Труды М. В. Остроградского по математической физике

И. З. Штокало

§ 1. Вступление

Советская наука сыграла ответственную и важную роль в осуществлении социалистического строительства в СССР, в полном выполнении и перевыполнении Сталинских пятилеток, в победоносном завершении Великой Отечественной войны.

Сейчас, в послевоенные годы, советская наука внесла большой вклад в успешное выполнение и перевыполнение первой послевоенной Сталинской пятилетки восстановления и дальнейшего развития народного хозяйства. Наша наука призвана сыграть важную роль в осуществлении Сталинского плана построения коммунизма в нашей стране. Советские ученые считают своим почетным долгом оказывать всемерную помощь в создании великих строек коммунизма — гигантских гидроэлектростанций на Волге, в Средней Азии, на Днепре, а также мощных оросительных систем.

Наша отечественная наука, в том числе и математика, расцвела во всю свою мощь при советской власти. Великая Октябрьская социалистическая революция навсегда разбила цепи, веками сковывавшие угнетенные ранее народы России, смела все преграды, тормозившие экономическое и культурное развитие страны, подняла науку на небывалую высоту и вывела ее на широкий путь расцвета и прогресса. Советская власть создала самые благоприятные условия для развития всех отраслей науки, благодаря чему наши ученые обогатили сокровищницу мировой науки первоклассными открытиями, поставившими советскую научную мысль на передовые позиции мировой науки. Наука в советском государстве не отгораживается от народа, не держит себя вдали от него, а обслуживает народ, отдает ему все свои достижения, все свои завоевания. Это относится и к советской математике. Мы имеем теперь в Советском Союзе не одиночек-ученых, как это было в дореволюционной России, а многочисленные выдающиеся научные коллективы, которые составляют целые школы в различных областях знания и объединяют вокруг себя десятки тысяч талантливых продолжателей своего дела, новых выдающихся ученых исследователей. Многочисленные научные институты, лаборатории, станции, обсерватории обеспечены самым новым, самым совершенным оборудованием и аппаратурой. К научной деятельности привлекаются широкие массы новаторов производства, рационализаторов, инициаторов передовых методов труда. Ряды лауреатов Сталинской премии с каждым годом пополняются новыми представителями науки, промышленности, сельского хозяйства, архитектуры, литературы, искусства, что свидетельствует о широком развитии самой передовой в мире советской науки и культуры. Наша наука стала всенародной, она служит трудящимся массам, она выполняет свою почетную обязанность и вносит достойный вклад в строительство коммунизма в нашей стране.

Важной задачей советских ученых является надлежащее освещение и популяризация среди широких масс выдающихся достижений и передовой роли нашей отечественной науки, ее руководящего и решающего значения в развитии мировой научной мысли. Следует, наряду с дальнейшими научными исследованиями во всех областях знания, детально изучать историю развития отечественной науки, в частности математики, нужно устанавливать и защищать приоритет отечественных ученых, необходимо дать марксистско-ленинский анализ их деятельности.

Математика имела своих выдающихся представителей еще в дореволюционной России, однако им пришлось преодолевать неимоверные трудности и тяжелые препятствия, создававшиеся царским правительством на их пути к вершинам знания. Можно назвать такие имена, как Н. И. Лобачевский, П. Л. Чебышев, А. А. Марков, А. М. Ляпунов, Е. И. Золотарев, А. Н. Коркин, М. В. Остроградский, Г. Ф. Вороной и т. д. Они, как и другие передовые ученые того времени, пронесли благородное знамя прогрессивной научной мысли сквозь все гонения, преследования и унижения, которые испытали они в процессе своей научной деятельности в условиях царского гнета.

Среди отечественных ученых XIX ст. выдающееся место занимает один из крупнейших математиков Михаил Васильевич Остроградский. Диапазон его научных интересов чрезвычайно разнообразен. Поэтому, чтобы надлежащим образом охватить всю научную деятельность этого выдающегося математика, следовало бы написать отдельную монографию с полным анализом его научных результатов в различных областях математических знаний. Труды М. В. Остроградского относятся к анализу бесконечно малых, алгебре, теории чисел, механике, баллистике, математической физике, теории упругости и теории вероятностей. Важное значение имеют его отзывы на девять работ различных авторов, представлявшихся на присуждение Демидовской премии. Следует также отметить научно-популяризационную деятельность ученого и его большую педагогическую и методическую работу, имевшую значительное влияние на развитие математического образования в России.

М. В. Остроградский вырос и учился на Украине, любил украинский народ, его обычаи, культуру, дружил с Т. Г. Шевченко и с радостью посещал родные места на Полтавщине. Он также всем своим сердцем любил великий русский народ, его науку, культуру, отдавая все силы и знания делу развития отечественной математической научной мысли и математического образования, работая в Петербургской Академии наук, в институтах и военных школах Петербурга.

Выдающиеся научные труды М. В. Остроградского в области механики, математической физики, анализа бесконечно малых, вариационного исчисления, алгебраического анализа, а также его блестящая педагогическая деятельность имели направляющее влияние на дальнейшее развитие отечественной математической мысли и содействовали ее высокому творческому подъему в научных трудах последующих исследователей. Блестящая научная деятельность, захватывающие курсовые и публичные лекции среди студенческой молодежи и научной общественности, в которые он стремился вложить все свое умение, энергию и преподавательский энтузиазм, постоянная высокая требовательность к своим ученикам в вопросах творческого подхода к усвоению математических знаний, большая педагогическая и организационно-методическая работа в институтах и военно-учебных заведениях, которая значительно содействовала распространению математических знаний и поднятию военного образования, а этим самым и укреплению мощи русской армии и флота — все это характеризует М. В. Остроградского как выдающегося научного деятеля и педагога, преданного патриота своей Родины. Уместно будет здесь отметить тот факт, что почти все свои научные труды М. В. Остроградский опубликовал в изданиях Российской Академии наук. В своей работе он даже находил время для составления элементарных учебников и математических конспектов для военных училищ. В Львовской библиотеке Академии наук УССР найден в 1951 г. экземпляр „Руководства начальной геометрии“ М. В. Остроградского для военно-учебных заведений, изданный в 1855 г. в Петербурге. На заглавном листе этой книги имеется собственноручная надпись А. Н. Коркина, датированная 30 мая 1866 г., о приношении им этой книги львовской общественности. Это свидетельствует о тесных связях русских ученых, и среди них выдающегося математика А. Н. Коркина, с львовскими научными организациями. Интересно отметить, что Коркин, для посылки во Львов подарка, остановил свой выбор на книге прославившегося отечественного математика М. В. Остроградского.

§ 2. Краткий обзор трудов М. В. Остроградского в области механики

М. В. Остроградский принадлежит к числу тех математиков, которые сочетают глубокие теоретические исследования с решением сугубо практических задач. Он был прекрасным знатоком и творческим исследователем как в теоретических областях математики, так и в различных важных ее приложениях. Количество научных трудов М. В. Остроградского в этих отраслях математики почти одинаково. Поэтому неудивительно, что на тридцатом году жизни он был избран ординарным академиком по прикладной математике, а двадцать четыре года спустя он получил в Академии наук кафедру ординарного академика по теоретической математике.

В своей научной деятельности М. В. Остроградский всегда стремился к решению математических вопросов в наиболее общем виде, что, хотя и весьма усложняло трудность исследований, но зато давало возможность широкого охвата рассматриваемых задач. Способы и методы, при помощи которых он решал различные математические и механические задачи, отличаются необыкновенной глубиною, острым проникновением в самую сущность вопроса, тонким анализом, широким обобщением и простым, умелым изложением.

Прежде, чем перейти к анализу научных результатов М. В. Остроградского в области математической физики, будет уместным и полезным остановиться вкратце на его работах в области механики, ибо, говоря о его трудах по вопросам математической физики, мы не можем не сказать о нем, как о первоклассном механике, и не отметить исключительного мастерства, тонкости и общности его научных исследований в области механики. Около одной трети работ великого математика принадлежит к области механики. Среди этих работ имеется два прекрасных курса небесной и аналитической механики, представляющих собой самостоятельный научный интерес. Особенно важную роль сыграли его лекции по аналитической механике, в которых дана оригинальная трактовка системы законов Ньютона. М. В. Остроградский заложил крепкий фундамент отечественной механики и прикладной математики, прославленных блестящими именами первоклассных исследователей.

Методологические взгляды М. В. Остроградского, изложенные им в лекциях по механике, характеризуют его как ученого с передовым мировоззрением, для которого материя существует независимо от сознания человека и доходит до этого сознания через соответствующие органы восприятия, на которые действуют отдельные предметы. Правда, его формулировки по этому вопросу не всегда четки и отработаны, однако, признание им материальной сущности мира выступает весьма явственно. М. В. Остроградский в своих научных исследованиях дал прекрасный образец действенной взаимосвязи теоретических изысканий с решением практических задач. Это направление научной деятельности, которое ведет свое начало от великого русского ученого М. В. Ломоносова, было далее продолжено и блестяще развито последующими выдающимися отечественными математиками.

Научная деятельность М. В. Остроградского развилась в то время, когда идеи аналитической механики, созданной незадолго перед этим, привлекали математиков и механиков интересной новизной, обобщающим характером подхода к решению задач и вместе с тем ожидали дальнейшего творческого развития, дополнения, обогащения, усовершенствования и обобщения. Это и было в значительной степени осуществлено М. В. Остроградским в его лекциях, мемуарах, заметках и работах по механике, написанных им в разные периоды его научной деятельности. Большая часть этих исследований относится к аналитической механике, т. е. к той отрасли математических знаний, в основу которой положены общие методы, всегда интересовавшие и привлекавшие ученого. В своих работах в указанной области М. В. Остроградский решил целый ряд фундаментальных задач, обогативших отечественную механику первоклассными результатами и определивших во многих вопросах направление дальнейших исследований в области механики в России.

Особенная заслуга М. В. Остроградского как механика состоит в создании им обобщающих теорем по принципу возможных перемещений и в обобщении принципа наименьшего действия. В трудах первого направления им дано существенное обобщение принципа возможных перемещений на случай неудерживающих или односторонних связей, которые к тому же могут зависеть от времени, и на случай импульсивных сил. Среди его работ этого круга идей следует отметить мемуар 1834 г. „Общий взгляд на момент силы“, в котором развита мысль о распространении метода перемещений на системы с неудерживающими связями при условии, что полный момент сил равен нулю или же является отрицательным [1]. В трудах второго из указанных направлений исследований в области механики, М. В. Остроградским внесен блестящий вклад в развитие аналитической динамики. Автор этих трудов дал существенное обобщение так называемого принципа Гамильтона, относящегося к консервативным системам, на случай неконсервативных динамических систем, в связи с чем этот обобщенный принцип должен быть связан с именем Остроградского.

Исключительно большое значение имеют работы М. В. Остроградского по теории канонических уравнений механики. Здесь особенно следует отметить его мемуары, относящиеся к 1848 г., а именно: 1) „Об интегралах общих уравнений динамики“ и 2) „О диференциальных уравнениях в проблеме изопериметров“, в которых рассмотрены вопросы интегрирования диференциальных уравнений механики, а также уравнений более общего характера. В первой из указанных работ он разработал обобщенную теорию канонических уравнений динамики на случай существования между точками системы связей, могущих зависеть также от времени. Он вывел для рассматриваемого им случая диференциальные уравнения движения в канонической форме и целый ряд теорем, относящихся к функции, заменяющей Гамильтоновскую главную функцию. Во второй из указанных работ М. В. Остроградский обобщил полученные им результаты на случай изопериметрической задачи, достигнув благодаря этому наибольшей общности в рассматриваемом цикле вопросов. В этом мемуаре М. В. Остроградский намного опередил Якоби и вполне заслуженно завоевал приоритет в обобщении результатов, относящихся к исключительно важным вопросам. Его работа об изопериметрах охватывает собой, как частные случаи, результаты Лагранжа, Пуассона, Гамильтона и Якоби по интегрированию диференциальных уравнений динамики. На содержании этого наибольшего по объему мемуара следует остановиться несколько подробнее. В нем приведены к канонической форме диференциальные уравнения, которые получаются путем приравнивания нулю вариации интеграла от функции любого числа неизвестных функций, зависящих от одной независимой переменной,

[1] Момент здесь надо понимать, в соответствии с терминологией того времени, как работу силы (на возможных перемещениях).

и их производных до любого порядка. В связи с этим, определяется частное диференциальное уравнение, которому удовлетворяет характеристическая функция, заменяющая собой главную функцию, после чего выражаются через ее частные производные по переменным и произвольным постоянным интегралы системы. Вместе с тем, автор мемуара исправляет ошибку, допущенную Лагранжем при выводе уравнения динамики, исходя из принципа наименьшего действия, состоящую в том, что Лагранж рассматривал как независимые — вариации, связанные уравнениями. В конце своего мемуара М. В. Остроградский дает применение метода изменения произвольных постоянных к изопериметрическим диференциальным уравнениям. Следует отметить, что ему принадлежит создание самой общей теории изменения произвольных постоянных применительно к составлению диференциальных уравнений возмущенного движения.

Отметим в конце нашего краткого обзора трудов М. В. Остроградского в области механики его разработку общей теории удара. В работе, написанной им в 1854 г. и носящей название „Мемуар об общей теории удара", распространен метод возможных перемещений на исследования в области теории удара, а также впервые дан общий способ нахождения изменения скоростей точек системы при ударе о неупругую связь. Автор изучает удар систем, предполагая, что возникшие в момент удара связи сохраняются также и после удара. Благодаря указанным исследованиям М. В. Остроградского, разработан общий способ решения вопроса теории удара.

В своих трудах в области механики М. В. Остроградский показал высокое мастерство, глубину проникновения в сложные механические явления и исключительное умение производить обобщающие исследования в изучаемых им вопросах.

§ 3. Рассмотрение трудов М. В. Остроградского по математической физике

Перейдем к рассмотрению трудов М. В. Остроградского в области математической физики, что составляет основную часть данной статьи. Сначала остановимся на некоторых общих вопросах развития исследований по математической физике, а затем проанализируем работы М. В. Остроградского в этой области.

Математическая физика в современном ее понимании начала развиваться в конце XVIII и в начале XIX ст., когда была создана стройная теория притяжения, восходящая в своих основах к выдающимся результатам Ньютона. Математическая физика углубила свое содержание, когда была воздвигнута аналитическая механика, которая в своих построениях развивала общие методы, математическая физика поднялась на высшую ступень, когда были составлены общие уравнения колебаний светового эфира и создана математическая теория света. Круг исследований в математической физике значительно расширился, когда были подвергнуты анализу вопросы колебаний и равновесия упругих тел, математическая физика обогатила свое содержание, когда были изучены и математически обоснованы явления теплоты. Математический анализ в то время был уже достаточно мощным, чтобы передать в распоряжение молодой тогда математической физики необходимый для ее дальнейшего развития математический аппарат. В свою очередь математическая физика, обогащаясь исследуемым материалом, выдвигала свои требования, которые содействовали возникновению новых идей и новых изысканий в области математического анализа.

Как известно, на западе математическая физика развивалась в условиях, когда механика была там разбита на две резко разграниченные и обособленные отрасли — теоретическую и прикладную. Первую из них буржуазия направляла на обслуживание и обосновывание идеалистического мировоззрения с целью укрепления капиталистической системы, вторую же буржуазия использовывала в узко утилитарных целях, перечеканивая научные результаты в золото для своего еще большего обогащения. Следует отметить, что, наряду с указанными направлениями в механике, на западе начинали развиваться также исследования, базировавшиеся на стихийно-материалистических взглядах, а отдельные, наиболее передовые и прогрессивные ученые поднимались даже до уровня сознательного материалистического мировоззрения. Однако, богатевшая и все более наглевшая буржуазия старалась всеми находящимися в ее распоряжении средствами сковывать и вытравливать эти передовые стремления прогрессивных деятелей, воздвигала всевозможные препятствия в развитии и распространении передовых идей, прибегая к грубым, насильственным мерам подавления передовой творческой мысли.

Такое положение механики не могло не отразиться на направлении развития математической физики. Последняя, под влиянием теоретической механики, развивалась на западе в направлении абстрагирований и формалистической математизации физических явлений, что особенно усилилось позже, в период кризиса физики, когда буржуазные исследователи, вследствие незнания законов материалистической диалектики, не смогли правильно оценить и понять сущность новых физических явлений и поэтому не были в состоянии подняться до уровня возросших требований в развитии физики.

Иным путем шло развитие механики в России. Не взирая на жестокий гнет царского самодержавия, передовые, прогрессивные взгляды ученых тогдашней России, вследствие особых исторических и социально-экономических условий, обладали настолько крепкой, преодолевающей и целеустремленной силой, что победоносно пробивались сквозь тяжелый полицейский заслон царского самодержавия и завоевывали доминирующие позиции в отечественной науке. В частности, в области физико-математических наук подавляющее большинство выдающихся ученых России было под влиянием прогрессивной русской философии и развивало свои научные исследования на основе действенной взаимосвязи теории и практики. Поэтому механика в России не испытала размежевывающего расщепления на две разобщенные отрасли, как это было на западе, а ее теоретическая часть органически связывалась с прикладной. Механика в России, благодаря выдающимся исследованиям М. В. Остроградского и его последователей, получила взаимосочетающую направленность в развитии теоретических и прикладных исследований, что оказало благоприятное влияние на обогащение содержания и на весь процесс творческого роста научных изысканий в области механики. В таких условиях развития механики зародилась у нас математическая физика. Естественно, что эти условия не могли не сказаться на развитии новой отрасли математических исследований. Весьма благотворную, целеустремляющую роль сыграли здесь работы М. В. Остроградского. Исследования по математической физике начали все больше и больше развиваться, причем теоретические изыскания связывались с решением практических задач. Работы Остроградского в области математической физики нельзя рассматривать в отрыве от его работ в других областях, например, в области математического анализа, механики, теории упругости, баллистики и т. д., ибо в некоторых из последних им получены результаты, имевшие значительное влияние на решение тех или иных вопросов математической физики. Поэтому в данной статье мы подвергаем анализу также некоторые исследования, не относящиеся в строгом смысле к области математической физики.

Характеризуя в общем работы М. В. Остроградского по математической физике, следует сказать, что они отличаются решением важных и новых по тому времени задач, выдвижением новых идей и построением новых методов исследования. Эти работы отличаются также строгостью и точностью изложения, глубиной творческого замысла, свидетельствующих о том, что автор их стоял на передовых позициях математической науки.

Из основных мемуаров и статей М. В. Остроградского в области математической физики можно назвать следующие:

1. „О распространении волн в цилиндрическом бассейне". Доклад на эту тему был сделан автором в ноябре 1826 г., мемуар же был опубликован лишь в 1832 г.

2. „Решение проблемы о распространении волн на поверхности жидкости, наполняющей сосуд, имеющий вид цилиндрического сектора". Доклад был прочитан в сентябре 1829 г. Материал напечатан в изданиях Петербургской Академии наук.

3. „О теории теплоты". Работа представлена в Петербургскую Академию наук в ноябре 1828 г. и опубликована в 1831 г.

4. „Вторая статья о теории теплоты". Статья представлена в Академию наук в июле 1829 г., напечатана в изданиях Академии наук в 1831 г.

5. „О распространении теплоты в призме с основанием равнобедренного прямоугольного треугольника". Работа эта не была опубликована. Результатам, полученным М. В. Остроградским в данном исследовании, посвящен целый раздел в книге Ляме „Аналитическая теория теплоты".

6. „Об уравнении распространения тепла внутри жидкости". Доклад прочитан М. В. Остроградским в Петербургской Академии наук в 1836 г., работа опубликована в изданиях Академии наук в 1838 г.

7. „О диференциальном уравнении в частных производных распространения теплоты внутри жидкости". Работа сдана в Академию наук в 1829 г., напечатана в 1830 г.

8. „О движении жидкости". Работа представлена в Академию наук в 1844 г. и опубликована в изданиях Академии наук в следующем году.

9. „Об одном особом случае равновесия несжимаемых жидкостей". Доклад о результатах, содержащихся в данной работе, сделан в 1836 г. Статья напечатана в мемуарах Академии наук в 1838 г.

10. „Об интеграле, встречающемся в теории притяжения сфероидов". Доклад прочитан на научном заседании в Петербургской Академии наук в 1828 г., опубликован в 1831 г.

11. „О нескольких формулах, относящихся к взаимному притяжению сферы и сфероида". Статья напечатана в изданиях Академии наук в 1838 г.

12. „О взаимном намагничивании разобщенных брусков". Работа сдана в Академию наук в апреле 1939 г. и опубликована в этом же году.

13. „О взаимном намагничивании разобщенных брусков". Вторая статья М. В. Остроградского на эту тему была представлена в Академию наук в мае 1839 г. и напечатана в изданиях Академии наук в этом же году.

14. „О телах, все моменты инерции которых равны". Статья представлена для публикации в Петербургскую Академию наук в мае 1842 г.

15. „О равновесии упругого слоя". Работа сдана для помещения в изданиях Академии наук в 1832 г., напечатана в 1833 г.

16. „Об интегрировании диференциальных уравнений в частных производных малых колебаний упругих сред". Работа представлена для напечатания в мемуарах Академии наук в 1829 г. и опубликована в 1831 г.

17. „Мемуар об интегрировании диференциальных уравнений в частных производных малых колебаний упругих тел". Мемуар сдан для публикации в 1832 г., вышел в свет в 1833 г.

В докладе, сделанном в 1901 г. в Полтаве на заседании, посвященном столетию со дня рождения М. В. Остроградского, В. А. Стеклов сказал, что ему известно 12 работ великого математика, относящихся к области математической физики. Как видно из выше помещенного списка, таких работ насчитывается несколько больше. Остановимся на их рассмотрении.

Первый научный труд М. В. Остроградского относился именно к математической физике. Это было исследование вопроса распространения волн в жидкости, наполняющей цилиндрический бассейн. Вопрос о распространении волн на поверхности жидкости был тогда новым и ему в своих исследованиях уделяли значительное внимание выдающиеся математики и механики того времени, как например, Лаплас, который впервые эту задачу подверг математической обработке, Лагранж, рассматривавший этот вопрос в своей „Аналитической механике", Пуассон и Коши, посвятившие изучению данного явления ряд своих мемуаров. Важность этой задачи видна хотя бы из того, что в 1816 г. была объявлена премия за ее решение. Молодому Остроградскому удалось найти решение для случая, когда жидкость наполняет бассейн, имеющий форму круглого цилиндра. В своей работе автор с большим мастерством выводит общие выражения для скоростей тяжелой жидкости, исходя из начального вида свободной поверхности и начальных значений скоростей. Этот первый труд М. В. Остроградского произвел большое впечатление на выдающихся математиков того времени.

Тремя годами позже М. В. Остроградский, будучи уже адъюнктом по прикладной математике в Петербургской Академии наук, 16 сентября 1829 г. на научном заседании в Академии наук сделал доклад о своем новом исследовании по вопросу распространения волн в жидкости. На этот раз решение задачи относилось к случаю, когда жидкость находится в бассейне, имеющем форму цилиндрического сектора. Интересно отметить, что в процессе исследования автор пользуется делением окружности на 400 угловых единиц. После вывода основных формул, дающих решение поставленной задачи, он указывает, что в случае, когда угол раствора сектора обращается в полный, полученные в данной работе результаты переходят в выведенные им ранее, имея в виду первый мемуар по этому циклу вопросов.

В 1828 г. М. В. Остроградский начал изучать явления распространения теплоты в телах, в результате чего им написано несколько работ, а именно: две статьи о теории тепла, одна работа о распространении тепла в призме с основанием равнобедренного прямоугольного треугольника и две статьи, относящиеся к распространению теплоты внутри жидкости.

5 ноября 1828 г. М. В. Остроградский в Петербурге, приблизительно за полтора месяца до его избрания адъюнктом по прикладной математике, представил на научное заседание Академии наук работу под заглавием „О теории теплоты“. В июле 1829 г., будучи уже адъюнктом Академии наук, он представил вторую работу под тем же заглавием. Чтобы оценить должным образом выдающееся значение этих работ, остановимся вкратце на истории развития исследований различных авторов в рассматриваемой области.

После составления Фурье диференциального уравнения распространения тепла в твердом теле, необходимо было указать способы определения искомой температуры тела, в соответствии с условиями задачи. Решение этой задачи в общем виде встречало большие затруднения, которые не удавалось преодолеть методами, бывшими в то время в распоряжении математики. Для преодоления возникших затруднений требовалось создание новых, более мощных способов исследования. Поэтому вполне понятно, что первые попытки были обращены к простым случаям. Так, например, Фурье, а также Пуассон исследовали отдельные случаи охлаждения, а именно охлаждение шара, цилиндра, куба и прямоугольного параллелепипеда. Рассматривая отдельные задачи, Коши применял при решении их один и тот же метод, не делая при этом соответствующих обобщений. Такое обобщение впервые было осуществлено М. В. Остроградским в его работах по теории тепла. В своих исследованиях он разработал метод во всей общности, что явилось блестящим достижением в решении этой сложной задачи по теории тепла. В более поздних исследованиях в этом цикле вопросов различные авторы в значительной мере лишь повторяли формулировки М. В. Остроградского.

В указанных мемуарах М. В. Остроградского по теории тепла начерчена целая программа решения общей задачи охлаждения любого твердого тела, ограниченного поверхностью без особых точек и линий. Эти мемуары рисуют их автора как математика, мастерски сочетающего глубокие теоретические исследования с исключительно важными приложениями их. Идеи, изложенные М. В. Остроградским в его трудах по теории теплоты, послужили мощным толчком в развитии дальнейших изысканий не только относительно указанной проблемы, но и для математической физики в целом. Наряду с решением поставленных проблем М. В. Остроградский выдвинул в процессе своих исследований целый ряд общих задач анализа, ставших предметом изучения и решения многих выдающихся математиков на протяжении почти целого столетия. Достаточно сказать, что часть задач, возникающих в связи со строгим обоснованием некоторых выдвинутых в работах М. В. Остроградского вопросов, хотя бы взять для примера в общей постановке проблему так называемой полноты собственных функций, трудно поддается исследованию даже при применении средств современного анализа.

В начале своего первого мемуара по теории теплоты М. В. Остроградский четко формулирует постановку так называемых, говоря современной терминологией, смешанных задач математической физики. О правильности и важности этих формулировок говорит, хотя бы, то, что, несмотря на их стодвадцатитрехлетнюю давность, они фактически сохраняются и по сей день в современных руководствах по математической физике. Далее он формулирует основную и общую идею разложения искомого решения в ряд по некоторым специальным функциям. Эта идея конкретизируется на примере смешанной задачи относительно уравнения теплопроводности, к которому приступает автор мемуара после вывода своей знаменитой формулы, связывающей интеграл, взятый по объему, с интегралом, распространенным по поверхности, ограничивающей этот объем, и некоторых общих соотношений, вытекающих из нее. При рассмотрении уравнения теплопроводности автор принимает температуру внешней среды, окружающей исследуемое тело, равной нулю. По сути дела, М. В. Остроградский для случая уравнения с постоянными коэфициентами, применительно к произвольной области, выдвигает идею разложения искомого решения в ряд по ортогональным, а именно собственным функциям, которые соответствуют точкам спектра введенного им параметра. Такой взгляд представляет собой самый общий подход, даже с современной точки зрения, к подобного типа задачам. Дальнейшее развитие математических исследований различных авторов подтвердило все богатство замысла М. В. Остроградского и, вместе с тем, выявило те громадные затруднения, которые возникают в связи с такой постановкой задачи. Можно вполне уверенно утверждать, что исследования в указанной области таких выдающихся математиков, как Коши, Пуанкаре, Стеклова и Гильберта, исходили в своей основе из глубоких идей, изложенных в указанном мемуаре М. В. Остроградского. Их работы в этих вопросах были направлены на то, чтобы в той или иной мере обосновать общую концепцию спектрального разложения, которая, безусловно, всецело принадлежит М. В. Остроградскому. Доказав свою известную формулу:

$$f(x, y, z) = \sum \frac{u \int\int\int f(x, y, z)\, u'\, dx\, dy\, dz}{\int\int\int uu'\, dx\, dy\, dz},$$

где u является функцией от переменных x, y, z, удовлетворяющей некоторому диференциальному уравнению, М. В. Остроградский формулирует задачу сходимости этого ряда к функции $f(x, y, z)$, чем выражает так называемый метод Фурье в самом общем виде, причем значительно раньше, чем это сделали Ляме и Дюгамель. Таким образом, проблема полноты собственных функций, которая в такой общей постановке остается для исследования и на сегодняшний день, принадлежит М. В. Остроградскому и должна быть связана с его именем. Доказывая ее для случая тригонометрических рядов, он на много лет раньше Римана установил принцип локализации, хорошо известный сейчас в теории тригонометрических рядов. Данное при этом Остроградским доказательство сходимости тригонометрических рядов было впоследствии им детальнее развито в его замечательном курсе небесной механики. Как заметил В. А. Стеклов, М. В. Остроградский еще в 1828 г. выдвинул в указанной работе ряд задач математического анализа, к строгому обоснованию которых впоследствии приступил Пуанкаре в своем известном мемуаре по уравнениям математической физики.

Во второй работе по теории теплоты, представленной М. В. Остроградским в Академию наук через восемь месяцев после первого мемуара по данному вопросу, автор поместил продолжение предыдущего исследования, причем здесь при рассмотрении уравнения теплопроводности он, в отличие от случая, изученного в первом мемуаре, считает температуру внешней среды, окружающей исследуемое тело, функцией пространственных координат, а также времени. Он показывает, как можно свести задачу для последнего случая к задаче для первого случая. Решение задачи М. В. Остроградский находит в виде суммы двух функций, из которых роль одной состоит в сведении граничных условий к однородным, а для второй функции уравнение теплопроводности содержит свободный член. Автор мемуара остроумно решает для уравнения теплопроводности рассматриваемого им вида смешанную задачу математической физики, а также показывает, как нужно подобрать функцию, дающую возможность свести граничные условия к однородным. Построения, создаваемые им в процессе исследований, представляют большой интерес и являются достаточно строгими; однако следует сказать, что в тех местах, где речь идет о сходимости соответствующих рядов и о полноте собственных функций, автор работы не вышел за рамки взглядов того времени, что является вполне понятным, ибо подобного рода вопросы в общей постановке не всегда поддаются решению даже при современном состоянии математики, когда в распоряжении исследователей имеется столь мощный аппарат, как, например, функциональный анализ.

Труды М. В. Остроградского по теории теплопроводности являются блестящим вкладом в математическую физику. Нами уже отмечалось, что обобщение так называемого метода Фурье, относящегося к определению коэфициентов в рядах, представляющих решение задачи, принадлежит М. В. Остроградскому, в связи с чем название обобщенного метода должно быть связано с его именем.

При решении различных вопросов теплопроводности надо уметь найти систему собственных функций, каждая из которых должна удовлетворять граничным условиям. Решение задачи находится путем разложения в ряд по собственным функциям, а затем определения неизвестных коэфициентов, исходя из начальных условий. Руководствуясь таким подходом, можно сравнительно легко решить задачу об охлаждении призмы с квадратным основанием. Относительная легкость решения задачи в случае прямоугольного параллелепипеда объясняется тем, что уравнение каждой грани получается весьма просто путем приравнивания постоянной величине одной из трех координат. Затруднения значительно усложняются в случае, когда поверхность тела представляет собой иной многогранник. Так, например, задача об охлаждении треугольной призмы уже представляла серьезные трудности и долго не поддавалась усилиям математиков — предшественников и современников М. В. Остроградского. Остроградскому принадлежит заслуга решения одной из этих задач. Здесь мы переходим к следующей его работе, относящейся к распространению тепла в призме с основанием в виде равнобедренного прямоугольного треугольника. Этот случай усложнялся тем, что правая часть уравнения одной из граней представлена линейной функцией двух из координат. М. В. Остроградский первый преодолел трудности, связанные с указанным обстоятельством, и решил задачу охлаждения призмы с основанием, имеющим вид равнобедренного прямоугольного треугольника. К сожалению, этой работы в опубликованном виде мы не имеем и даже не сохранились соответствующие материалы в рукописном архивном фонде. О решении указанной задачи М. В. Остроградским мы знаем на основании упоминания в трудах известного математика и механика Г. Ляме, состоявшего в то время профессором Петербургского института путей сообщения. В своей работе „О распространении тепла в многограннике", доложенной в Петербургской Академии наук в 1829 г., Ляме указал, что затруднения, стоявшие перед ним в решении задачи, были впервые преодолены М. В. Остроградским и, приводя в одном из разделов своей работы формулу, указывает, что заслуга в ее выводе принадлежит Остроградскому. В 1861 г. Г. Ляме издал свой известный трактат „Аналитическая теория тепла", в котором посвятил М. В. Остроградскому целый раздел, указывая, что рассмотренная в этом разделе задача была впервые решена Остроградским. Отмеченный случай помещен в трактате Ляме на страницах 120—128 в параграфах 70—73 под общим заглавием „Треугольная призма $\frac{1}{2}$“. В своей работе по этому вопросу М. В. Остроградский заметил некоторые соотношения симметрии в задаче об охлаждении квадратной призмы, в зависимости от начальных условий задачи, и получил решение задачи об охлаждении призмы с основанием в виде равнобедренного прямоугольного треугольника при условии, что оба ее основания и две боковые грани имеют нулевую температуру, а грань, образованная соответствующим диагональным сечением в квадратной призме, не пропускает тепла. Эти интересные и ценные результаты имели значительное влияние на развитие дальнейших исследований по теплопроводности тел, и следует лишь пожалеть о том, что публикация работы не осуществлена и что даже не сохранился рукописный оригинал, который дал бы возможность восстановить полное ее содержание.

К циклу вопросов, относящихся к распространению теплоты, принадлежит работа М. В. Остроградского: „Об уравнении распространения тепла внутри жидкости“, доложенная в Петербургской Академии наук 8 апреля 1836 г. и напечатанная в изданиях Академии наук в 1838 г. После исследования вопросов об охлаждении твердых тел он перешел к решению еще более сложной задачи, а именно о распространении теплоты в жидкостях. Решение этой проблемы полностью принадлежит М. В. Остроградскому, который вывел основное уравнение, обосновал его и дал надлежащую теорию рассматриваемого явления. Этими вопросами в то время занимались также Фурье, Пуассон и другие видные математики, однако, им не удалось решить эту задачу в общем виде.

Следует заметить, что Фурье долго исследовал вопросы распространения теплоты в жидкостях и, как он выразился, они показались ему исключительно сложными и трудно поддающимися анализу. В 1820 г. Фурье сделал доклад на заседании Парижской Академии наук о своих результатах в этой области, среди которых было указано выведенное им уравнение. Обоснование уравнения он считал настолько сложным делом, что предложил Лапласу и Пуассону испробовать силы в доказательстве указанного им уравнения. Пуассон действительно занялся этой задачей и в 1829 г., уже после представления М. В. Остроградским вывода своего уравнения, дал собственное доказательство, причем вид его уравнения отличался от уравнения М. В. Остроградского. Однако позже в своей работе по аналитической механике Пуассон отказался от своего уравнения и принял уравнение, выведенное Остроградским. Доказательство Фурье все это время оставалось неизвестным для других математиков и лишь после смерти Фурье была опубликована его работа с подробным обоснованием выведенного им уравнения распространения тепла в жидкости. М. В. Остроградский, познакомившись с этой работой Фурье, не был удовлетворен ею. Фурье при выводе своего уравнения упрощал задачу, считая жидкость несжимаемой, ее плотность зависящей лишь от температуры, а удельную теплоемкость постоянной. Решение, предложенное Пуассоном, М. В. Остроградского также не удовлетворяло, т. к. Пуассон не учитывал расширения жидкости, в связи с неравномерным нагревом движущейся массы. Остроградский пришел к заключению, что и другие существовавшие тогда доказательства являются неправильными. В 1836 г. он полностью решил вопрос, исправив неточности в своем предыдущем доказательстве, осуществленном в 1829 г., и дал исключительно глубокое и строгое обоснование своего уравнения. Таким образом, он впервые решил проблему, над которой работало немало выдающихся математиков того времени.

В начале своего мемуара „Об уравнении распространения тепла внутри жидкости" М. В. Остроградский приводит краткую историю вопроса, после чего переходит к изложению своих результатов, содержащих решение указанной задачи. Он исходит из поверхностного интеграла $\int K\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\cos\lambda+\frac{\partial\theta}{\partial y}\cos\mu+\frac{\partial\theta}{\partial z}\cos\nu\right)s\,dt$, где K представляет собой коэфициент теплопроводности, θ — температура, s — элемент поверхности и λ, μ, ν являются углами, образованными внешней нормалью элемента s с осями координат. Он исходит, таким образом, из интеграла, выражающего количество тепла, получаемого объемом, ограниченным заданной поверхностью, за время dt, а дальше, используя свою формулу, переходит от указанного интеграла к интегралу по объему. В результате последующих рассуждений, отличающихся глубокой продуманностью и базирующихся на реальных основах рассматриваемого явления, М. В. Остроградский выводит общее уравнение, из которого, как частные случаи, получаются уравнения Фурье (Пуассона и его же предыдущее уравнение.

Основное уравнение Остроградского теплопроводности внутри жидкости

$$\frac{\partial(k\theta)}{\partial t}+\frac{\partial(k\theta u)}{dx}+\frac{\partial(k\theta v)}{\partial y}+\frac{\partial(k\theta w)}{\partial z}=$$

$$=\frac{\partial\left(K\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(K\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(K\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)}{\partial z}\quad (k \text{ — теплоемкость})$$

решает поставленную задачу в самом общем виде и свидетельствует о блестящем вкладе, внесенном М. В. Остроградским в решение важной и сложной проблемы.

Мемуар, содержание которого здесь описывается, имеет выдающееся значение не только по своим результатам, но также по методу, разработанному автором при решении данной задачи. В самом деле, еще и до сего времени при решении подобных задач иногда употребляется способ рассмотрения элементарных параллелепипедов, между тем, как Остроградский уже в то время выделял при исследовании тела некоторый произвольный объем, для которого составлял соответствующее интегральное уравнение, считая, что оно должно быть справедливым для любого объема, выделенного из данного тела, после чего приравнивал подинтегральную функцию нулю и, таким образом, приходил к искомому результату. Этот метод дает новый, действенный подход к решению таких задач, он предоставляет в наше распоряжение очень удобный, строгий и, вместе с тем, простой способ, общепринятый теперь как эффективное, мощное средство в различных математических исследованиях. В создании указанного метода М. В. Остроградский на 40—50 лет опередил Кирхгоффа и Неймана, в связи с чем этот метод должен быть назван именем Остроградского. В дополнение к сказанному отметим, что работа М. В. Остроградского, представленная им в 1829 г., где было помещено первоначально выведенное им уравнение, носит название „О диференциальном уравнении в частных производных распространения тепла внутри жидкости". Результат, полученный им в этой работе, вытекает как частный случай из его общего уравнения, при предположении несжимаемости жидкости.

Перейдем теперь к трудам М. В. Остроградского, посвященным вопросам равновесия и движения жидкостей. Среди этих работ, в первую очередь, следует отметить его мемуар „Об особом случае равновесия несжимаемых жидкостей", написанный в 1836 г. и опубликованный в изданиях Академии наук в 1838 г.

В начале этого мемуара автор его останавливается на некоторых определениях и формулировках и, среди них, на весьма интересном определении механики, указывая, что последняя различает тела лишь с точки зрения их массы, положения и возможных перемещений. Можно привести также его формулировку равновесия тел, заключающуюся в следующем: „Чтобы система была в равновесии, работа сил на всех возможных перемещениях должна быть отрицательной или равной нулю". В оригинале М. В. Остроградского употреблено, вместо термина— работа, слово — момент, что встречалось в то время и у других авторов. Он глубоко проник в понимание общности принципа равновесия систем и во все тонкости, связанные с этим вопросом. В указанном мемуаре М. В. Остроградский впервые нашел условие

$$\frac{d(\delta x)}{dx}+\frac{d(\delta y)}{dy}+\frac{d(\delta z)}{dz}\geqq 0,$$

связывающее возможные перемещения всякой точки несжимаемой жидкости. При этом он использовал свой действенный метод рассмотрения произвольного объема, взятого в исследуемой жидкости, в отличие от принятого тогда способа выделения элементарных параллелепипедов. Применяя свою формулу перехода от интеграла, распространенного по поверхности, к интегралу, взятому по объему, ограниченному этой поверхностью, автор работы со всей изящностью и строгостью получил известные теперь классические условия равновесия несжимаемой жидкости. Он пишет: „Таким образом, для равновесия однородной жидкой массы, свободной от внешнего давления, необходимо, чтобы выражение $Xdx+Ydy+Zdz$ представляло собой полный диференциал и чтобы равнодействующая сил X, Y, Z была нормальной к поверхности в каждом элементе поверхности, и, вместе с тем, чтобы она была направлена внутрь жидкости". В конце мемуара М. В. Остроградский приводит так называемый им особый случай, когда второе из указанных условий не выполняется, несмотря на то, что равновесие имеет место. Это, как отмечает он, случай сферического слоя, находящегося под действием центральных сил притяжения.

В небольшой статье „О движении жидкости“, напечатанной в изданиях Академии наук в 1845 г., М. В. Остроградский рассматривает поверхностные условия жидкости, в связи с условием неразрывности для движущейся жидкости

Перейдем к вопросам, относящимся к теории притяжения, которые рассматриваются в работах М. В. Остроградского. В связи с этим, вспомним в первую очередь его мемуар „Об интеграле, встречающемся в теории притяжения сфероидов“. Результаты, содержащиеся в этом мемуаре, были доложены Остроградским на заседании Академии наук в 1828 г., в бытность его адъюнктом Академии наук, мемуар же опубликован в 1831 г. В указанной работе М. В. Остроградский излагает свой вывод уравнения Пуассона, найденный им независимо от доказательства Пуассона, которое ему стало известно значительно позже. В процессе исследований автор мемуара выводит величину диференциального параметра для Ньютоновского потенциала в случае нахождения точки внутри тела, а также на его поверхности. Здесь же рассматривается и случай особой точки поверхности. В своей работе М. В. Остроградский эффективно использует известный метод исследования кратных интегралов, когда подинтегральная функция обращается в бесконечность. Чтобы должным образом оценить значение данного мемуара, обратимся вкратце к истории вопроса. В конце XVIII века было введено в теорию притяжения понятие потенциальной функции. Тогда же Лапласом было замечено, что для сил, действующих по закону Ньютона, эта функция удовлетворяет уравнению в частных производных. Пуассон, исследуя это уравнение, показал в 1813 г., что оно оправдывает себя лишь в случае, когда притягиваемая точка лежит вне притягивающих ее масс. Для случая, когда точка лежит внутри притягивающего объема, должно существовать другое уравнение, которое он и вывел. М. В. Остроградский, независимо от Пуассона, вывел это же уравнение, вследствие чего оно должно связываться также с именем Остроградского. Об оригинальном методе, примененном впервые автором рассматриваемого нами мемуара, упоминается также в работах других выдающихся математиков того времени.

Остановимся еще на двух работах М. В. Остроградского, посвященных вопросу о взаимном намагничивании. Речь идет о его статьях, сданных для публикации 5 апреля и 12 мая 1839 г. и напечатанных в этом же году под одним заглавием „О взаимном намагничивании разобщенных брусков“.

В первой из указанных статей М. В. Остроградский решает задачу, поставленную физиком Б. С. Якоби, о намагничивании железных брусков. Задача состоит в следующем: даны железные бруски, расположенные по прямой линии, с сохранением равных расстояний между каждыми двумя смежными брусками. Крайние из брусков намагничиваются. Благодаря индукции намагничиваются и внутренние бруски. Ставится вопрос о нахождении состояния намагничивания для каждого из брусков в отдельности. М. В. Остроградский, решая эту задачу, показывает, что дело сводится к вычислению сумм некоторых степенных рядов. Однако такой метод решения указанной задачи не удовлетворяет автора работы и он далее сводит решение данной задачи к системе уравнений в конечных разностях. Такой подход весьма изящно и, вместе с тем, просто приводит к цели. Он получает общую формулу, дающую ответ на поставленный в задаче вопрос.

Во второй одноименной статье автор ставит более общую задачу, а именно: в расположении, указанном в первой задаче, намагничиваются не крайние бруски, а один из внутренних. Требуется определить состояние намагничивания каждого из остальных брусков. М. В. Остроградский показывает, что метод, разработанный им в его предыдущей статье, также легко приводит к решению задачи и во втором случае.

Эти две статьи свидетельствуют, что диапазон научных интересов М. В. Остроградского был чрезвычайно широк и что его внимание привлекали самые разнообразные вопросы математической физики. Он мастерски создавал наиболее общие и удобные подходы для решения рассматриваемых им задач и использовал в своих исследованиях действенный математический аппарат, который он зачастую сам строил применительно к задачам, подлежавшим решению.

Заслуживает внимания работа М. В. Остроградского, относящаяся к решению некоторых механических вопросов в задачах математической физики. Мы имеем в виду его исследование, поданное для публикации 13 мая 1842 г. и опубликованное в этом же году „О телах, которых все моменты инерции равны". Известно, что Лаплас в своей обширной работе по небесной механике установил условие, характеризующее однородные тела, имеющие одинаковые моменты инерции. М. В. Остроградский показывает в своем исследовании, что это условие распространяется также на гетерогенные тела, составленные из слоев равной поверхностной плотности. Он получает свой результат, привлекая для осуществления исследования весьма тонкий математический анализ. Ему удалось даже, исходя из поставленной задачи, получить уравнение поверхности искомых тел. Как выведенные результаты, так и сам процесс исследований привлекли тогда, а также и сейчас продолжают привлекать к себе внимание многих математиков и механиков.

Наряду с указанными задачами М. В. Остроградский уделил значительное внимание постановке и решению задач, относящихся к различным вопросам теории упругости. Среди работ в этой области следует отметить его мемуар „Об интегрировании диференциальных уравнений в частных производных малых колебаний упругих сред". Этот мемуар был представлен в Академию наук в 1829 г. и опубликован в ее изданиях в 1831 г. Подобного рода исследования интересовали как автора данного мемуара, так и других выдающихся математиков не только с точки зрения прикладных вопросов, но также с точки зрения развития соответствующих разделов анализа. После того, как был найден общий метод интегрирования одного уравнения любого порядка с одной искомой функцией, зависящей от любого числа переменных, и после того, как были выведены уравнения движения упругих тел, представленных совокупностью трех уравнений с тремя неизвестными функциями, возникла необходимость распространить метод, разработанный для одного уравнения, на этот более общий случай. Такая задача была решена Остроградским, Пуассоном и Коши, причем Остроградскому принадлежит первенство. Пуассон и Коши получили свои результаты после того, как Остроградский уже опубликовал свой мемуар. Об этом говорит Пуассон в своей работе, напечатанной несколько позже.

В своем мемуаре М. В. Остроградский решил так называемую задачу Коши для динамических уравнений теории упругости. Следует отметить, что уравнения, рассматриваемые в мемуаре, с современной точки зрения требуют корректировки, ибо они связаны со старой теорией Навье—Пуассона, в соответствии с которой считалось, что коэфициенты Ляме λ, μ для упругого изотропного тела равны между собой. Впоследствии это положение, как известно, было исправлено.

Метод, которым пользовался Остроградский, является весьма общим и полностью может быть перенесен на системы диференциальных уравнений с постоянными коэфициентами. Хотя рассуждения, приводимые автором работы, согласно с тогдашними математическими позициями, не удовлетворяют сейчас всем требованиям строгости, так как, например, Остроградский не исследует сходимости интегралов, которыми представляется решение задачи, однако, окончательный результат правилен. Это свидетельствует о том, что у Остроградского имелось глубокое понимание как вопросов физики, так и математических основ рассматриваемых им явлений. Заслуживают особого внимания две последние страницы мемуара. Получив решение поставленной задачи, М. В. Остроградский исследует случай, когда начальные данные равны везде нулю, за исключением некоторого объема. Простое рассуждение дает ему возможность выявить, что для уравнений теории упругости в трехмерном пространстве имеет место так называемый принцип Гюйгенса. Известно, что строгая трактовка этих вопросов начала интересовать математиков значительно позже и что эти вопросы нашли свое блестящее завершение в выдающихся работах академика И. Г. Петровского, — имеем в виду его замечательное исследование: „О диффузии волн и лакунах для системы гиперболических уравнений“ (Известия АН СССР, серия матем., № 8, 1944; Матем. сб. 17 (51), 1945 г.).

В 1833 г. М. В. Остроградский опубликовал самый обширный из своих мемуаров по математической физике „Об интегрировании диференциального уравнения в частных производных малых колебаний упругих тел“, в котором он получил общие выражения для упругих смещений при колебаниях тела, удовлетворяющих уравнениям упругости. Задача решается с помощью кратных интегралов и теоремы Фурье в самом общем виде, при произвольно заданных начальных условиях. В этом мемуаре он показал себя блестящим знатоком математической теории упругости и тонким исследователем в вопросах применения анализа к решению актуальных прикладных задач. Здесь далеко продвинуты вперед его предыдущие исследования по теории упругости.

§ 4. Некоторые замечания относительно исследований М. В. Остроградского в области вариационного исчисления, в связи с его работами по математической физике

В связи с рассмотрением трудов М. В. Остроградского по вопросам математической физики нельзя не остановиться на его исследованиях по вариационному исчислению. О применении им вариационных принципов в механике мы уже кратко отмечали в соответствующем месте данной работы, здесь же мы проанализируем его мемуар, написанный в 1834 г., „О вычислении вариаций многократных интегралов". До появления этой работы вариационное исчисление в том виде, в каком оно вышло из рук Эйлера и Лагранжа, давало ответ лишь на вопрос о нахождении вариации простого интеграла, вычисление же вариации кратных интегралов и даже двойного интеграла представляло тогда значительные затруднения. В работах некоторых математиков были предприняты попытки дать частичный ответ на этот вопрос, однако коренного сдвига в решении данной задачи не было. М. В. Остроградский решил полностью эту задачу. Он вывел вариацию кратных интегралов, а также дал ее преобразование к виду, удобному для различных приложений. В этом же мемуаре он получил общее выражение для вариации частной производной функции, зависящей от любого числа независимых переменных, а также для вариации сложного выражения, содержащего эту функцию и ее частные производные любого порядка. Выводы М. В. Остроградского отличаются исключительной простотой, сочетающейся с нужной общностью. В указанной работе Остроградский вывел также две свои формулы, имеющие важное значение при решении многих задач математической физики. Обе формулы должны, безусловно, носить имя Остроградского. Одна из этих формул относится к преобразованию n-кратного интеграла в $(n-1)$-кратный, а вторая служит для диференцирования кратного интеграла по параметру.

§ 5. Работы М. В. Остроградского по вопросам баллистики

Говоря об исследованиях М. В. Остроградского в области математической обработки физических явлений, нельзя не отметить его работ по баллистике. Как известно, в юношеские годы Остроградский страстно стремился определиться на военную службу. Став выдающимся математиком Остроградский не потерял интереса к военному делу и в конце тридцатых и начале сороковых годов XIX ст. он занялся вопросами внешней баллистики, написав три мемуара в этой области, чем внес важный вклад в дело укрепления мощи русской армии. Первые теоретические исследования и экспериментальные проверки по вопросам баллистики были произведены им по заданию военного ведомства и относились к теории стрельбы регулированными снарядами. Работы М. В. Остроградского в области баллистики имеют такие названия: 1. „Заметки о движении сферического снаряда в среде, оказывающей сопротивление", 2. „Мемуар о движении сферического снаряда в воздухе“, 3. „Таблицы для облегчения вычисления траектории, описываемой телом в среде, оказывающей сопротивление“. В первых двух мемуарах Остроградский изучает движение центра тяжести и вращение сферического снаряда, геометрический центр которого не совпадает с центром тяжести. Он выводит диференциальные уравнения задачи, в которых участвуют коэфициенты, зависящие от сопротивления воздуха. Эти коэфициенты, по мысли автора, должны быть определены путем экспериментальных исследований. Формулы, полученные Остроградским, имеют достаточно общий вид, и соответствующие формулы Пуассона являются лишь их частным случаем, а именно при эксцентричности снаряда, равной нулю. В третьей из работ М. В. Остроградского по вопросам баллистики разработаны таблицы, относящиеся к функции

$$\Phi(\theta) = 2\int \frac{d\theta}{\sin^3\theta},$$

часто встречающейся в задачах баллистики и играющей в них важную роль.

В конце 1842 г. М. В. Остроградский сделал в Академии наук доклад на тему „О влиянии выстрела на лафет пушки“. Исследования в области баллистики привели Остроградского к оценке остаточного члена формулы суммирования Эйлера-Маклорена. Его заинтересованность баллистикой не ограничивалась исследованиями в этой области. Он также в течение некоторого времени читал лекции по вопросам баллистики в Артиллерийской академии.

§ 6. Заключение

Наш краткий обзор научных трудов М. В. Остроградского в области математической физики и в смежных областях ни в коей мере не претендует на полноту и исчерпанность. Он является лишь весьма сжатым очерком основных исследований выдающегося отечественного математика в рассматриваемых нами вопросах. Мы считаем, что исследованиям М. В. Остроградского должна быть посвящена отдельная монография, в которой был бы дан полный анализ его работ и исчерпывающее представление о тех блестящих достижениях, какие более века тому назад получил знаменитый ученый, научная деятельность которого сыграла направляющую роль в дальнейшем развитии отечественной математики. Его заслугой является то, что, продолжая славные традиции М. В. Ломоносова, он закрепил целеустремляющее направление в исследованиях наших отечественных математиков, состоящее во взаимном сочетании глубокой математической теории и важных практических приложений. В своих многочисленных выдающихся работах он многими своими результатами значительно опередил иностранных математиков, работавших в этих же областях исследований. Он всегда глубоко проникал в рассматриваемые явления, с большим математическим умением находил характерную сущность задачи, мастерски применял математический аппарат, создавая новые построения, новые методы и способы для достижения поставленной цели. При решении задач он не довольствовался рассмотрением отдельных частных случаев, а его всегда привлекало наиболее общее решение рассматриваемых проблем.

Весьма яркую оценку научной деятельности М. В. Остроградского дал гениальный русский математик П. Л. Чебышев в письме к академику П. М. Фуссу, в котором, говоря о своем первом мемуаре относительно одного класса определенных кратных интегралов, связанного с задачей интегрирования уравнений математической физики, он писал: „Когда я занимался интегральным исчислением перед экзаменом на степень магистра философии, то проблема, решение которой я даю в моем мемуаре, возникла у меня сама собою и я попытался ее решить, хотя и знал, что М. В. Остроградский уже занимался этим вопросом. Я не могу соперничать с этим знаменитым геометром в тонкости анализа, но проблема сама по себе достаточно интересна, чтобы вызвать, может быть, некоторое снисхождение по отношению к недостаткам метода и выражения". Вся научная и педагогическая деятельность М. В. Остроградского заслуживает самого широкого освещения перед общественностью к чести и славе нашей отечественной науки.

М. В. Остроградский является выдающимся представителем передовой научной мысли. Наша отечественная наука развилась и расцвела во всю свою мощь и силу лишь при Советской власти, благодаря неустанным заботам о науке нашей славной большевистской партии, нашего вождя и учителя, великого корифея науки — любимого и родного товарища Сталина.

Получена 26 октября 1951 г.
Львов