1952 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. IV, № 1
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

К теории последовательностей римановых поверхностей

Ю. Ю. Трохимчук

Введение

В своей известной статье [1] [1] Каратеодори ставит себе целью интерпретировать геометрически сходимость аналитических функций и решает эту задачу для функций, заданных в единичном круге. Введя понятие ядра последовательности односвязных областей $\{G_n\}$ или односвязных римановых поверхностей $\{F_n\}$, он доказывает, что для сходимости соответствующей последовательности отображающих функций $\{f_n(z)\}$, определенных в круге $|z| < 1$ и нормированных $f_n(0)=0$, $f_n'(0)>0$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность областей $\{G_n\}$ (или поверхностей $\{F_n\}$) сходилась к своему ядру. Эта теорема справедлива всегда, когда функции $\{f_n(r)\}$ образуют в круге $|z| < 1$ нормальное семейство; для этого, например, достаточно, чтобы области G_n или поверхности F_n были равномерно ограничены (для поверхностей это означает, что все они расположены над ограниченной областью).

Л. И. Волковыский [2] определил ядро F для произвольной последовательности римановых поверхностей $\{F_n\}$, имеющих некоторый общий однолистный круг Q_0 (в отличие от определения Каратеодори, когда F_n имели общей только нулевую точку), и установил общую теорему о сходимости, содержащую в качестве частного случая результат Каратеодори.

Каратеодори определил также общий процесс построения ядра последовательности римановых поверхностей, полагая, что этот процесс при некоторых условиях, например, для равномерно ограниченных поверхностей, всегда приводит к вполне определенной поверхности, а именно к ядру данной последовательности. Что это не так, показывают простейшие примеры (см. ниже).

Поэтому возникают задача об условиях однозначной определенности ядра последовательности римановых поверхностей, а также вопрос о регулярности общего процесса Каратеодори.

Ниже рассматриваются произвольные последовательности римановых поверхностей $\{F_n\}$ с общим кругом Q_0 (этот случай практически наиболее важен), для которых приводится необходимое и достаточнсе

[1] См. также А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, стр. 379 и след.

условие единственности ядра, являющееся одновременно необходимым и достаточным и для регулярности процесса Каратеодори. Доказывается, далее, что в условиях основной теоремы о сходимости (2) ядро F последовательности римановых поверхностей $\{F_n\}$ единственно.

Условия единственности

1. Ядро последовательности римановых поверхностей

Рассмотрим произвольную последовательность римановых поверхностей Φ_n, расположенных над плоскостью w. Скажем, что поверхности Φ_n имеют общий круг $Q_0 : |w-a| < \varrho$, если на каждой поверхности Φ_n зафиксирован однолистный круг $Q_0^{(n)}$, расположенный над кругом Q_0.

Исключим из каждой Φ_n *все* точки ветвления, и полученную последовательность, очевидно, с тем же общим кругом Q_0, будем писать через $\{F_n\}$.

Определение 1. Риманова поверхность F, содержащая круг Q_0, называется ядром последовательности $\{F_n\}$, если: 1) каждая замкнутая (компактная) подобласть ее принадлежит всем F_n, начиная с некоторого значения n, и 2) всякое расширение F^* этой поверхности: $F^* \supset F$ (если оно существует) не обладает этим свойством.

Заметим тут же, что ядро F в этом определении не содержит исключительных точек, которые появляются в определении Л. И. Волковыского [2]; этим замечанием мы в дальнейшем воспользуемся.

2. Построение ядра по Каратеодори

Возьмем произвольную последовательность точек $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, всюду плотную на плоскости w, и построим последовательность конечнолистных областей

$$G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_n \subseteq \ldots,$$

которая сходится к некоторому ядру F последовательности $\{F_n\}$.

В качестве области G_0 примем круг Q_0; имея область G_n, будем строить G_{n+1} следующим образом: отметим на G_n все точки, расположенные над точками $a_1, a_2, \ldots, a_n$, и рассмотрим для каждой из них максимальную круговую окрестность, — очевидно, однолистную, — обладающую тем свойством, что каждая круговая окрестность в ней меньшего радиуса принадлежит всем поверхностям F_n, начиная с некоторого номера n. Чтобы получить область G_{n+1}, нужно:

а) присоединить все указанные максимальные окрестности к G_n;

б) если при этом появятся перекрывающиеся области и точки двух таких областей, лежащие одна над другой, соответствуют одной и той же точке на F_n, начиная с некоторого n, то склеить соответствующие области.

Построенная последовательность конечнолистных областей $G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots$, очевидно, определяет некоторое ядро F последовательности поверхностей $\{F_n\}$, имеющих общий круг Q_0. Этот процесс построения показывает, что у каждой последовательности римановых поверхностей $\{F_n\}$ ядра существуют.

Каратеодори [1] полагал, что этот процесс применительно к последовательности односвязных римановых поверхностей $\{F_n\}$ при некоторых условиях, например, для равномерно ограниченных поверхностей, всегда приводит к вполне определенной поверхности, а именно к ядру F данной последовательности без добавочного предположения о сходимости соответствующих функций. Что это не так показывает следующий пример последовательности односвязных равномерно ограниченных римановых поверхностей: в качестве F_{2k-1} $(k = 1, 2, \ldots)$ берем однолистный круг $|z-1| < 2$, а в качестве F_{2k} — такой же, но двулистный круг, имеющий точку $z = 1$ своей единственной точкой ветвления. Тогда при любом фиксировании круга Q_0 с центром в $z = 0$ на F_{2k} ядром полученной последовательности $\{F_n\}$ будет произвольный однолистный круг $|z-1| < 2$ с жордановым разрезом от центра до его границы. Легко видеть, что и процесс Каратеодори (для двух различных последовательностей $\{a_n\}$ и $\{a_n'\}$, плотных на плоскости w) может привести здесь к различным ядрам. Из этого же примера видно, что некоторые ядра, имеющие разрез, проходящий в достаточной близости к общему кругу Q_0, вообще не могут быть получены по процессу Каратеодори.

Найдем теперь, при каких условиях последовательность римановых поверхностей $\{F_n\}$ (с общим кругом Q_0, — в дальнейшем мы не будем напоминать об этом) имеет единственное ядро F.

3. Основные определения

Рассмотрим произвольный круг $k_0 \subseteq Q_0$ с центром в некоторой точке w_0; выберем в k_0 какую-либо точку $w \neq w_0$. На поверхности F_n $(n = 1, 2, \ldots)$ будем иметь соответственно круг $k_0^{(n)} \subseteq Q_0^{(n)}$ с центром в $w_0^{(n)}$ и точку $w^{(n)} \neq w_0^{(n)}$. Если на плоскости w существует круг k с центром в w, выходящий за пределы круга k_0 и такой, что, начиная с некоторого n, круг $k^{(n)}$ с центром в $w^{(n)}$, лежащий над k, принадлежит поверхности F_n, другими словами, круг k принадлежит всем поверхностям F_n, начиная с некоторого значения n, то скажем, что k есть непосредственное продолжение круга k_0 (для последовательности $\{F_n\}$).

Сказанное относительно круга k_0 можно применить и к его непосредственному продолжению k. Мы приходим, таким образом, к следующему определению:

Определение 2. Конечную упорядоченную совокупность кругов $\{k_j\}$ на плоскости $w (j = 0, 1, \ldots, \nu)$, $k_0 \subseteq Q_0$ с центрами в точках w_j назовем цепью, если каждый следующий круг является непосредственным продолжением предыдущего.

Рассмотрим теперь всевозможные непрерывные кривые γ в плоскости w с начальными точками внутри круга Q_0, не содержащие внутренних точек и имеющие некоторое фиксированное направление.

Определение 3. Кривая γ называется допустимой (для последовательности $\{F_n\}$), если существует такое ее (конечное) покрытие кругами $k_j (j = 0, \ldots, \nu)$, образующими цепь, что их центры $w_j \in \gamma$ и w_j

предшествует точке w_{j+1} в порядке следования по кривой γ в данном на ней направлении.

Легко видеть, что всегда можно предположить последний центр w_ν конечной точкой кривой γ, что мы и сделаем.

В силу конечности покрытия допустимой кривой все круги k принадлежат всем поверхностям F_n, начиная с некоторого $n = n_0$; возьмем одну из поверхностей F_n при $n \geqslant n_0$. Каждому кругу k_j на ней соответствует круг $k_j^{(n)}$; множество $D_n = \bigcup\limits_j k_j^{(n)}$ является на F_n, очевидно, областью и соответствие между D_n и $D_0 = \bigcup\limits_j k_j$ в малом (а именно в кругах k_j) тождественно. Очевидно поэтому, что кривой $\gamma \subset D_0$ в D_n соответствует также некоторая кривая $\gamma^{(n)}$, причем в кругах k_j соответствие между γ и $\gamma^{(n)}$ также тождественно. Каждую из кривых $\gamma^{(n)}$ $(n \geqslant n_0)$ будем также называть допустимой.

Области в последовательности $\{D_n\}$ могут быть весьма различны, как показывает пример кривой с самопересечением и с достаточно большим числом обходов вокруг точки $z = 1$ (являющейся точкой ветвления для F_{2k} $(k = 1, 2, \ldots)$) для последовательности $\{F_n\}$, приведенной в п. 2.

Если же начиная с некоторого номера n последовательность областей $\{D_n\}$ представляет собой фактически повторение одной фиксированной области D, другими словами, когда тождественное соответствие областей D_n (а потому и кривых $\gamma^{(n)}$) *в малом* дает и тождественное соответствие их в *целом*, то скажем, что кривая γ, а также любая из $\gamma^{(n)}$ $(n \geqslant n_0)$ нормальна (для последовательности $\{F_n\}$). В этом случае будем говорить еще, что кривая γ расположена на любой из F_n $(n \geqslant n_0)$.

Нормальные кривые существуют: произвольная кривая, выходящая из Q_0 на любом ядре F последовательности $\{F_n\}$, очевидно, нормальна; так как нормальные кривые и подавно допустимы, то вместе с первыми существуют и последние для произвольной последовательности римановых поверхностей $\{F_n\}$.

Пример п. 2 показывает, что могут существовать допустимые кривые, не являющиеся нормальными.

4. Поверхность Φ

Построим теперь важную в дальнейшем некоторую вспомогательную поверхность Φ.

Рассмотрим семейство всех нормальных кривых $\{\gamma_\alpha\}$ на плоскости w. Каждая нормальная кривая γ будет определять нам точку множества Φ; две нормальные кривые γ_1 и γ_2 определяют одну и ту же точку на Φ, если соответствующие кривые $\gamma_1^{(n)}$ и $\gamma_2^{(n)}$ $(n \geqslant n_0)$ имеют общий конец на F_n. Пусть A — точка из Φ, определенная нормальной кривой γ, и $\{k_j\}$ — какая-либо цепь последней $(j = 0, \ldots, \nu)$; центр w_ν последнего круга цепи k_ν является концом кривой γ. Проводя всевозможные радиальные отрезки ϱ из w_ν внутри круга k_ν и присоединяя их каждый раз к кривой γ, получим семейство $\{\gamma_\varrho\}$, очевидно, нормальных кривых, которые на Φ определяют совокупность точек $\{A_\varrho\}$; такую совокупность мы и определим в качестве окрестности точки A на Φ. Ставя в соответствие точке A_0 конец кривой γ_ϱ в круге k_ν, легко докажем, что это соответствие гомеоморфно[1]; нетрудно убедиться, далее, что каждая нормальная кривая расположена на Φ и является там связным множеством. Отсюда уже следует, что Φ — двумерное многообразие.

Перенося на окрестность точки многообразия Φ угловую метрику круга k_ν, видим, что на Φ имеет место конформность в малом, а отсюда, на основании известной теоремы Radó [3], заключаем, что Φ — риманова поверхность (абстрактная).

Из самого построения следует, что поверхность Φ вполне определена последовательностью поверхностей $\{F_n\}$.

На Φ существуют области, в которых каждая кривая (с начальной точкой в Q_0) нормальна, например круг Q_0; назовем такие области нормальными; максимальной нормальной областью называется произвольная нормальная область на Φ, содержащая круг Q_0, всякое расширение которой (на Φ) не является нормальной областью.

Легко видеть, что всякая максимальная нормальная область есть некоторое ядро последовательности $\{F_n\}$ и наоборот. В самом деле, расширяя максимальную нормальную область до некоторого ядра, получим, очевидно, нормальное расширение нашей области, что невозможно. Аналогично получим и обратное утверждение.

5. Кривые на поверхности Φ

В дальнейшем нам понадобятся следующие леммы:

Лемма 1. *Пусть γ_1 и γ_2 две кривые на Φ, выходящие из Q_0, с общим концом (но не обязательно с общей начальной точкой), причем γ_1 допустима (для последовательности $\{F_n\}$), а γ_2 — нормальна; тогда и $\gamma_1^{(n)}$ и $\gamma_2^{(n)}$ на $F_n (n \geqslant n_0)$ будут иметь общий конец.*

На γ_1 существуют отрезки, обладающие этим свойством, например, отрезок ее в Q_0. Пусть $A \in \gamma_1$ — первая точка, для которой существует нормальный путь $\gamma_A (\subset \Phi)$ с концом A на Φ, и на бесконечном множестве поверхностей $\{F_{n_i}\}$ соответствующие $w_0^{(n)} A^{(n)} \subset \gamma_1^{(n)}$ и $\gamma_A^{(n)}$ не имеют общего конца (w_0 есть центр первого круга цепи кривой γ_1). Поэтому последний круг цепи кривой γ_A (с центром в A) содержит точки, удовлетворяющие нашему утверждению; следовательно, некоторая деформация кривой γ_A в этом круге будет иметь общий конец с некоторым отрезком кривой γ, причем для последнего лемма верна. Отсюда в силу тождественности соответствия поверхностей $F_n (n \geqslant n_0)$ в малом для кругов цепи допустимой кривой и $\gamma_A^{(n)}$ должен иметь общий конец $A^{(n)}$ с кривой $\gamma^{(n)}$ (на F_n), что противоречиво.

Лемма 2. *Каждая кривая на поверхности Φ (с началом в Q_0) допустима для последовательности поверхностей $\{F_n\}$.*

Пусть γ — такая кривая; очевидно, на ней существуют допустимые отрезки, например отрезок ее, лежащий в Q_0. Пусть $A \in \gamma$ — первая точка, такая, что $w_0 A \subset \gamma$ не является допустимой (для $\{F_n\}$).

Так как $A \in \Phi$, то существует нормальный путь $\gamma' \subset \Phi$ с концом в точке A; в последнем круге k_ν цепи кривой γ' находятся точки $\alpha \in \gamma$,

[1] Будем говорить в этом случае, что круг k_ν принадлежит Φ.

такие, что отрезки $w_0\alpha \subset \gamma$ допустимы, а потому, в силу леммы 1, при помощи деформации кривой γ' в этом круге находим нормальную кривую $\tilde{\gamma}$, такую, что на F_n $(n \geqslant n_0)$ кривые $\tilde{\gamma}^{(n)}$ и $w^{(n)}\alpha^{(n)}$ имеют общий конец $\alpha^{(n)}$. Используя вновь тождественное соответствие поверхностей F_n в малом, на основании полученного вывода заключаем, что, присоединяя круг $\boldsymbol{k}_\nu$ к цепи кривой $\boldsymbol{w}_0\alpha \subset \gamma$, легко найти цепь для всего отрезка $w_0 A \subset \gamma$, что приводит к противоречию.

Как показывает пример последовательности римановых поверхностей $\{\boldsymbol{F}_n\}$, где в качестве F_{2k} $(k = 1, 2, \ldots)$ взят плоский круг достаточно большого но фиксированного радиуса, а F_{2k-1} совпадают с указанной на рис. 1 фигурой, лемма 2 не обратима.

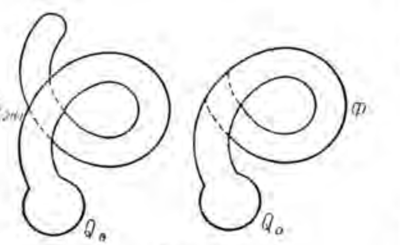

Рис. 1.

Легко видеть (см. доказательство лемм), что всякая кривая γ на $\boldsymbol{\Phi}$ (выходящая из Q_0) характеризуется следующим свойством: существует цепь $\{\boldsymbol{k}_j\}$ $(j = 0, 1, \ldots, \nu)$ для γ такая, что каждый из кругов $\boldsymbol{k}_j$ является последним кругом цепи некоторой нормальной кривой $\tilde{\gamma}_j$, причем на поверхности F_n (для всех n начиная с некоторого n_0) соответствующие круги $k_j^{(n)}$ и $\tilde{k}_j^{(n)}$ совпадают; цепь $\{\boldsymbol{k}_j\}$ с таким свойством назовем нормальной.

6. Условия единственности

Докажем теперь следующие основные утверждения:

Теорема 1. *Для того чтобы данное ядро F последовательности поверхностей $\{F_n\}$ было ее единственным ядром, необходимо и достаточно, чтобы каждая нормальная кривая последовательности $\{F_n\}$ была расположена*[1] *на F.*

Имеем всегда $F \subseteq \boldsymbol{\Phi}$; если теперь каждая нормальная кривая последовательности $\{F_n\}$ расположена на F, то и каждая точка на Φ есть некоторая точка ядра F и, следовательно, $F \equiv \boldsymbol{\Phi}$, т. е. ядро F определено однозначно.

Необходимость очевидна.

Теорема 2. *Для того чтобы последовательность поверхностей $\{F_n\}$ имела единственное ядро, необходимо и достаточно, чтобы каждая допустимая кривая этой последовательности с нормальной цепью была нормальной.*

Если условие выполнено, то каждая кривая на $\boldsymbol{\Phi}$ нормальна, т. е. $\boldsymbol{\Phi}$ — нормальная область, а потому всякое ядро F последовательности $\{F_n\}$ совпадает с поверхностью $\boldsymbol{\Phi}$, другими словами, ядро в этом случае единственно.

Обратно, если имеем единственное ядро F последовательности $\{F_n\}$, то (см. предыдущую теорему) $F \equiv \boldsymbol{\Phi}$ и каждая допустимая кривая

---

[1] См. замечание к определению нормальных кривых (п. 3).

с нормальной цепью расположена на поверхности $\Phi \equiv F$, а потому нормальна. Теорема доказана.

Замечание. Процесс Каратеодори, как мы видели, всегда приводит к некоторому ядру F последовательности $\{F_n\}$; поэтому, в случае единственности последнего, конструкция Каратеодори превращается в регулярный процесс, приводящий к определеной поверхности, а именно к ядру последовательности $\{F_n\}$, которое уже не зависит от выбора множества точек $\{\alpha_n\}$, а только от данной последовательности поверхностей $\{F_n\}$.

Иначе говоря, теорема 2 дает достаточное и, как мы сейчас покажем, необходимое условие регулярности процесса Каратеодори.

В самом деле прежде всего очевидно, что максимальный круг, лежащий на поверхности Φ с центром в точке $w \in \Phi$, есть круг Каратеодори (см. п. 2); если поэтому $\gamma \subset \Phi$ — нормальная кривая, то, беря последовательно в точках $w_j \in \gamma$ максимальные круги на Φ, получим, очевидно, начало процесса Каратеодори, который приводит к ядру, содержащему кривую γ. Поэтому, если ядро F не единственно для последовательности $\{F_n\}$, то легко построить различные ядра и процессом Каратеодори.

Приложения

1. Примеры. Пусть последовательность римановых поверхностей $\{F_n\}$ такова, что все F_n расположены на некоторой поверхности $R : F \subseteq R$; очевидно, что в этом случае каждая допустимая кривая будет нормальной и условие теоремы 2 выполнено. Поэтому всякая последовательность подобластей $\{F_n\}$ римановой поверхности R (с общим кругом Q_0) всегда имеет однозначно определенное ядро.

Перейдем к более сложному примеру.

Пусть $\{G_n'\}$ — последовательность подобластей некоторой римановой поверхности R (над плоскостью z) и $f_n(z)$ — аналитическая функция, отображающая область G_n' на некоторую риманову поверхность F_n' (над плоскостью w); исключим из каждой поверхности F_n' *все* точки ветвления и полученную последовательность поверхностей будем обозначать через $\{F_n\}$, а соответствующую последовательность областей на R — через $\{G_n\}$.

Покажем, что, если существует хотя бы одна точка z' равномерной сходимости[1] в R функций $\{f_n(z)\}$ с предельной функцией $f(z) \neq \text{const}$, то при некотором общем круге Q_0 ядро F последовательности $\{F_n\}$ определено однозначно.

Так как в этих условиях выделяется максимальная область $G' \subseteq R$ равномерной сходимости функций $\{f_n(z)\}$, то в силу теоремы 6 [2] можно зафиксировать на поверхностях F_n общий круг Q_0 так, что образ области G' — через посредство функции $f(z)$ — содержит по крайней мере все неисключительные точки некоторого ядра F последовательности $\{F_n\}$,

[1] Как известно, точкой равномерной сходимости аналитических функций называется точка, в некоторой окрестности которой эти функции сходятся равномерно. Равномерная сходимость в области понимается как равномерная сходимость в каждой замкнутой ее подобласти.

содержащего круг Q_0; но, как мы уже говорили (п. 1), никакое ядро последовательности $\{F_n\}$ не содержит исключительных точек, поэтому функция $f(z)$ отображает область G' на все ядро F.

Докажем теперь, что это ядро единственно для данной последовательности $\{F_n\}$, для чего нужно показать, что всякая нормальная кривая этой последовательности принадлежит ядру F.

Предполагая противное, находим на некоторой нормальной кривой γ первую точку w_0 такую, что $w_0 \bar{\in} F$; в силу леммы 1 [2] последовательность функций $\{\varphi_n(w)\}$, обратных к соответствующим функциям $f_n(z)$, сходится равномерно в области $D = D_n = \bigcup_j k_j^{(n)}$ $(n \geqslant n_0)$, содержащей кривую γ. Предельная функция $\varphi(w)$, — очевидно, обратная к $f(z)$, — отображает отрезок кривой γ до точки w_0 в некоторую дугу λ в области G', конец z_0 которой является граничной точкой области $G' : z_0 = \varphi(w_0)$.

Образы окрестности $U(w_0)$ при отображениях $\{\varphi_n\}$ и φ содержат некоторую фиксированную окрестность $V(z_0)$ точки z_0 на R (начиная с некоторого достаточно большого номера n) в силу их равномерной сходимости; отсюда и из того, что γ нормальна, легко следует, что $V(z_0) \subset G_n$, начиная с некоторого номера n, и $z_0 \in G$, где G — ядро областей $\{G_n\}$.

Ясно, что последовательность $\{f_n(z)\}$ образует нормальное семейство в окрестности $V(z_0)$; если $w_0 \neq \infty$, то по теореме Витали точка z_0 должна входить в область G'; если же $w_0 = \infty$, то к тому же выводу приводит рассмотрение семейства $\left\{\dfrac{1}{f_n(z)}\right\}$. Но этот вывод явно противоречит максимальности области равномерной сходимости G'.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. Carathéodory, Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten, Math. Ann., 72 (1912), 107—144.

2. Л. И. Волковыский, Сходящиеся последовательности римановых поверхностей, Мат. сб., т. 23 (65), 1948, стр. 361—382.

3. T. Radó, Über den Begriff der Riemannschen Fläche, Acta Szeged, t. II, 1925.

Получена 6 июля 1951 г.

Львов.