1952 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. IV, № 1
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

О двоякопериодических векторногладких функциях

Г. Е. Шилов

1. Пусть в некоторой области G на плоскости вещественных переменных s и t задана непрерывная комплексно-значная функция $\underline{w}(s, t) = u(s, t) + iv(s, t)$ или, что то же самое, плоское векторное поле $\overline{w} = \{u, v\}$. Пусть, далее, L замкнутый кусочногладкий контур, расположенный целиком в области G, S — площадь, ограниченная этим контуром, $\overline{n}$ — единичный вектор внешней нормали, $\overline{\tau}$ — единичный касательный вектор, полученный вращением вектора $\overline{n}$ на 90° против часовой стрелки. Пределы (если они существуют)

$$\operatorname{div} w = \lim \frac{1}{S} \oint_L (\overline{w}, \overline{n})\, dl, \quad \operatorname{rot} w = \lim \frac{1}{S} \oint (\overline{w}, \overline{\tau})\, dl, \tag{1.1}$$

составленные для контура L, по длине стремящегося к нулю и при этом все время заключающего некоторую фиксированную точку M_0, как известно, называются соответственно *дивергенцией* и *ротором* поля w в точке M_0. Функция $w(s, t)$ называется векторногладкой, если ее дивергенция и ротор существуют в каждой точке $M_0 \in G$ и представляют собою непрерывные функции в области G.

Отметим следующие свойства векторногладких функций (доказанные в [1]):

Теорема 1. *Всякая линейная комбинация $w = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$ векторногладких функций w_1 и w_2 (с произвольными комплексными коэфициентами) является также векторногладкой функцией.*

Теорема 2. *Пусть дана последовательность векторногладких функций $w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots$ и известно, что на любом замкнутом множестве $F \subset G$ при $n \to \infty$*

а) *функции w_n равномерно сходятся к некоторой функции w,*

б) *функции $\operatorname{div} w_n$ равномерно сходятся к некоторой функции φ,*

в) *функции $\operatorname{rot} w_n$ равномерно сходятся к некоторой функции ψ.*

Тогда w — векторногладкая функция и $\varphi = \operatorname{div} w$, $\psi = \operatorname{rot} w$.

Теорема 3. *Для всякой векторногладкой функции w и всякого кусочногладкого замкнутого контура L имеют место формулы Остроградского*

$$\oint_L (\overline{w}, \overline{n})\, dl = \iint_S \operatorname{div} w\, d\sigma, \quad \oint_L (\overline{w}, \overline{\tau})\, dl = \iint_S \operatorname{rot} w\, d\sigma, \tag{1.2}$$

где S — область, ограниченная контуром L.

Теорема 4. *Всякая функция $w(s, t) = v(s, t) + iv(s, t)$, имеющая в области G непрерывные частные производные по s и t, — векторногладкая, причем*

$$\operatorname{div} w = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \operatorname{rot} w = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{1.3}$$

Теорема 5. *Если $\mu(s, t)$ и $\nu(s, t)$ непрерывные вещественные функции, равные нулю на контуре L, ограничивающем область S, то функция*

$$W(s, t) = \frac{1}{2\pi}\left[\iint_S \mu(\xi, \eta)\frac{\partial}{\partial s}\ln\frac{1}{\sqrt{(s-\xi)^2+(t-\eta)^2}}\,d\xi\,d\eta + \right.$$

$$\left. + i\iint_S \mu(\xi, \eta)\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{1}{\sqrt{(s-\xi)^2+(t-\eta)^2}}\,d\xi\,d\eta\right] +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\left[-\iint_S \nu(\xi, \eta)\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{1}{\sqrt{(s-\xi)^2+(t-\eta)^2}}\,d\xi\,d\eta + \right.$$

$$\left. + i\iint_S \nu(\xi, \eta)\frac{\partial}{\partial s}\ln\frac{1}{\sqrt{(s-\xi)^2+(t-\eta)^2}}\,d\xi\,d\eta\right]$$

векторногладкая, причем

$$\operatorname{div} W(s, t) = \mu(s, t), \quad \operatorname{rot} W(s, t) = \nu(s, t).$$

Теорема 6. *Если дивергенция и ротор векторногладкой функции $w(s, t)$ тождественно обращаются в нуль в области G, то $w(s, t)$ аналитическая функция переменного $s + it$* в области G.

Теорема 5 позволяет восстановить векторногладкую функцию по ее дивергенции и ротору при условии, что они обращаются в нуль на контуре области. Теорема 6 показывает, что это восстановление производится с точностью до аналитического слагаемого.

2. В дальнейшем мы будем рассматривать *двоякопериодические* векторногладкие функции с периодом 2π по s и t. В этом случае дивергенция и ротор функции $w(s, t)$ также являются двоякопериодическими функциями, и, что уже более существенно, *определяют исходную функцию $w(s, t)$ с точностью до аддитивной константы*. Действительно, если бы существовали две двоякопериодические векторногладкие функции w_1 и w_2, такие, что $\operatorname{div} w_1 = \operatorname{div} w_2$ $\operatorname{rot} w_1 = \operatorname{rot} w_2$ то для двоякопериодической функции $w = w_1 - w_2$ мы имели бы $\operatorname{div} w = \operatorname{rot} w = 0$ следовательно, функция w была бы двоякопериодической аналитической функцией, т. е. в силу теоремы Лиувилля константой.

Настоящая заметка посвящена решению следующей задачи.

Даны две двоякопериодические вещественные функции $\mu(s, t)$ и $\nu(s, t)$. Узнать, существует ли двоякопериодическая векторногладкая функция $w(s, t)$, для которой $\mu = \operatorname{div} w$, $\nu = \operatorname{rot} w$, и дать способ ее построения, если она существует.

3. Заметим, что всякую непрерывную двоякопериодическую функцию $w(s, t)$ с периодом 2π по s и t можно считать непрерывной функцией, заданной на торе, причем s и t играют роль циклических координат на торе; и обратно — всякая непрерывная функция $w(s, t)$, заданная на торе, однозначно соответствует непрерывной двоякопериодической функции переменных s и t с периодом 2π по каждой из этих переменных. Поэтому вместо того, чтобы говорить о непрерывных двоякопериодических функциях, мы в дальнейшем будем говорить о непрерывных функциях на торе.

Для каждой векторногладкой функции $w = u + iv$ мы будем объединять ее дивергенцию $\mu(s, t)$ и ротор $\nu(s, t)$ в одну комплексную функцию $\omega = \mu + i\nu$; функцию $w(s, t)$ будем называть *первообразной* по отношению к $\omega(s, t)$.

Покажем, что дивергенция и ротор векторногладкой функции $w(s, t)$ на торе T всегда удовлетворяют условиям

$$\iint\limits_T \operatorname{div} w\, ds\, dt = 0, \quad \iint\limits_T \operatorname{rot} w\, ds\, dt = 0 \tag{3.1}$$

или, что то же самое,

$$\iint \omega(s, t)\, ds\, dt = 0$$

и не могут быть, таким образом, совершенно произвольными непрерывными функциями.

Для доказательства, например, первого из соотношений (3.1) проведем контур L, разделяющий тор T на две области G_1 и G_2 (например, контур L может быть образован двумя параллелями тора). Применяя теорему Остроградского к областям G_1 и G_2, мы получаем

$$\iint\limits_{G_1} \operatorname{div} w(s, t)\, ds\, dt = \int\limits_L (\overline{w}, \overline{n})\, dl = -\iint\limits_{G_2} \operatorname{div} w(s, t)\, ds\, dt.$$

Отсюда вытекает, что

$$\iint\limits_T \operatorname{div} w(s, t)\, ds\, dt = \iint\limits_{G_1} \operatorname{div} w\, ds\, dt + \iint\limits_{G_2} \operatorname{div} w\, ds\, dt = 0,$$

что и требовалось.

Второе из соотношений (3.1) доказывается совершенно аналогично.

В дальнейшем всякую функцию $\omega(s, t) = \mu(s, t) + i\nu(s, t)$, непрерывную на торе T и удовлетворяющую условию

$$\iint\limits_T \mu(s, t)\, ds\, dt = \iint\limits_T \nu(s, t)\, ds\, dt = 0, \tag{3.2}$$

будем называть *допустимой*.

4. Пусть на торе T задана допустимая функция $\omega = \mu + i\nu$, составляющие которой разлагаются в абсолютно сходящиеся ряды Фурье:

$$\mu(s, t) = \sum_{m,\, n=-\infty}^{\infty} i\mu_{mn} e^{i(ms+nt)}, \tag{4.1}$$

$$\nu(s, t) = \sum_{m,\, n=-\infty}^{\infty} i\nu_{mn} e^{i(ms+nt)}, \tag{4.2}$$

где

$$\sum_{m,n} |\mu_{mn}| < \infty, \quad \sum_{m,n} |\nu_{mn}| < \infty. \tag{4.3}$$

Условия допустимости (3.2) эквивалентны в данном случае требованию $\mu_{00} = \nu_{00} = 0$. Коэфициенты i поставлены для удобства дальнейших выкладок.

Покажем, что на торе T существует векторногладкая функция $w(s, t) = u(s, t) + iv(s, t)$, для которой

$$\operatorname{div} w = \mu, \quad \operatorname{rot} w = \nu.$$

Будем искать функции $u(s, t)$ и $v(s, t)$ в виде рядов Фурье:

$$u(s, t) = \sum_{m,n} A_{mn} e^{i(ms+nt)}, \quad v(s, t) = \sum_{m,n} B_{mn} e^{i(ms+nt)}. \tag{4.4}$$

Предполагая законным почленное диференцирование рядов (4.4), построим частные производные

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial s} &= \sum_{m,n} im A_{mn} e^{i(ms+nt)}, & \frac{\partial u}{\partial t} &= \sum_{m,n} in A_{mn} e^{i(ms+nt)} \\ \frac{\partial v}{\partial s} &= \sum_{m,n} im B_{mn} e^{i(ms+nt)}, & \frac{\partial v}{\partial t} &= \sum_{m,n} in B_{mn} e^{i(ms+nt)} \end{aligned}\right\}, \tag{4.5}$$

откуда

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = \sum_{m,n} i(mA_{mn} + nB_{mn}) e^{i(ms+nt)}, \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{m,n} i(mB_{mn} - nA_{mn}) e^{i(ms+nt)}. \tag{4.7}$$

Приравнивая ряды (4.6) и (4.7) рядам (4.1)—(4.2), мы можем составить уравнения

$$\mu_{mn} = mA_{mn} + nB_{mn}, \quad \nu_{mn} = mB_{mn} - nA_{mn}.$$

Разрешая эти уравнения относительно величин A_{mn} и B_{mn}, мы получим

$$A_{mn} = \frac{m\mu_{mn} - n\nu_{mn}}{m^2 + n^2}, \tag{4.8}$$

$$B_{mn} = \frac{n\mu_{mn} + m\nu_{mn}}{m^2 + n^2}. \tag{4.9}$$

Таким образом, значения коэфициентов в формулах (4.4), найдены. Теперь мы можем провести строгое рассуждение. Как только нам даны ряды (4.1)—(4.2), мы построим по формулам (4.8), (4.9) коэфициенты A_{mn} и B_{mn} (для $m^2 + n^2 \neq 0$; но если $m^2 + n^2 = 0$, то по условию $\mu_{00} = \nu_{00} = 0$, и мы можем взять A_{00} и B_{00} произвольно; будем полагать $A_{00} = B_{00} = 0$); далее по коэфициентам A_{mn} и B_{mn} построим ряды (4.4). Эти ряды, очевидно, сходятся абсолютно и представляют собою некоторые непрерывные функции $u(s, t)$ и $v(s, t)$ на торе T. Диференцируя почленно ряды (4.4), мы придем к рядам (4.5) также, очевидно, сходящимся абсолютно; в силу известных теорем анализа частные производные $\frac{\partial u}{\partial s}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial s}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$ существуют и непрерывны. В силу теоремы 4, функция $w = u + iv$ является векторногладкой, и ее дивергенцию и ротор можно вычислить по формуле (1.3). Комбинируя соответствующие ряды и подставляя значения A_{mn} и B_{mn} из (4.8)—(4.9), мы получим, что

$$\operatorname{div} w = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = \sum_{m,\, n} \mu_{mn} e^{i(ms+nt)} = \mu(s, t),$$

$$\operatorname{rot} w = \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{m,\, n} \nu_{mn} e^{i(ms+nt)} = \nu(s, t),$$

что и требуется.

Наше исследование требует уточнения еще в одном пункте. А именно, необходимо убедиться, что построенные нами функции $u(s, t)$ и $v(s, t)$ вещественны. Необходимым и достаточным условием вещественности всякой функции $f(s, t) = \sum\limits_{m,\, n} f_{mn} e^{i(ms+nt)}$ является выполнение равенства [1]

$$\overline{f(s,\, t)} = \sum_{m,\, n} \overline{f}_{mn} e^{-i(ms+nt)} = f(s, t) = \sum_{m,\, n} f_{mn} e^{i(ms+nt)} =$$

$$= \sum_{m,\, n} f_{-m,\, -n} e^{-i(ms+nt)}$$

или

$$f_{-m,\, -n} = \overline{f}_{mn}.$$

В частности, если положить $f(s, t) = \mu(s, t)$, $f_{mn} = i\mu_{mn}$, мы получим

$$i\mu_{-m,\, -n} = \overline{i\mu_{mn}} = i\overline{\mu}_{mn},$$

откуда $\mu_{-m,\, -n} = -\overline{\mu}_{mn}$. Аналогично, $\nu_{-m,\, -n} = -\overline{\nu}_{mn}$. Эти равенства имеют место потому, что функции $\mu(s, t)$ и $\nu(s, t)$ по предположению вещественны. Вычислим теперь коэфициенты $A_{-m,\, -n}$ и $B_{-m,\, -n}$:

$$A_{-m,\, -n} = \frac{-m\mu_{-m,\, -n} + n\nu_{-m,\, -n}}{m^2 + n^2} = \frac{m\overline{\mu}_{mn} - n\overline{\nu}_{mn}}{m^2 + n^2} = \overline{A}_{mn},$$

$$B_{-m,\, -n} = \frac{-n\mu_{-m,\, -n} - m\nu_{-m,\, -n}}{m^2 + n^2} = \frac{n\overline{\mu}_{mn} + n\overline{\nu}_{mn}}{m^2 + n^2} = \overline{B}_{mn};$$

таким образом, условие вещественности функции $u(s, t)$ и $v(s, t)$ выполнено, и наше построение тем самым оправдано.

Итак, мы показали, что *для любой допустимой функции* $\omega(s, t) = \mu(s, t) + i\nu(s, t)$, *где* $\mu(s, t)$ *и* $\nu(s, t)$ *имеют абсолютно сходящиеся ряды Фурье, существует первообразная функция.*

5. В этом пункте мы рассмотрим одну задачу, касающуюся функций на торе, решение которой будет впоследствии использовано.

Рассмотрим на торе T круговую полосу π, выделяемую неравенствами $\varrho_0^2 \leqslant s^2 + t^2 \leqslant \varrho_1^2 < \pi$; обозначим через A совокупность всех функ-

[1] В следующей далее выкладке черта сверху означает переход к комплексно-сопряженной величине.

ций $w(s, t)$, определенных в полосе π, непрерывных в ней и аналитических (относительно переменного $z = s + it$) в каждой внутренней точке.

Допустим, что некоторая функция $w(s, t) \in A$ может быть представлена в форме

$$w(s, t) = w_1(s, t) - w_2(s, t), \tag{5.1}$$

где $w_1(s, t)$ — функция, аналитическая всюду внутри круга $|z| < \varrho_1$ (и непрерывная в замкнутом круге $|z| \leqslant \varrho_1$), а функция $w_2(s, t)$ — аналитическая (на торе) всюду вне круга $|z| \leqslant \varrho_0$ (и непрерывная также и при $|z| \leqslant \varrho_0$). Покажем, что *это разложение* — при добавочном условии $w_1(0, 0) = 0$ — *возможно осуществить лишь единственным образом.*

Действительно, если бы мы имели два аналогичных разложения $w = w_1 - w_2 = w_1^* - w_2^*$, то, вычитая почленно, мы получили бы для точек полосы π

$$w_1 - w_1^* = w_2 - w_2^*. \tag{5.2}$$

Функция $w_1 - w_1^*$ аналитична внутри круга $|z| < \varrho_1$, функция $w_2 - w_2^*$ аналитична вне круга $|z| < \varrho_0$, и на общей части этих кругов обе эти функции, как показывает равенство (5.2), совпадают. Но в таком случае мы имеем здесь дело с одной единой аналитической функцией на торе; в силу теоремы Лиувилля такая функция есть константа. Так как $w_1(0,0) = w_1^*(0,0) = 0$, то эта константа есть нуль; отсюда $w_1 \equiv w_1^*$, $w_2 \equiv w_2^*$, что и означает единственность разложения (5.1). Мы можем поэтому построить оператор, определенный на функциях семейства A (может быть, не на всех) и приводящий в соответствие функции $u \in A$ пару функций w_1 и w_2, фигурирующих в разложении (5.1); каждая из них принадлежит тому же семейству A. Этот оператор, очевидно, аддитивный и однородный; покажем, что он является также и *ограниченным*, т. е. что *для любой функции* $w \in A$, *допускающей разложение* (5.1) *имеет место неравенство*

$$\max_{\varrho_0 \leqslant |z| \leqslant \varrho_1} |w_1(s, t)| + \max_{\varrho_0 \leqslant |z| \leqslant \varrho_1} |w_2(s, t)| \leqslant K \max_{\varrho_0 \leqslant |z| \leqslant \varrho_1} |w(s, t)|,$$

где K — константа, не зависящая от выбора функции $w(s, t)$.

Предположим противное: пусть наш оператор не является ограниченным. В таком случае мы сможем указать последовательность функций $w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots, w^{(n)}, \ldots$ из семейства A, равномерно (в полосе π) стремящуюся к нулю, для которой соответствующие функции $w_1^{(n)}$ и $w_2^{(n)}$ таковы, что

$$\max_{\varrho_0 \leqslant |z| \leqslant \varrho_1} |w_1^{(n)}(s, t)| + \max_{\varrho_0 \leqslant |z| \leqslant \varrho_1} |w_2^{(n)}(s, t)| = 1. \tag{5.3}$$

Последовательность функций $w_1^{(n)}(s, t)$ ограничена в полосе π; в силу принципа компактности Монтеля ([2], стр. 293) она содержит подпоследовательность, которая в полосе $\pi_1 = \{(\varrho_0 + h)^2 \leqslant s^2 + t^2 \leqslant (\varrho_1 - h)^2\}$ равномерно сходится к некоторой аналитической функции $w_1(s, t)$; точно таким же образом и последовательность $w_2^{(n)}(s, t)$ содержит последовательность, которая в полосе π_1 равномерно сходится к некоторой аналитической функции $w_2(s, t)$. Отбрасывая излишние функции и изменяя нумерацию, можно добиться того, чтобы выполнялись предельные соотношения $w_1^{(n)} \to w_1$, $w_2^{(n)} \to w_2$. Разность $w_1^{(n)} - w_2^{(n)} = w^{(n)}$ по условию в полосе π равномерно сходится к нулю; отсюда вытекает, что в полосе π_1 мы имеем $w_1(s, t) \equiv w_2(s, t)$. С другой стороны, все функции $w_1^{(n)}(s, t)$ аналитичны в круге $|z| < \varrho_1$; из равномерной сходимости их в полосе π_1 в силу принципа максимума вытекает равномерная сходимость во всем круге $|z| \leqslant \varrho_1 - h$. Поэтому функция $w_1(s, t)$ аналитически продолжается внутрь этого круга. Аналогично функция $w_2(s, t)$ аналитически продолжается во внешнюю часть круга $|z| < \varrho_0 + h$. Таким образом, функции w_1 и w_2 образуют единую аналитическую функцию во всем торе T. Но такая функция, как уже говорилось выше (и с учетом условия $w_1(0, 0) = \lim w_1^{(n)}(0, 0) = 0$), есть тождественный нуль. Итак, функции $w_1^{(n)}(s, t)$ и $w_2^{(n)}(s, t)$ в полосе π_1 равномерно сходятся к нулю. В силу принципа максимума функции $w_1^{(n)}(s, t)$ равномерно сходятся к нулю и в полосе $\varrho_0 \leqslant |z| \leqslant \varrho_0 + h$; но тогда в этой полосе сходятся равномерно к нулю и функции $w_2^{(n)} = w^{(n)} - w_1^{(n)}$. Аналогично в полосе $\varrho_1 - h \leqslant |z| \leqslant \varrho_1$ сходится равномерно к нулю по принципу максимума последовательность $w_2^{(n)}(s, t)$ и в силу равенства $w_1^{(n)} = w^{(n)} + w_2^{(n)}$ также последовательность $w_1^{(n)}(s, t)$. В результате мы получаем, что последовательности $w_1^{(n)}(s, t)$ и $w_2^{(n)}(s, t)$ сходятся равномерно к нулю при $\varrho_0 \leqslant |z| \leqslant \varrho_1$, что противоречит равенству (5.3). Таким образом, ограниченность рассматриваемого оператора доказана.

6. Рассмотрим допустимую функцию $\omega(s, t) = \mu(s, t) + i\nu(s, t)$, удовлетворяющую условиям п. 4 и, кроме того, обращающуюся в нуль вне некоторого круга $U = \{|z| \leqslant \varrho_0\}$; через $w(s, t)$ обозначим соответствующую первообразную функцию; в частности, по построению п. 4 имеем $u(0, 0) = 0$.

Построим на s—t-плоскости векторногладкую функцию

$$W(s, t) = \frac{1}{2\pi}\left[\iint_U \mu \frac{\partial}{\partial s} \ln\frac{1}{R}\, d\xi\, d\eta + i \iint_U \mu \frac{\partial}{\partial t} \ln\frac{1}{R}\, d\xi\, d\eta\right] +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\left[-\iint_U \nu \frac{\partial}{\partial t} \ln\frac{1}{R}\, d\xi\, d\eta + i \iint_U \nu \frac{\partial}{\partial s} \ln\frac{1}{R}\, d\xi\, d\eta\right] + C, \tag{6.1}$$

где $R^2 = (s-\xi)^2 + (t-\eta)^2$, а константа C определена из условия $W(0, 0) = 0$. В силу теоремы 5, функция $W(s, t)$ обладает свойствами

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} W(s, t) &= \mu(s, t) \\ \operatorname{rot} W(s, t) &= \nu(s, t) \end{aligned}\right\} \text{ при } (s, t) \in U. \tag{6.2}$$

Вне круга U во всей s—t-плоскости $\operatorname{div} W = \operatorname{rot} W = 0$, и, следовательно (теорема 6), функция $W(s, t)$ вне круга U является аналитической функцией переменного $z = s + it$.

На s—t-плоскости функцию $w(s, t)$ можно рассматривать как некоторую двоякопериодическую функцию с периодами 2π по s и t. Для значений $\varrho_0 < \sqrt{s^2 + t^2} < \varrho_1 < \pi$ она является аналитической функцией от $z = s + it$, поскольку в указанной полосе $\operatorname{div} w = \operatorname{rot} w = 0$. Образуем разность $w^* = w - W$. На s—t-плоскости функция w^* является векторногладкой (уже не двоякопериодической); всюду внутри круга $|z|<\varrho_1$ мы имеем $\operatorname{div} w^* = \operatorname{div} w - \operatorname{div} W = 0$, $\operatorname{rot} w^* = \operatorname{rot} w - \operatorname{rot} W = 0$, и поэтому внутри круга $|z| < \varrho_1$ функция $w^*(s,t)$ является аналитической.

В итоге в полосе $\varrho_0 \leqslant |z| \leqslant \varrho_1$ мы можем представить функцию $W(s,t)$ в виде разности двух функций

$$W(s, t) = w(s, t) - w^*(s, t);$$

первая из них аналитична (на торе) всюду вне круга $|z| \leqslant \varrho_0$; вторая — аналитична внутри круга $|z| \leqslant \varrho_1$, причем $w^*(0, 0) = w(0, 0) - W(0, 0) = 0$. В силу доказанного в п. 5, мы имеем в полосе $\varrho_0 \leqslant |z| \leqslant \varrho_1$

$$\max |w(s, t)| \leqslant K \max |W(s, t)|, \tag{6.3}$$

$$\max |w^*(s, t)| \leqslant K \max |W(s, t)|. \tag{6.4}$$

Поскольку функции $\dfrac{\partial}{\partial s} \ln \dfrac{1}{R}$ и $\dfrac{\partial}{\partial t} \ln \dfrac{1}{R}$ абсолютно интегрируемы, для функции $W(s,t)$ мы в свою очередь можем написать неравенства

$$\max_{|z|\leqslant\varrho_1} |W(s, t)| \leqslant K_1 (\max |\mu(s, t)| + \max |\nu(s, t)|) \leqslant K_2 \max |\omega(s, t)|. \tag{6.5}$$

Неравенства (6.3)—(6.5), как следствие, дают:

$$\max_{\varrho_0\leqslant|z|\leqslant\varrho_1} |w(s, t)| \leqslant K_3 \max_{\varrho_0\leqslant|z|\leqslant\varrho_1} |\omega(s, t)|,$$

$$\max_{\varrho_0\leqslant|z|\leqslant\varrho_1} |w^*(s, t)| \leqslant K_3 \max_{\varrho_0\leqslant|z|\leqslant\varrho_1} |\omega(s, t)|. \tag{6.6}$$

Поскольку функция $w(s,t)$ аналитична на торе T всюду вне круга $|z| \leqslant \varrho_0$, по принципу максимума неравенство (6.3) остается верным всюду вне этого круга

$$\max_{(\text{вне круга } |z|\leqslant\varrho_0)} |w(s, t)| \leqslant K \max_{\varrho_0\leqslant|z|\leqslant\varrho_1} |W(s, t)|. \tag{6.7}$$

Аналогично функция $w^*(s,t)$ аналитична всюду внутри круга $|z| \leqslant \varrho_1$, и неравенство (6.4) остается верным всюду внутри этого круга

$$\max_{|z|\leqslant\varrho_1} |w^*(s, t)| \leqslant K \max_{\varrho_0\leqslant|z|\leqslant\varrho_1} |W(s, t)|. \tag{6.8}$$

Для функции $w(s,t)$ внутри круга $|z| \leqslant \varrho_0$ мы имеем

$$w(s, t) = w^*(s, t) + W(s, t),$$

откуда, в силу неравенств (6.8) и (6.5),

$$\max_{|z|\leqslant\varrho_0} |w(s, t)| \leqslant \max_{|z|\leqslant\varrho_0} |w^*(s, t)| + \max_{|z|\leqslant\varrho_0} |W(s, t)| \leqslant$$
$$\leqslant K_4 \max |\omega(s, t)|. \tag{6.9}$$

Неравенства (6.7) и (6.9) показывают, что

$$\max_T |w(s, t)| \leqslant K_5 \max_T |\omega(s, t)| \tag{6.10}$$

для всех функций $\omega(s,t)$ рассматриваемого класса. Поэтому оператор, переводящий функцию $\omega(s,t)$ в ее первообразную $w(s,t)$, можно распространить на все функции, являющиеся пределами равномерно сходящихся последовательностей функций $\omega(s, t)$ рассматриваемого класса, что мы и сделаем в следующем пункте.

7. Пусть функция $\omega(s, t) = \mu(s, t) + i\nu(s, t)$ — произвольная непрерывная допустимая функция на торе T, равная нулю вне некоторого круга $|z| \leqslant \varrho_0 - \delta$, $\delta > 0$.

Пусть $h(s, t)$ есть достаточно гладкая функция, в частности с абсолютно сходящимся разложением в ряд Фурье, равная единице внутри круга $|z| \leqslant \varrho_0 - \delta$ и нулю вне круга $|z| \leqslant \varrho_0$. Можно образовать последовательность тригонометрических полиномов $\tilde{\omega}_n(s, t)$, равномерно сходящуюся на торе T к функции $\omega(s, t)$. Произведения $\omega_n(s, t) = h(s, t)\tilde{\omega}_n(s, t) = \mu_n(s, t) + i\nu_n(s, t)$, имеющие абсолютно сходящиеся разложения в ряд Фурье, обращаются в нуль вне круга $|z| \leqslant \varrho_0 - \delta$, а внутри этого круга, следовательно и на всем торе T, — равномерно сходятся к функции $\omega(s, t)$. В силу теоремы, доказанной в п. 6, мы можем построить последовательность векторногладких функций $w_n(s, t)$, удовлетворяющих условиям $w_n(0, 0)=0$, $\operatorname{div} w_n = \mu_n$, $\operatorname{rot} w_n = \nu_n$, причем эта последовательность будет равномерно сходящейся на торе T. Пусть $w(s, t)$ есть ее предел; в силу теоремы 2, мы имеем $\operatorname{div} w = \mu(s, t)$, $\operatorname{rot} w = \nu(s, t)$.

Итак, для всякой допустимой функции $\omega(s, t)$, равной нулю вне некоторого круга, существует первообразная $w(s, t)$, которая может быть получена путем простого предельного перехода из векторногладких функций $w_n(s, t)$, удовлетворяющих условиям п. 4.

В неравенстве (6.10), написанном для функции $w_n(s, t)$,

$$\max_T |w_n(s, t)| \leqslant K_5 \max_T |\omega_n(s, t)|,$$

можно перейти к пределу при $n \to \infty$; мы получим тогда неравенство

$$\max_T |w(s, t)| \leqslant K_5 \max_T |\omega(s, t)|,$$

справедливое для всякой допустимой функции $\omega(s, t)$, равной нулю вне круга $|z| \leqslant \varrho_0 - \delta$. Очевидно, что предположение о том, что центр круга совпадает с точкой $s = t = 0$, несущественно, поскольку векторногладкие функции на торе допускают любые сдвиги по тору.

8. Пусть, наконец, $\omega(s, t) = \mu(s, t) + i\nu(s, t)$ — произвольная допустимая непрерывная функция на торе T. Покажем, что такую функцию $\omega(s, t)$ всегда можно представить в виде конечной суммы допустимых функций, каждая из которых обращается в нуль вне некоторого круга произвольно малого фиксированного радиуса.

Разобьем интервал $-\pi \leqslant s \leqslant \pi$ на четное число $2k$ равных промежутков; при этом тор T будет разбит на $2k$ поясов $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{2k}$. Построим функцию $\omega_1(s, t)$ следующим образом: положим в поясе Δ_1 $\omega_1(s, t) = \omega(s, t)$ и вне пояса $\Delta_{2k} + \Delta_1 + \Delta_2$ $\omega_1 = 0$; в поясах Δ_{2k} и Δ_2 определим $\omega_1(s, t)$ произвольно, с тем только условием, чтобы $\omega_1(s, t)$ получилась допустимой. Аналогичным образом построим на всех поясах с нечетными номерами функции $\omega_3(s, t), \omega_5(s, t), \ldots, \omega_{2k-1}(s, t)$.

Рассмотрим разность

$$\tilde{\omega}(s, t) = \omega(s, t) - \omega_1(s, t) - \omega_3(s, t) - \ldots - \omega_{2k-1}(s, t).$$

Она равна нулю на поясах с нечетными номерами и также, очевидно, допустима. Эта разность очевидным образом представляется в виде суммы функций

$$\tilde{\omega}(s, t) = \omega_2(s, t) + \omega_4(s, t) + \ldots + \omega_{2k}(s, t),$$

каждая из которых может быть отлична от нуля только на поясе с соответствующим четным номером. Но эти функции $\omega_2, \ldots, \omega_{2k}$ не являются, вообще говоря, допустимыми. Чтобы получить допустимые функции, мы поступим следующим образом.

Условимся, что под „функцией ω_{2p} на $2q$-м поясе“ мы будем понимать функцию, получающуюся сдвигом функции ω_{2p} с $2p$-го пояса на $2q$-ый. Рассмотрим функцию $\omega^*(s, t)$, совпадающую с функцией $\tilde{\omega}(s, t)$ на поясах с номерами $2, 4, \ldots, 2k-2$, а на $2k$-м поясе равную величине $\omega_{2k}^*(s, t) = -\omega_2 - \omega_4 - \ldots - \omega_{2k-2}$. Эта функция допустима; заметим, кроме того, что разность $\tilde{\omega} - \omega^*$ отлична от нуля только на $2k$-м поясе. Теперь определим функцию $\tilde{\omega}_2$ так: $\tilde{\omega}_2$ равна ω_2 на 2-м поясе и $-\omega_2$ на 4-м поясе; очевидно, что $\tilde{\omega}_2$ — допустима. Далее, определим $\tilde{\omega}_4$ следующим условием: $\tilde{\omega}_4$ равна $\omega_2 + \omega_4$ на 4-м поясе и $-(\omega_2 + \omega_4)$ на 6-м поясе; далее, $\tilde{\omega}_6$ равна $\omega_2 + \omega_4 + \omega_6$ на 6-м поясе и $-(\omega_2 + \omega_4 + \omega_6)$ на 8-м поясе и т. д., до $\tilde{\omega}_{2k-2}$ включительно. Все получающиеся функции отличны от нуля только на двух соседних четных поясах и допустимы. Функцию $\tilde{\omega}_{2k}$ определим несколько иначе, $\tilde{\omega}_{2k}$ равна $\omega_2 + \omega_4 + \ldots + \omega_{2k}^*$ на $2k$-м поясе и этой же величине с обратным знаком — на втором поясе; но по построению ω_{2k}^*, функция $\tilde{\omega}_{2k}$ оказывается *равной нулю всюду*.

Сумма функций $\tilde{\omega}_2 + \tilde{\omega}_4 + \ldots + \tilde{\omega}_{2k}$ по построению совпадает во 2-м поясе с функцией ω_2, в 4-м — с ω_4 и т. д., в $2k$-м поясе — с функцией ω_{2k}^*; таким образом, эта сумма равна функции ω^*. В результате мы представили функцию $\omega(s, t)$ в виде конечной суммы допустимых функций

$$\omega = \omega_1 + \omega_3 + \ldots + \omega_{2k-1} + (\tilde{\omega} - \omega^*) + \tilde{\omega}_2 + \tilde{\omega}_4 + \ldots + \tilde{\omega}_{2k}, \tag{8.1}$$

каждая из которых равна нулю вне некоторого пояса шириной, не превосходящей $3\frac{2\pi}{2k}$.

Повторяя аналогичные рассуждения для каждого из полученных слагаемых и для координаты t вместо s, мы сможем представить каждое из слагаемых в сумме (8.1) в виде конечной суммы допустимых функций, равных нулю уже вне некоторого квадрата со стороной $3\frac{2\pi}{2k}$; тем самым и функция ω будет представлена в виде конечной суммы слагаемых такого вида. Запишем это разложение в виде следующего равенства:

$$\omega = \omega^{(1)} + \omega^{(2)} + \ldots + \omega^{(N)}. \tag{8.2}$$

Согласно п. 7 для каждого из слагаемых в сумме (8.2) мы сможем указать первообразную векторногладкую функцию.

Обозначим эти векторногладкие функции соответственно через $w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots, w^{(N)}$; тогда векторногладкая функция

$$w = w^{(1)} + w^{(2)} + \ldots + w^{(N)},$$

очевидно, будет первообразной для заданной функции ω.

Итак, каждая *допустимая функция* $\omega(s, t)$ *обладает первообразной.*

Построение слагаемых $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \ldots, \omega^{(N)}$, очевидно, возможно осуществить так, чтобы выполнялись неравенства

$$\max_T |\omega^{(m)}(s, t)| \leqslant C \max_T |\omega(s, t)| \qquad (m = 1, 2, \ldots, N),$$

где C абсолютная константа.

В силу результата п. 7 мы имеем

$$\max_T |w^{(m)}(s, t)| \leqslant K_5 \max_T |\omega^{(m)}(s, t)|$$

и, следовательно,

$$\max_T |w(s, t)| \leqslant K_5 \sum_{m=1}^{N} \max_T |\omega^{(m)}(s, t)| \leqslant K_6 \max_T |\omega(s, t)|.$$

Таким образом, оператор, переводящий допустимую функцию в ее первообразную, ограничен. Было бы интересно записать этот оператор при помощи явной формулы.

9. Возвращаясь к двоякопериодическим функциям, мы приходим к утверждению справедливости следующей теоремы:

Теорема 7. *Пусть $\mu(s, t)$ и $\nu(s, t)$ непрерывные двоякопериодические функции с периодом 2π по s и t, удовлетворяющие условию допустимости*

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \mu(s, t)\, ds\, dt = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \nu(s, t)\, ds\, dt = 0.$$

Существует двоякопериодическая векторногладкая функция $w(s, t)$, для которой

$$\operatorname{div} w(s, t) = \mu(s, t), \quad \operatorname{rot} w(s, t) = \nu(s, t).$$

Эта функция $w(s, t)$ определена с точностью до аддитивной константы.

Фактическое построение функции $w(s, t)$ можно произвести по методу, указанному в п. 8.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Е. Шилов, Векторногладкие функции, Усп. матем. наук, т. 6 : 5 (45) (1951).
2. А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, Гостехиздат, (1950).

Получена 14 апреля 1951 г.

Киев.