О виде решений некоторых классов линейных диференциальных уравнений с переменными коэфициентами

И. З. Штокало

§ 1

В ряде работ, опубликованных в Докладах Академии наук СССР, в Сборнике трудов Института математики АН УССР и в Украинском математическом журнале, нами разработан вопрос о решении линейных диференциальных уравнений с квазипериодическими коэфициентами. Благодаря результатам, полученным в этих работах, создана возможность установления вида решений некоторых классов линейных диференциальных уравнений с переменными коэфициентами, и, вместе с тем, обобщения символического метода на случай этих классов уравнений. Одним из практических приложений этих результатов может быть освещение вопросов устойчивости и неустойчивости решений линейных диференциальных уравнений с переменными коэфициентами, исходя из обобщенного символического изображения.

В процессе исследований, проводимых в данной работе, мы будем основываться на результатах, содержащихся в двух работах, указанных в конце статьи. Основной результат, полученный нами ранее и используемый здесь, содержится в общей теореме, формулируемой следующим образом:

Пусть даны: A — постоянная n-мерная матрица, C — постоянный вектор и N и α — положительные числа. Тогда можно найти такое $K>0$, что имеет место утверждение: диференциальное уравнение в матричном виде

$$\frac{dx}{dt}-[A+\varepsilon f(t)]\,x=Ce^{pt}$$

при условии, что на всей вещественной оси

$$|f(t)|\leq N,$$

а p и ε *представляют собой комплексные величины, удовлетворяющие неравенству*

$$|\varepsilon|<\frac{d(p)}{K}, \qquad (a)$$

где

$$d(p)=\min|\mathrm{Re}(s_k-p)|\geq\alpha \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

(s_k — корни уравнения $\mathrm{Det}\,\| s \cdot E - A \| = 0$ и E — единичная матрица), *имеет одно единственное решение вида*

$$x = \xi(t, p, \varepsilon) e^{pt}.$$

Вектор $\xi(t, p, \varepsilon)$ является по отношению к переменной t ограниченным на всей вещественной оси, а относительно параметров p и ε — аналитическим в области (a).

В случае, если $f(t)$ — квазипериодическая матрица, то вектор $\xi(t, p, \varepsilon)$ также квазипериодическая функция от t с частотами, являющимися линейными комбинациями частот матрицы $f(t)$.

Кроме того, установлено, что вектор $\xi(t, p, \varepsilon)$ является ограниченным относительно параметра p.

Как показано в одной из опубликованных нами работ, отсюда легко перейти к результату, лишенному требования достаточной малости модуля параметра ε. Этот результат формулируется в следующем виде:

любому положительному N можно сопоставить такое $L > 0$, что имеет место утверждение: диференциальное уравнение в матричном виде

$$\frac{dx}{dt} - A(t)\, x = Ce^{pt},$$

в котором на всей вещественной оси

$$|A(t)| \leqq N$$

и

$$|\mathrm{Re}(p)| \geqq L, \tag{б}$$

имеет одно единственное решение вида

$$x = \omega(t, p) e^{pt},$$

где $\omega(t, p)$ — вектор, ограниченный относительно t в интервале $(-\infty, +\infty)$ и аналитический относительно параметра p в области $(б)$.

В случае, когда коэфициенты $A(t)$ — квазипериодические, то $\omega(t, p)$ является также квазипериодической функцией от t с частотами, представляющими линейные комбинации частот коэфициентов $A(t)$.

Нетрудно показать, что вектор $\omega(t, p)$ является ограниченным относительно параметра p.

Указанные результаты открывают путь к установлению вида решений линейных диференциальных уравнений с ограниченными коэфициентами и с правой частью, рассматриваемого в данной работе типа. Решение этой задачи содержится в следующих параграфах.

§ 2

Докажем теорему:

Пусть $\varphi(p)$ будет матрица, регулярная вне полосы

$$a_1 \leq Re(p) \leq a_2,$$

и пусть там же существует и равномерно ограничен интеграл

$$\int |\varphi(a+iy)|\, dy,$$

где a удовлетворяет неравенству

$$a_2 \leqq a \leqq a_1.$$

Тогда диференциальное уравнение в матричном виде

$$\frac{dx}{dt} - A(t)\,x = \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}\varphi(p)\,dp \tag{1}$$

имеет решение

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}\omega(t, p)\,\varphi(p)\,dp, \tag{2}$$

которое при $t = 0$ принимает значение единичной матрицы E.

Доказательство. Теорема будет доказана, если мы установим равномерную сходимость интеграла:

$$\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{dt}[e^{pt}\omega(t, p)]\,\varphi(p)\,dp \tag{3}$$

в интервале $(-\infty, +\infty)$. Займемся этим.

На основании результатов, содержащихся в § 2 статьи [2], выражение (3) может быть записано в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{dt}\left\{e^{pt}\left[\frac{u_0(t)}{p} + \frac{u_1(t)}{p^2} + \ldots + \frac{u_{n-1}(t)}{p^n} + R_n(t, p)\right]\right\}\varphi(p)\,dp, \tag{4}$$

где вектор $\omega(t, p)$ представлен разложением

$$\frac{u_0(t)}{p} + \frac{u_1(t)}{p^2} + \ldots + \frac{u_{n-1}(t)}{p^n} + R_n(t, p).$$

Выражение (4) приводится к виду

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}\left\{u_0(t) + \frac{1}{p}\left[u_1(t) + \frac{du_0(t)}{dt}\right] + \frac{1}{p^2}\left[u_2(t) + \frac{du_1(t)}{dt}\right] + \ldots + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{p^{n-1}}\left[u_{n-1}(t) + \frac{du_{n-2}(t)}{dt}\right] + \frac{1}{p^n}\frac{du_{n-1}(t)}{dt}\right\}\varphi(p)\,dp +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}\left[pR_n(t, p) + \frac{dR_n(t, p)}{dt}\right]\varphi(p)\,dp.$$

Принимая во внимание ограниченность на всей вещественной оси матриц $u_k(t)$, $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, на основании так называемого метода Хевисайда степенных рядов имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}\left\{u_0(t) + \frac{1}{p}\left[u_1(t) + \frac{du_0(t)}{dt}\right] + \frac{1}{p^2}\left[u_2(t) + \frac{du_1(t)}{dt}\right] + \ldots + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{p^{n-1}}\left[u_{n-1}(t) + \frac{du_{n-2}(t)}{dt}\right] + \frac{1}{p^n}\frac{du_{n-1}(t)}{dt}\right\}\varphi(p)\,dp =$$

$$= u_0(t) + \frac{t}{1!}\left[u_1(t) + \frac{du_0(t)}{dt}\right] + \frac{t^2}{2!}\left[u_2(t) + \frac{du_1(t)}{dt}\right] + \ldots +$$

$$+ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\left[u_{n-1}(t) + \frac{du_{n-2}(t)}{dt}\right] + \frac{t^n}{n!}\frac{du_{n-1}(t)}{dt}.$$

Таким образом, для установления равномерной сходимости интеграла (3) в $(-\infty, +\infty)$ остается доказать равномерную сходимость в указанном интервале интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}\left[pR_n(t, p) + \frac{dR_n(t, p)}{dt}\right]\varphi(p)\,dp. \tag{5}$$

Пользуясь результатами упомянутой уже работы, выражение (5) можно записать в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}\left[A(t)\,R_n(t, p) + \frac{u_n(t)}{p^n}\right]\varphi(p)\,dp,$$

что дает

$$\frac{t^n}{n!}u_n(t) + \frac{A(t)}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+\infty i} e^{pt}R_n(t, p)\varphi(p)\,dp.$$

Докажем теперь равномерную сходимость интеграла

$$\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}R_n(t, p)\varphi(p)\,dp. \tag{6}$$

Полагая, как это сделано в § 2 цитированной работы [2],

$$R_n(t, p) = \frac{\sigma_n(t, p)}{p^n},$$

из (6) получаем

$$\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}\frac{\sigma_n(t, p)}{p^n}\varphi(p)\,dp. \tag{7}$$

Представим последнее в виде

$$i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{(a+iy)\,t}\frac{\sigma_n(t, a+iy)}{(a+iy)^n}\varphi(a+iy)\,dy. \tag{8}$$

Вектор $\sigma_n(t, p)$, как показано нами ранее[1], является ограниченным относительно параметра p и непрерывным относительно t на всей вещественной оси. Поэтому можно найти такой вектор $s_n(t)$, чтобы

$$|\sigma_n(t, p)| \leq |s_n(t)|. \tag{9}$$

[1] См. § 3 работы [2].

Принимая во внимание (8) и (9), получим для (7)

$$\left|\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}\frac{\sigma_n(t,\, p)}{p^n}\varphi(p)\,dp\right| \leq \frac{|s_n(t)|\,e^{at}}{|a^n|}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(a+iy)|\,dy.$$

Но интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(a+iy)|\,dy$, согласно условия, существует и равномерно ограничен вне полосы $a_1 \leq a \leq a_2$. Поэтому всякому, произвольно заданному $\varepsilon > 0$ можно сопоставить такое, независимое от t, $N > 0$, что при $n > N$ имеет место

$$\left|\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} R_n(t,\, p)\,\varphi(p)\,dp\right| < \varepsilon. \tag{10}$$

Поэтому интеграл (6), а вместе с тем и интеграл (3) равномерно сходятся вне полосы $a_1 \leq a \leq a_2$, чем установлено, что выражение (2) является решением уравнения (1). Остается показать, что это решение удовлетворяет поставленному требованию, т. е. что оно при $t=0$ принимает значение единичной матрицы E.

В самом деле выражение (2) может быть представлено в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}\left[\frac{u_0(t)}{p}+\frac{u_1(t)}{p^2}+\ldots+\frac{u_{n-1}(t)}{p^n}+R_n(t,\, p)\right]\varphi(p)\,dp.$$

Поэтому

$$x(t)=u_0(t)+\frac{u_1(t)}{1!}t+\ldots+\frac{u_{n-1}(t)}{(n-1)!}t^{n-1}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}R_n(t,\, p)\,\varphi(p)\,dp.$$

Принимая во внимание (10), а также результаты § 2 упомянутой в настоящей статье работы, получаем

$$x(0)=u_0(0)=E.$$

Таким образом, сформулированная в начале данного параграфа теорема доказана полностью.

§ 3

Перейдем к установлению вида решений однородных линейных диференциальных уравнений с ограниченными коэфициентами. Предварительно выведем некоторые соотношения.

Рассмотрим диференциальное уравнение в матричном виде

$$\frac{dx_\eta}{dt}-A(t)\,x_\eta=F_\eta(t) \qquad (\eta>0), \tag{11}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&F_\eta(t)=\frac{1}{\eta^2}\cdot t && (0,\, \eta)\\
&F_\eta(t)=\frac{1}{\eta}\left(2-\frac{1}{\eta}\,t\right) && (\eta,\, 2\eta)\\
&F_\eta(t)=0 && (-\infty,\, 0)\ \text{и}\ (2\eta,\, +\infty)
\end{aligned}\right\}. \tag{12}$$

При указанном представлении $F_\eta(t)$ имеем

$$\int_0^{2\eta} F_\eta(t)\,dt = 1.$$

Покажем, что матрица $F_\eta(t)$ может быть представлена в виде

$$F_\eta(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}\psi_\eta(p)\,dp, \tag{13}$$

где

$$\psi_\eta(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}F_\eta(t)\,dt. \tag{14}$$

Как известно, для осуществления формулы (13) требуется, чтобы $F_\eta(t)$ удовлетворяла условиям Дирихле и чтобы интеграл (14) был абсолютно сходящимся. Условия (12) показывают, что первое из требований выполняется. Что касается интеграла (14), то

$$\psi_\eta(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}F_\eta(t)\,dt = \int_0^{2\eta} e^{-pt}F_\eta(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\eta^2}\int_0^{\eta} te^{-pt}\,dt + \frac{1}{\eta}\int_\eta^{2\eta}\left(2-\frac{1}{\eta}\,t\right)e^{-pt}\,dt =$$

$$= \frac{1}{p^2\eta^2}(1-2e^{-p\eta}+e^{-2p\eta}) \to 1, \quad \text{при } \eta\to 0,$$

а это дает положительный ответ на второй вопрос.

На основании доказанной в § 2 теоремы диференциальное уравнение (11), в котором $F_\eta(t)$ задана в виде (12), имеет своим решением

$$x_\eta = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}\omega(t,\ p)\psi_\eta(p)\,dp.$$

Докажем теперь т е о р е м у: *решение*

$$x_\eta = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}\omega(t,\ p)\psi_\eta(p)\,dp$$

диференциального уравнения

$$\frac{dx_\eta}{dt} - A(t)x_\eta = F_\eta(t),$$

где

$$F_\eta(t) = \frac{1}{\eta^2}\,t \qquad (0,\ \eta),$$

$$F_\eta(t) = \frac{1}{\eta}\left(2-\frac{1}{\eta}\,t\right) \qquad (\eta,\ 2\eta),$$

$$F_\eta(t) = 0 \qquad (-\infty,\ 0) \text{ и } (2\eta,\ +\infty),$$

при $\eta \to 0$ стремится к выражению

$$x_0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \omega(t, p)\, dp, \tag{15}$$

которое является решением уравнения

$$\frac{dx_0}{dt} - A(t)\, x_0 = 0, \tag{16}$$

удовлетворяющим начальному условию

$$\begin{aligned} &x_0(t) = 0 \qquad (t < 0), \\ &x_0(+0) = E. \end{aligned} \tag{17}$$

Доказательство. Докажем сперва, что при $\eta \to 0$

$$x_\eta(t) \to x_0(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \omega(t, p)\, dp. \tag{18}$$

В самом деле, представляя вектор $\omega(t, p)$ посредством

$$\omega(t, p) = \frac{u_0(t)}{p} + R_1(t, p),$$

а также, используя выражение, полученное нами для $\psi_\eta(p)$, имеем

$$x_\eta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \omega(t, p)\, \psi_\eta(p)\, dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \left[\frac{u_0(t)}{p} + R_1(t, p)\right] \frac{1 - 2e^{-p\eta} + e^{-2p\eta}}{p^2\eta^2}\, dp.$$

Но при $\eta \to 0$,

$$\frac{u_0(t)}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{pt}}{p^3\eta^2} (1 - 2e^{-p\eta} + e^{-2p\eta})\, dp =$$

$$= u_0(t) \left\{\frac{1}{\eta^2} \left[\frac{t^2}{2} - (t-\eta)^2 + \frac{(t-2\eta)^2}{2}\right]\right\} \to u_0(t) = \frac{u_0(t)}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{pt}}{p}\, dp. \tag{19}$$

Остается рассмотреть изменение при $\eta \to 0$ выражения

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} R_1(t, p) \frac{1 - 2e^{-p\eta} + e^{-2p\eta}}{p^2\eta^2}\, dp.$$

Покажем, что последнее стремится к

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} R_1(t, p)\, dp.$$

Для установления этого положим

$$\frac{1-2e^{-p\eta}+e^{-2p\eta}}{p^2\eta^2}=1-\alpha(p,\ \eta),$$

где $\alpha(p,\ \eta)\to 0$, при $\eta\to 0$.

Тогда получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}R_1(t,p)\frac{1-2e^{-p\eta}+e^{-2p\eta}}{p^2\eta^2}\,dp=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}R_1(t,\ p)\,dp-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}R_1(t,\ p)\,\alpha(p,\ \eta)\,dp.$$

Займемся рассмотрением последнего интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}R_1(t,\ p)\,\alpha(p,\ \eta)\,dp=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{(a+iy)t}R_1(t,\ a+iy)\,\alpha(a+iy,\ \eta)\,dy.$$

Следовательно

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}R_1(t,\ \ p)\,\alpha(p,\ \ \eta)\,dp\right|\leqq$$

$$\leqq\frac{1}{2\pi}e^{at}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|R_1(t,\ a+iy)|\cdot|\alpha(a+iy,\ \eta)|\,dy.$$

Для $\alpha(p,\ \eta)$ имеем

$$|\alpha(a+iy,\ \eta)|=\left|1-\left[\frac{1-e^{-(a+iy)\eta}}{(a+iy)\eta}\right]^2\right|.$$

Как видно

$$|\alpha(a+iy,\ \eta)|\leqq\mathrm{const},$$

к тому же при любом y

$$\alpha(a+iy,\eta)\to 0,$$

когда $\eta\to 0$.

На основании сказанного относительно $\alpha(p,\ \eta)$, а также, принимая во внимание то, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|R_1(t,\ a+iy)|\,dy<\infty,$$

и учитывая последнее неравенство, связывающее соответствующие интегралы, получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}R_1(t,\ p)\,\alpha(p,\ \eta)\,dp\to 0\quad\text{при}\ \ \eta\to 0.$$

Следовательно, при $\eta \to 0$ имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} R_1(t, p)\frac{1-2e^{-p\eta}+e^{-2p\eta}}{p^2\eta^2}\,dp \to \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} R_1(t, p)\,dp. \tag{20}$$

Соединяя результаты (19) и (20), приходим к

$$x_\eta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}\omega(t, p)\psi_\eta(p)\,dp = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}\left[\frac{u_0(t)}{p} + R_1(t, p)\right]\psi_\eta(p)\,dp \to$$

$$\to \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}\left[\frac{u_0(t)}{p} + R_1(t, p)\right]dp = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}\omega(t, p)\,dp,$$

чем установлено (18).

Покажем теперь, что (15) является решением уравнения (16).

В самом деле, для $t > 2\eta$ имеем

$$\frac{dx_\eta(t)}{dt} - A(t)\,x_\eta(t) = 0,$$

откуда

$$x_\eta(t) - x_\eta(t_0) - \int\limits_{t_0}^{t} A(t)\,x_\eta(t)\,dt = 0 \qquad (t \geq t_0 > 2\eta). \tag{21}$$

Но при $\eta \to 0$

$$x_\eta(t) \to x_0(t),$$
$$x_\eta(t_0) \to x_0(t_0)$$

и

$$\int\limits_{t_0}^{t} A(t)\,x_\eta(t)\,dt \to \int\limits_{t_0}^{t} A(t)\,x_0(t)\,dt.$$

Поэтому, когда $\eta \to 0$, уравнение (21) переходит в уравнение

$$x_0(t) - x_0(t_0) - \int\limits_{t_0}^{t} A(t)\,x_0(t)\,dt = 0, \qquad (t \geq t_0 > 0),$$

откуда имеем

$$\frac{dx_0(t)}{dt} - A(t)\,x_0(t) = 0 \qquad (t > 0).$$

Таким образом, установлено, что (15) является решением уравнения (16) для всех $t > 0$.

Подобным же рассуждением можно убедиться также в осуществлении указанного и для всех $t < 0$.

Покажем, наконец, что полученное решение (15) уравнения (16) удовлетворяет поставленным начальным условиям (17). С этой целью установим сперва осуществление для (15) условий:

$$x_0(+0) = E,$$
$$x_0(-0) = 0.$$

Для доказательства этого достаточно показать, что:

$$x_0(+\delta)-x_0(-\delta)\to E \qquad (\delta>0) \tag{22}$$

и

$$x_0(-\delta)\to 0, \tag{23}$$

когда $\delta\to 0$.

Займемся сначала установлением (22). В самом деле имеем

$$x_\eta(+\delta)-x_\eta(-\delta)=\frac{1}{2\pi i}u_0(+\delta)\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{p\delta}}{p}\psi_\eta(p)\,dp-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}u_0(-\delta)\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{-p\delta}}{p}\psi_\eta(p)\,dp+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{p\delta}R_1(\delta,p)\psi_\eta(p)\,dp-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{-p\delta}R_1(-\delta,p)\psi_\eta(p)\,dp.$$

Применяя уже употребленный нами прием, легко показать, что последнее обращается в

$$x_0(+\delta)-x_0(-\delta)=\frac{u_0(+\delta)}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{p\delta}}{p}\,dp-\frac{u_0(-\delta)}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{-p\delta}}{p}\,dp+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{p\delta}R_1(\delta,p)\,dp-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{-p\delta}R_1(-\delta,p)\,dp. \tag{24}$$

Так как последние два интеграла, как известно, являются абсолютно сходящимися и подинтегральная функция непрерывна, то, вследствие противоположности знаков у этих интегралов, они в пределе аннулируются. Поэтому при $\delta\to 0$, принимая во внимание обращение в нуль второго интеграла, стоящего после знака равенства в (24), получаем из (24)

$$x_0(+0)-x_0(-0)=E \qquad (u_0(0)=E).$$

Остается еще установить (23). Для этого введем в рассмотрение частное решение уравнения (16) в виде

$$x_0=u(t,\ t_0),$$

принимающее значение E при $t=t_0$.

Тогда общее решение уравнения (16) представится выражением

$$x(t)=u(t,\ t_0)\,x(t_0)$$

и, в частности,

$$x_0(t)=u(t,\ t_0)\,x_0(t_0). \tag{25}$$

Так как

$$|A(t)|\leqq N,$$

то

$$\left|\frac{du(t,\ t_0)}{dt}\right|\leqq N|u(t,\ t_0)|.$$

откуда имеем

$$|u(t, t_0)| \leq e^{N|t-t_0|}. \tag{26}$$

Выведем, кроме полученного, еще одно неравенство. Для этого перепишем выражение (18) в виде

$$x_0(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}\omega(t, p)\,dp = \frac{u_0(t)}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{pt}}{p}\,dp + \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}R_1(t, p)\,dp$$

или для $t < 0$

$$x_0(t) = \frac{e^{at}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyt}R_1(t, a+iy)\,dy,$$

откуда

$$|x_0(t)| \leq Ce^{at}, \tag{27}$$

где

$$C = \text{const}.$$

Следовательно

$$|x_0(t_0)| \leq Ce^{at_0}. \tag{28}$$

Учитывая теперь неравенства (26) и (28), получаем из (25)

$$|x_0(t)| \leq Ce^{at_0+N|t-t_0|}. \tag{29}$$

Из (29) для $t = -0$ имеем

$$|x_0(-0)| \leq Ce^{at_0+N|t_0|}. \tag{30}$$

Так как t_0, принимающее отрицательные значения, можем положить равным

$$t_0 = -\lambda, \qquad (\lambda > 0)$$

то неравенство (30) можно переписать в виде

$$x_0(-0) \leq Ce^{-(a-N)\lambda} \qquad (a > N). \tag{31}$$

Вследствие стремительного убывания правой части неравенства (31), следует принять

$$x_0(-0) = 0,$$

что мы и имели своей целью установить.

Чтобы провести доказательство сформулированной в § 3 теоремы полностью, необходимо еще показать, что

$$x_0(t) \equiv 0 \qquad (t < 0).$$

Последнее в аспекте предыдущих рассуждений сразу устанавливается из (27).

§ 4

Осуществим в экспоненциале e^{pt} сдвиг по t от $t=0$ на $t=\tau$. Тогда вместо выражения (15) получим

$$x_*(t, \tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{p(t-\tau)}\omega(t, p)\,dp. \tag{32}$$

Рассуждением, аналогичным предыдущему, можно показать, что выражение (32) является решением уравнения (16), удовлетворяющим начальным условиям

$$
\begin{aligned}
&x_0(t, \tau) \equiv 0 \qquad (t < \tau), \\
&x_0(\tau + 0, \tau) = E.
\end{aligned} \tag{33}
$$

§ 5

Полученные в § 2, 3, 4 результаты можно обобщить в следующей теореме: *диференциальное уравнение*

$$
\frac{dx(t)}{dt} - A(t)x(t) = F(t), \tag{34}
$$

в котором на всей вещественной оси

$$
|A(t)| \leqq N = \text{const}
$$

и $F(t)$ есть матрица, удовлетворяющая там же условиям Дирихле и обеспечивающая абсолютную сходимость интеграла

$$
\int\limits_0^{+\infty} e^{-p\tau} F(\tau)\, d\tau,
$$

имеет своим решением

$$
x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \omega(t, p)\, \psi(p)\, dp,
$$

где

$$
\psi(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-p\tau} F(\tau)\, d\tau,
$$

удовлетворяющим начальным условиям

$$
\begin{aligned}
&x(t) \equiv 0, \qquad (t < \tau) \\
&x(\tau + 0) = E.
\end{aligned}
$$

Доказательство. Так как решение однородного уравнения (16) при начальном условии (33) имеет вид (32), то, как известно, решение уравнения (34) при указанном в данной теореме начальном условии представится выражением

$$
x(t) = \int\limits_0^t x_0(t, \tau) F(\tau)\, d\tau.
$$

Однако последнее можно записать следующим образом:

$$
x(t) = \int\limits_0^{+\infty} x_0(t, \tau) F(\tau)\, d\tau \qquad (t < 0).
$$

Следовательно, учитывая (32), имеем

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \omega(t, p) \psi(p)\, dp,$$

где

$$\psi(p) = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-p\tau} F(\tau)\, d\tau,$$

чем установлена сформулированная в начале параграфа теорема.

§ 6

Вполне очевидно, что доказанные в данной работе теоремы остаются справедливыми для случая, когда коэфициенты $A(t)$ являются квазипериодическими матрицами.

Полученные результаты обобщают аппарат символического исчисления на случай линейных диференциальных уравнений с переменными коэфициентами рассмотренного нами вида.

Из операционного исчисления известно, какое мощное значение имеет символико-аналитический метод в решении линейных диференциальных уравнений с постоянными коэфициентами. Выведенные в настоящей работе теоремы дают возможность распространить удобства применения этого метода на более широкий класс линейных диференциальных уравнений, включив в него линейные диференциальные уравнения с переменными коэфициентами довольно общего вида.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. З. Штокало, Теория обобщенного символического изображения решений линейных диференциальных уравнений с квазипериодическими коэфициентами, Сборник трудов Института математики АН УССР, № 11 (1948).

2. И. З. Штокало, К вопросу об обобщении основной формулы символического метода, Укр. матем. журн., № 3 (1949).

Получена 4 ноября 1951 г.

Львов.