным**, если:

1) оно нормировано, т. е. $Z(p, p) \equiv 1$.

2) из соотношения $0 \prec \Phi \prec Z$, где Φ — инвариантное ядро, вытекает $\Phi = \lambda Z$, где λ — скаляр.

Имеет место

Теорема 5. *Для того чтобы нормированное ядро $Z \in \mathfrak{P}_{QG}$ было зональным, необходимо и достаточно, чтобы соответствующее ему унитарное представление U_s было неприводимым.*

Доказательство. В самом деле, если представление U_s приводимо, то найдется оператор проектирования $P(\neq 0, I)$ такой, что

$$PU_s = U_s P \quad (s \in G).$$

Полагая тогда

$$\Phi(p, q) = (Pe_p, e_q),$$

мы получим э. п. ядро (ибо P — положительный оператор) и для него $Z \succ \Phi$ (так как $\|P\| = 1$). При этом ни при каком скаляре λ невозможно равенство $\Phi = \lambda Z$, ибо оно равносильно равенству

$$(Pe_p, e_q) = \lambda(e_p, e_q) \quad (p, q \in Q),$$

которое влечет

$$(Px, y) = \lambda(x, y) \quad (x, y \in \mathfrak{H}_z), \quad P = \lambda I, \quad \lambda \neq 0, 1,$$

что противоречит предположению $P \neq \Theta, I$.

Обратно, если Z — не зональное ядро, то представление U_s, ему соответствующее, приводимо. В самом деле, пусть инвариантное ядро Φ удовлетворяет неравенству $0 \prec \Phi \prec Z$ и ни при каком λ $\Phi \neq \lambda Z$-

Согласно 1°, 3° найдется положительный эрмитов оператор A, действующий в $\mathfrak{H}_z$ и такой, что

$$\Phi(p, q) = (Ae_p, e_q) \quad (p, q \in Q), \quad AU_s = U_s A \ (s \in G)$$

и

$$\|A\| \leqslant 1.$$

Для этого оператора равенство $A = \lambda I$ исключается, ибо оно влечет равенство $\Phi(p, q) = \lambda Z(p, q)$ $(p, q \in Q)$.

Поэтому в спектральном разложении

$$A = \int_0^1 \lambda dE(\lambda)$$

оператора A спектральная функция $E(\lambda)$ хотя бы при одном значении

$$\lambda = \lambda_0 \quad (0 < \lambda_0 < 1)$$

отлична от Θ и I. Положим $P = E(\lambda_0)$. Так как все U_s перестановочны с A, то они перестановочны и с $E(\lambda)$, а значит и с P.

Таким образом, представление U_s приводимо.

Теорема доказана.

4°. Основная задача в теории зональных ядер заключается в доказательстве того, что всякое ядро $F \in \mathfrak{P}_{QG}$ может быть в определенном смысле „собрано" из зональных функций.

Руководящей идеей здесь является геометрический факт, что всякая точка выпуклого множества K является центром тяжести некоторого обложения массами крайних точек K.

Поясним, что крайней точкой выпуклого множества K, заданного в некотором линейном множестве, называется такая его точка a, которая не является промежуточной точкой никакого отрезка, принадлежавщего K, т. е. не представима в виде

$$a = \lambda b + (1 - \lambda) c,$$

где $b, c \in K$, $b \neq c$, $0 < \lambda < 1$.

Сформулированному выше геометрическому предложению можно придать совершенно точный смысл, когда K есть выпуклый компакт n-мерного пространства.

Ему удалось придать также точный смысл, когда K есть регулярно выпуклое ограниченное множество пространства E^*, сопряженного к некоторому банаховому пространству (см. [13]).

С другой стороны, если обозначить через Π выпуклое множество всех нормированных ядер $F \in \mathfrak{P}_{QG}$ (т. е. удовлетворяющих условию $F(p, p) \equiv 1$), то легко видеть, что данное нами определение зонального ядра $Z(p, q)$ эквивалентно следующему:

Ядро $Z(p, q) \in \mathfrak{P}_{QG}$ называется зональным, если оно является крайней точкой „выпуклого сечения Π конуса $\mathfrak{P}_{QG}$".

Во многих случаях удается показать, что конус $\mathfrak{P}_{QG}$ является регулярно выпуклым конусом пространства E^*, сопряженного к некоторому банаховому пространству E, а H его регулярно выпуклым сечением, и таким образом выполняются условия применимости геометрической теоремы о крайних точках. В следующем параграфе иллюстрация этому будет дана на примере, когда Q — дискретное пространство.

Там же мы укажем на еще одну трудность, которую приходится преодолевать, если желательно получить „достаточно хорошее" (мы вынуждены здесь недостаточно ясно выражаться) интегральное представление любого ядра из $\mathfrak{P}_{QG}$ через зональные ядра.

Подчеркнем, кроме того, что если мы желаем получить указанным путем интегральное представление любого ядра $F \in \mathfrak{P}_{QG}$ для случая заданного конкретного однородного пространства Q, то предварительно приходится разыскивать все зональные ядра Z, а это, вообще говоря, задача нелегкая.

Однако во многих случаях удается раньше найти интегральное представление произвольного ядра $F \in \mathfrak{P}_{QG}$, а отсюда уже получить все зональные ядра.

Подробней это означает следующее. Представим себе, что нам удалось найти некоторый набор ядер $Z(p, q; t) \in \mathfrak{P}_{QG}$, где t пробегает некоторое топологическое пространство T, обладающих тем свойством, что при любых фиксированных $p, q \in Q$ ядро $Z(p, q; t)$ есть непрерывная функция на T, и, главное, что любое ядро $F \in \mathfrak{P}_{QG}$ представимо единственным образом в виде:

$$F(p, q) = \int_T Z(p, q; t) \; d\sigma(t), \tag{4,2}$$

где $\sigma(\mathscr{E})$ — некоторая ограниченная, неотрицательная, вполне аддитивная нормированная *) функция борелевских множеств из T.

Очевидно тогда, что ядра $Z(p, q; t)$ $(t \in T)$ и будут всеми зональными ядрами на Q, так как всякое другое нормированное ядро F, которому отвечает распределение масс $\sigma(\mathscr{E})$, не сосредоточенных в одной точке, можно будет представить в виде

$$F(p, q) = \alpha_1 F_1(p, q) + \alpha_2 F_2(p, q) \quad (\alpha_1 + \alpha_2 = 1),$$

где

$$\alpha_1 = \int_{T_1} d\sigma(t) > 0, \quad \alpha_2 = \int_{T_2} d\sigma(t) > 0, \tag{4,3}$$

$$F_1(p, q) = \frac{1}{\alpha_1} \int_{T_1} Z(p, q; t) \, d\sigma(t), \;\; F_2(p, q) = \frac{1}{\alpha_1} \int_{T_2} Z(p, q; t) \, d\sigma(t),$$

а $T = T_1 \dot{+} T_2$ — любое разложение T на непересекающиеся борелевские части, удовлетворяющие условию (4,3); при этом в силу единственности представления (4,2) ядра F_1 и F_2 будут линейно независимы.

---

*) Вместо термина „нормированная" иногда употребляется термин „регулярная". Нормированность аддитивной функции $\sigma(\mathscr{E})$ означает, что для каждого борелевского множества $\mathscr{E}$

$$\sigma(\mathscr{E}) = \inf \sigma(O),$$

где infimum распространяется на все открытые множества $O \subset T$, содержащие $\mathscr{E}$.

Проиллюстрируем это на примерах.

5. В примерах, которые мы будем рассматривать, Q будет конечномерным или бесконечномерным пространством постоянной кривизны, а G — группой всех его твердых движений. В этом случае, пара точек $p, q \in Q$ будет конгруентной паре $p_1, q_1 \in Q$ (т. е. найдется такое $s \in G$, что $p_1 = sp$, $q_1 = sq$), если расстояния между точками этих пар будут равны: $r(p, q) = r(p_1, q_1)$. Следовательно, ядро $F(p, q)$ $(p, q \in Q)$ будет непрерывным инвариантным ядром в том и только том случае, если оно будет непрерывной функцией расстояния $r(p, q)$, т. е. будет иметь вид

$$F(p, q) = f(r(p, q)),$$

где $f(r)$ — непрерывная функция, определенная в открытом справа интервале $(0, \infty)$, если Q неположительной кривизны, и в замкнутом интервале $(0, D)$, если Q — положительной кривизны, при этом $D = \max r(p, q)$.

Рассмотрим отдельные частные случаи:

а) Q — n-мерное эвклидово пространство: $Q = E_n$.

Как показал Я. Шенберг [30], непрерывной функции $f(r)$ $(0 \leqslant r < \infty)$ будет отвечать э. п. ядро $f(r(p, q))$ на E_n в том и только том случае, если она допускает представление

$$f(r) = \int_0^\infty \Omega(\lambda r)\, d\sigma(\lambda) \qquad (0 \leqslant r < \infty), \tag{4,4}$$

где

$$\Omega_n(r) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{2}{r}\right)^{\frac{1}{2}(n-2)} J_{\frac{1}{2}(n-2)}(r) = 1 - \frac{r^2}{2n} + \frac{r^4}{2 \cdot 4\, m(m+2)} - \dots,$$

а $\sigma(\lambda)$ $(0 \leqslant \lambda < \infty)$ — некоторая ограниченная неубывающая функция.

При нормировке функции σ:

$$\sigma(0) = 0, \quad \sigma(\lambda - 0) = \sigma(\lambda) \quad (0 < \lambda < \infty)$$

представление (4,4) единственно.

Следовательно, согласно сказанному в п. 4 ядра

$$\Omega_n(\lambda r(p, q)) \quad (0 \leqslant \lambda < \infty)$$

составляют полную совокупность всех зональных ядер на E_n.

В частности, в случае обычной двухмерной плоскости $(n = 2)$ зональными функциями будут функции

$$J_0(\lambda r(p, q)) \quad (0 \leqslant \lambda < \infty).$$

Известная теорема сложения для функций Бесселя тотчас же приводит к ортоинвариантной системе, соответствующей ядру

$$J_0(\lambda r) \quad (\lambda > 0)\,^{*}).$$

*) При $\lambda = 0$, $J_0(\lambda r) \equiv 1$; на любом однородном пространстве Q имеется тривиальное зональное ядро $Z(p, q) \equiv 1$. Ему отвечает тривиальное представление группы G в одномерном пространстве, относящее $s \in G$ единицу.

В самом деле, если на плоскости E_2 ввести полярную систему координат и обозначить через r_p полярный радиус, а через φ_p полярный угол точки p, то

$$r(p,q)=\sqrt{r_p^2+r_q^2-2r_pr_q\cos(\varphi_p-\varphi_q)}$$

и по известной формуле

$$J_0(\lambda r(p,q))=\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} J_\mu(\lambda r_p)J_\mu(\lambda r_q)e^{\mu i(\varphi_p-\varphi_q)}$$

$$(J_{-\mu}=J_\mu;\quad \mu=0,1,2,\ldots).$$

Замечая еще, что функции

$$J_\mu(\lambda r_p)e^{\mu i\varphi_p}\quad (\mu=0,\pm 1,\pm 2,\ldots) \tag{4,5}$$

очевидным образом ω-линейно независимы, заключаем, что они составляют ортоинвариантную систему, соответствующую ядру $J_0(\lambda r(p,q))$.

Простым ортогональным преобразованием мы можем преобразовать систему (4,5) в вещественную ортоинвариантную систему

$$J_0(\lambda r_p),\ \sqrt{2}J_\mu(\lambda r_p)\cos\mu\varphi_p,\ \sqrt{2}J_\mu(\lambda r_p)\sin\mu\varphi_p\quad(\mu=1,2,\ldots).$$

Легко также найти унитарное представление группы движений E_2, соответствующее этой ортоинвариантной системе.

Вводя комплексную координату

$$z=z_p=r_pe^{i\varphi_p},$$

любое движение s можно записать в виде:

$$\zeta=e^{i\alpha}z+a. \tag{4,6}$$

Его можно рассматривать как произведение поворота вокруг начала координат на угол α

$$\zeta=e^{i\alpha}z$$

и трансляции t

$$\zeta=z+a. \tag{4,7}$$

Так как при повороте на угол α вокруг начала координат r_p остается неизменным, а угол φ заменяется на угол $\varphi+\alpha$, то такому повороту отвечает диагональная матрица $\|e^{mi\alpha}\delta_{mn}\|_{-\infty}^{\infty}$.

Выясним теперь, какая унитарная матрица соответствует трансляции t плоскости E_2.

Если $a=\varrho e^{i\psi}$, а $q=tp$, то (4,7) можно будет так переписать

$$r_pe^{i\varphi_p}+\varrho e^{i\psi}=r_qe^{i\varphi_q}.$$

Откуда

$$r_q=\sqrt{r_p^2+\varrho^2+2r_p\varrho\cos(\varphi_p-\psi)},\quad e^{2i\varphi_q}=(r_pe^{i\varphi_p}+\varrho e^{i\psi})(r_pe^{-i\varphi_p}+\varrho e^{-i\psi})^{-1}.$$

Таким образом, если

$$\Phi_\mu(p)=J_\mu(\lambda r_p)\,e^{\mu i\varphi_p} \qquad (\mu=0,\pm 1,\pm 2,\ldots),$$

то

$$\Phi_\mu(q)=\Phi_\mu(tp)=J_\mu\left(\lambda\sqrt{r_p^2+\varrho^2+2r_p\varrho\cos(\varphi_p-\psi)}\right)\left[\frac{r_p+\varrho e^{i(\psi-\varphi_p)}}{r_p+\varrho e^{-i(\psi-\varphi_p)}}\right]^{\frac{\mu}{2}}$$

$$(\mu=0,\pm 1,\pm 2,\ldots).$$

С другой стороны, согласно известным формулам Графа [33]:

$$J_\mu\left(\lambda\sqrt{r_p^2+\varrho^2+2r_p\varrho\cos(\varphi_p-\psi)}\right)\left[\frac{r_p+\varrho e^{i(\psi-\varphi_p)}}{r_p+\varrho e^{-i(\psi-\varphi_p)}}\right]^{\frac{\mu}{2}}=$$

$$=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} J_{\mu+\nu}(\varrho)\,J_\nu(r_p)\,e^{\nu i(\varphi_p-\psi)}.$$

Таким образом, трансляции t отвечает унитарная матрица $\|u_{\mu\nu}(t)\|_{-\infty}^{\infty}$, где

$$u_{\mu\nu}(t)=J_{\mu+\nu}(\varrho)\,e^{-\nu i\psi} \quad (\mu,\nu=0,\pm 1,\pm 2,\ldots).$$

Таким образом, движению s, задаваемому аналитически преобразованием (4,6), отвечает унитарная матрица $\|u_{\mu\nu}(s)\|_{-\infty}^{\infty}$, равная произведению матриц:

$$\|J_{\mu+\nu}(\varrho)\,e^{-\nu i\psi}\|\cdot\|e^{\mu i\alpha}\delta_{\mu\nu}\|,$$

т. е.

$$u_{\mu\nu}(s)=J_{\mu+\nu}(\varrho)\,e^{\nu i(\alpha-\psi)} \quad (\mu,\nu=0,\pm 1,\pm 2,\ldots).$$

Аналогичный анализ можно проделать и для случая $n>2$. Но здесь для построения ортоинвариантной системы, соответствующей зональному ядру Ω_n, кроме теоремы сложения для бесселевой функции $J_{\frac{1}{2}(n-2)}(\lambda r)$, придется использовать теорему о сложении для зональных функций на $n-1$-мерной сфере.

b) Q — вещественное гильбертово пространство: $Q=E_\infty$.

В этом случае, как показал Я. Шенберг [30], непрерывной функции $f(r)$ $(0\leqslant r<\infty)$ будет отвечать э. п. ядро $f(r(p,q))$ на E_∞ в том и только том случае, если функция $f(r)$ допускает представление

$$f(r)=\int_0^\infty e^{-\lambda r^2}d\sigma(\lambda), \quad (0\leqslant r>\infty),$$

где $\sigma(\lambda)=\sigma(\lambda-0)$ $(\sigma(0)=0,\ 0\leqslant\lambda<\infty)$ — некоторая ограниченная неубывающая функция, при этом функция σ определяется функцией f единственным образом.

Таким образом, в этом случае ядра

$$e^{-\frac{\lambda}{2}r^2(p,q)} \quad (0\leqslant\lambda<\infty) \tag{4,8}$$

составляют полную систему зональных ядер пространства E_∞ по отношению к группе всех его твердых движений.

Построим ортоинвариантную систему, соответствующую зональному ядру (4,8) при $\lambda > 0$.

Для простоты предположим, что E_∞ — сепарабельное пространство. Через $\xi_j(p)$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ обозначим координаты вектора p в каком-либо ортонормированном базисе пространства E_∞. Тогда скалярное произведение (p, q) найдется по формуле

$$(p, q) = \sum_{j=0}^{\infty} \xi_j(p)\, \overline{\xi_j(q)}.$$

Перенумеруем с помощью чисел 1, 2, ... всевозможные упорядоченные системы

$$(j_1, j_2, \ldots, j_n;\ \ k_1, k_2, \ldots, k_n) \tag{4,9}$$

из $2n$ целых неотрицательных чисел j_i, k_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, причем n также может принимать всевозможные натуральные значения 1, 2,...

Если система (4,9) имеет номер μ, то мы положим

$$\Phi_\mu(p; \lambda) = e^{-\frac{\lambda}{2}(p,\,p)} \frac{\xi_{j_1}^{k_1}(p)\, \xi_{j_2}^{k_2}(p) \ldots \xi_{j_n}^{k_n}(p)}{\sqrt{k_1!\, k_2! \ldots k_n!}}. \tag{4,10}$$

Легко видеть, что

$$e^{-\frac{\lambda}{2} r^2(p,\,q)} = e^{-\frac{\lambda}{2}(p,\,p)}\, e^{-\frac{\lambda}{2}(q,\,q)}\, e^{\lambda(p,\,q)} = \sum_{\mu=1}^{\infty} \Phi_\mu(p; \lambda)\, \Phi_\mu(q; \lambda).$$

Не представляет также труда доказать, что функции Φ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ ω-линейно независимы.

Таким образом, совокупность непрерывных на E_∞ функций (4,10) составляет ортоинвариантную систему, соответствующую зональному ядру (4,8).

c) Q — n-мерное пространство Лобачевского: $Q = L_n$.

В третьей части нашей работы будет показано, что непрерывной функции $f(r)$ $(0 \leqslant r < \infty)$ отвечает э. п. ядро $f(r(p, q))$ на L_n в том и только том случае, если

$$f(r) = \int_0^{\infty} u_n(r; \lambda)\, d\sigma(\lambda) \quad (0 \leqslant \lambda < \infty), \tag{4,11}$$

где $\sigma(\lambda) = \sigma(\lambda - 0)$ $(\sigma(0) = 0,\ 0 \leqslant \lambda < \infty)$ — некоторая ограниченная неубывающая функция (однозначно определяемая функцией $f(r)$), а $u_n(r; \lambda)$ есть решение следующей диференциальной системы

$$\frac{1}{\operatorname{sh}^{n-1} r} \frac{d}{dr}\left(\operatorname{sh}^{n-1} r \frac{du}{dr}\right) + \lambda u = 0.$$

$$u(0; \lambda) = 1. \tag{4,12}$$

Таким образом, функции

$$u_n(r(p, q); \lambda) \quad (0 \leqslant \lambda < \infty)$$

составляют полную систему зональных ядер на L_n.

Интересно заметить, что для случая трехмерного пространства Лобачевского функция $u_n(r; \lambda)$ имеет простое выражение

$$u_3(r; \lambda) = \frac{\sin \sqrt{\lambda - 1}\, r}{\sqrt{\lambda - 1}\, \operatorname{sh} r} \qquad (0 \leqslant r, \lambda < \infty).$$

Эти зональные функции трехмерного пространства Лобачевского получены в работах И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка [5а, б; 14] *).

Для случая $n=2$ легко находим, что

$$u_2(r; \lambda) = P_\nu(\operatorname{ch} r), \quad \nu = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda} \quad (0 \leqslant r, \ \lambda < \infty),$$

где $P_\nu(x)$ есть функция Лежандра первого рода, т. е.:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left[(x^2 - 1)\dfrac{dP_\nu}{dx}\right] - \nu(\nu+1) P_\nu = 0 \quad (0 \leqslant x < \infty). \\ P_\nu(1) = 1. \end{cases}$$

Найдем ортоинвариантную систему, соответствующую зональному ядру $P_\nu(\operatorname{ch} r)$.

Для этого заметим, что в полярной системе координат (r, φ) расстояние $r(p, q)$ между двумя точками p и q находится по формуле

$$\operatorname{ch} r(p, q) = \operatorname{ch} r_p \operatorname{ch} r_q - \operatorname{sh} r_p \operatorname{sh} r_q \cos(\varphi_p - \varphi_q).$$

Следовательно, по известной формуле сложения (см., например, [17]) для функций Лежандра первого рода

$$P_\nu(\operatorname{ch} r(p, q)) = P_\nu(\operatorname{ch} r_p) P_\nu(\operatorname{ch} r_q) +$$
$$+ 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\Gamma(\nu - m + 1)}{\Gamma(\nu + m + 1)} P_\nu^{(m)}(\operatorname{ch} r_p) P_\nu^{(m)}(\operatorname{ch} r_q) \cos m(\varphi_p - \varphi_q),$$

где $P_\nu^{(m)}(x)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ — присоединенные функции Лежандра, т. е.

$$P_\nu^{(m)}(x) = (x^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_\nu(x)}{dx^m} \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

---

*) Наша теорема о представлении (4,11) функций $f(r(p, q)) \in \mathfrak{P}_{L_n}$ при любом $n \geqslant 2$ была получена в 1946 г. независимо от исследований этих авторов с помощью метода направляющих функционалов. Эта теорема как частный случай некоторых более общих результатов, которые будут изложены в третьей части работы, докладывалась весной 1946 г. в Институте математики АН УССР и в феврале 1947 г. на заседании Московского математического общества.

Таким образом, зональная функция $P_\nu(\operatorname{ch} r(p, q))$ порождает ортоинвариантную систему

$$P_\nu(\operatorname{ch} r_p),\ \gamma_m P_\nu^{(m)}(\operatorname{ch} r_p)\, e^{mi\varphi_p},\ \gamma_m P_\nu^{(m)}(\operatorname{ch} r_p)\, e^{-mi\varphi_p} \qquad (m=1, 2, \ldots),$$

где

$$\gamma_m = \sqrt{(-1)^m \frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}} > 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Положительность подкоренного выражения легко следует из условия

$$\lambda = \nu(\nu+1) > 0$$

и тождества $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

Аналогичным образом могут быть построены ортоинвариантные системы пространства Лобачевского числа измерений $n > 2$. При этом придется воспользоваться формулами сложения Гегенбауэра для специальных функций $C_\mu^\nu(\operatorname{ch} r)$ (см. [17], стр. 136), частным случаем которых являются функции $u_n(r; \lambda)$, а также формулами сложения для зональных функций на $n-1$-мерной сфере.

d) Q — бесконечномерное пространство Лобачевского: $Q = L_\infty$.

Пространство L_∞ можно определить, как множество бесконечных вещественных векторов $p = \{\xi_i\}_0^\infty$, удовлетворяющих условиям:

$$\xi_0 > 0, \quad \xi_0^2 - \sum_1^\infty \xi_i^2 = 1,$$

при этом расстояние $r(p, q)$ между двумя элементами $p, q \in L_\infty$ определяется по формуле

$$\operatorname{ch} r(p,q) = \xi_0(p)\,\xi_0(q) - \sum_1^\infty \xi_i(p)\,\xi_i(q). \tag{4,13}$$

Под группой G твердых движений на Q мы понимаем группу всех изометрических отображений Q на себя (см. [12]).

В третьей части нашей работы будет показано, что непрерывной функции $f(r)$ $(0 \leqslant r < \infty)$ отвечает ядро $f(r(p, q)) \in \mathfrak{P}_{QG}$ в том и только том случае, если

$$f(r) = \int_0^\infty \frac{1}{\operatorname{ch}^\lambda r}\, d\sigma(\lambda) \qquad (0 \leqslant r < \infty), \tag{4,14}$$

где $\sigma(\lambda) = \sigma(\lambda - 0)$ $(0 \leqslant \lambda < \infty,\ \sigma(0) = 0)$ — некоторая неубывающая ограниченная функция.

Так как при этом представление (4,14) единственно, то функции

$$\operatorname{ch}^{-\lambda} r(p, q) \qquad (0 \leqslant \lambda < \infty) \tag{4,15}$$

составляет полную систему зональных ядер на L_∞.

Ядро (4,15) в силу (4,13) можно еще представить в виде:

$$\xi_0^{-\lambda}(p)\,\xi_0^{-\lambda}(q)\left(1 + \sum_{k=1}^\infty \frac{\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k-1)}{k!}\left[\sum_{i=1}^\infty \frac{\xi_i(p)}{\xi_0(p)}\frac{\xi_i(q)}{\xi_0(q)}\right]^k\right).$$

Отсюда легко заключить, что мы получим ортоинвариантную систему функций, соответствующую зональному ядру (4,15) с $\lambda > 0$, если всякой упорядоченной системе

$$\nu = [i_1, i_2, \ldots i_n;\ k_1, k_2, \ldots, k_n]$$

из $2n$ $(n=1, 2, \ldots)$ целых положительных чисел поставим в соответствие функцию

$$\Phi_\nu(p;\lambda) = \sqrt{\frac{\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k_1+k_2+\ldots+k_n-1)}{k_1!\,k_2!\ldots k_n!}}\,\frac{\xi_{i_1}^{k_1}(p)\,\xi_{i_2}^{k_2}(p)\ldots\xi_{i_n}^{k_n}(p)}{[\xi_0(p)]^{\lambda+k_1+k_2+\ldots+k_n}}$$

и к этим функциям еще присоединим функцию

$$\Phi_0(p;\lambda) = \xi_0^{-\lambda}(p).$$

6. Заметим, что зональные ядра для $Q = E_n$ и $Q = L_n$ могут быть получены на основании одного и того же общего правила.

Отправляясь от диференциальной формы

$$ds^2 = \sum_{j,k=1}^{n} g_{jk}\,d\xi^j d\xi^k,$$

задающей метрику на Q, составляем лапласиан Δ (второй диференциальный параметр Бельтрами):

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_i \frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(\sum_k \sqrt{g}\,g^{ik}\frac{\partial u}{\partial\xi_k}\right).$$

Для $\lambda \geqslant 0$ находим непрерывное решение диференциальной системы:

$$\begin{cases} \Delta u+\lambda u=0, \\ u(0)=1, \end{cases}$$

предполагая, что функция $u(p)$ зависит только от расстояния $r_p = r(p, 0)$ точки p до произвольно фиксированной точки 0

$$u(p) = \varphi(r_p;\lambda).$$

Ядра

$$Z(p, q;\lambda) = \varphi(r(p, q);\lambda) \qquad (0 \leqslant \lambda < \infty)$$

и будут составлять полную систему зональных ядер на Q.

Это правило, в частности, справедливо для того элементарного случая, когда Q есть n-мерная сфера единичного радиуса: $Q = S_n$ (см. [23]).

В этом случае уравнение для $\varphi(r;\lambda)$ принимает вид аналогичный уравнению (4,12), а именно

$$\frac{1}{\sin^{n-1} r}\frac{d}{dr}\left(\sin^{n-1} r\,\frac{d\varphi}{dr}\right) + \lambda\varphi = 0.$$

Теперь непрерывные решения будут существовать только для дискретного ряда значений:

$$\lambda_m = m(m+1) \quad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

и соответствующие

$$\varphi_m(r) = P_m^{(h,h)}(\cos r) \quad \left(h = \frac{n-2}{2},\ m=0, 1, 2, \ldots\right),$$

где $P_m^{(h,h)}(x)$ — ортогональные полиномы Якоби:

$$\int_{-1}^{1} P_k^{(h,h)}(x)\, P_l^{(h,h)}(x)\,(1-x^2)^h\, dx = 0 \text{ при } k \neq l,$$

нормированные условием

$$P_m^{(h,h)}(0) = 1.$$

При $n=2$ полиномы $P_m^{(h,h)}$ переходят в полиномы Лежандра P_m. Известная формула сложения для полиномов Лежандра показывает, что ортоинвариантной системой для зонального ядра $P_m(\cos r(p, q))$ является система сферических функций

$$P_m(\cos r_p),\ P_m^{(k)}(\cos r_p)\cos k\varphi_p,\ P_m^{(k)}(\cos r_p)\sin k\varphi_p$$

$$(k=1, 2, \ldots, m),$$

здесь r_p и φ_p — полярные координаты точки p сферы (дополнение к широте и долгота).

В третьей части нашей работы будет показано, что сформулированное выше правило нахождения зональных функций сохраняет силу для всех римановых пространств Q, в которых всякие две пары точек конгруентны (по отношению к группе всех твердых движений в Q), если расстояние между точками пар равны.