Базы единственности в бесконечных регулярных p-группах

Ш. С. Кемхадзе

§ 1

В настоящей работе обобщается основная теорема Ф. Холла [4] о существовании базы единственности в конечных регулярных p-группах на некоторый класс бесконечных регулярных p-групп. В дальнейшем через $\{a, b\}$ будет обозначаться подгруппа некоторой группы, порожденная двумя элементами a и b, через $K\{a, b\}$ — коммутант этой подгруппы.

Группа G называется *p-группой*, если порядки всех ее элементов являются степенями одного и того же простого числа p. Среди p-групп наиболее близкими к абелевым p-группам являются так называемые регулярные p-группы. Впервые определение регулярных p-групп ввел Ф. Холл [4]: p-группа G называется *регулярной*, если для любого целого $\alpha > 0$ и для любой пары элементов $a, b \in G$ всегда найдутся такие элементы $s_1, s_2, \ldots, s_r \in K\{a, b\}$, что

$$(a \cdot b)^{p^\alpha} = a^{p^\alpha} b^{p^\alpha} s_1^{p^\alpha} s_2^{p^\alpha} \ldots s_r^{p^\alpha}; \tag{1}$$

при этом элементы $s_1, s_2, \ldots, s_r$ коммутанта $K\{a, b\}$ и их число r зависят от α, a и b. Заметим, что Холл изучал лишь конечные регулярные p-группы.

В работе [3] нами было введено более простое определение регулярных p-групп, равносильное определению Холла: p-группа G регулярна тогда и только в том случае, если для любого целого $\alpha > 0$ и для любой пары элементов $a, b \in G$ всегда найдется такой элемент $s \in K\{a, b\}$, что

$$(a \cdot b)^{p^\alpha} = a^{p^\alpha} b^{p^\alpha} s^{p^\alpha}. \tag{2}$$

Из определения регулярных p-групп следует, что:

1°. Всякая абелева p-группа регулярна.

2°. Всякая p-группа, у которой все элементы, кроме 1, порядка p, регулярна.

3°. Всякая подгруппа и всякая фактор-группа регулярной p-группы регулярны.

4°. p-группа G регулярна тогда и только тогда, когда всякая ее подгруппа вида $\{a,b\}$ регулярна.

5°. Прямое произведение регулярных p-групп по одному и тому же простому числу p регулярно.

6°. Объединение возрастающей последовательности регулярных p-групп будет регулярной p-группой.

Отметим, что в работе автора [3] доказано, что при $p=2$ всякая некоммутативная конечная 2-группа нерегулярна.

Согласно свойству 4° при изучении регулярных p-групп основную роль играют группы вида $\{a, b\}$.

Лемма 1. *Если конечная не абелева p-группа порождена двумя элементами a и b, то эти элементы не могут быть сопряженными.*

Доказательство. Пусть $G=\{a, b\}$ и $b=g^{-1}ag$, где $g \in G$.

Для циклической подгруппы $\{a\}$ существует максимальный нормальный делитель H группы G, содержащий эту подгруппу и не совпадающий со всей группой. В H должен содержаться элемент $b=g^{-1}ag$, и, следовательно, подгруппа $\{a, g^{-1}ag\}$ будет собственной подгруппой группы G, что противоречит нашему условию. На основании нашего определения регулярных p-групп и при помощи леммы 1 сравнительно проще доказываются известные теоремы о конечных регулярных p-группах. Отметим некоторые из этих теорем.

Теорема 1. *Если p-группа G регулярна, то для любой пары элементов $a, b \in G$ имеет место равенство*

$$a^{p^\alpha} b^{p^\alpha} = c^{p^\alpha}, \text{ где } c \in \{a, b\}.$$

Теорема 2. *Если p-группа G регулярна, то порядок любого элемента $s \in K\{a, b\}$ не превосходит порядка как элемента a, так и элемента b.*

Теорема 3. *Если p-группа G регулярна и для некоторой пары элементов $a, b \in G$ имеют место равенства*

$$a^{p^\alpha} = b^{p^\alpha} = 1, \text{ то } (a \cdot b)^{p^\alpha} = 1.$$

Теорема 4. *Если a и b — любые два элемента регулярной p-группы G* и $a^{p^\alpha} = b^{p^\alpha}$, *то* $(ab^{-1})^{p^\alpha}=1$ *и обратно.*

Легко заметить, что теорема 3 есть следствие теоремы 4. При помощи теоремы 4 можно следующим образом уточнить теорему 1 и теорему 3:

Теорема 1'. *Если a и b — элементы регулярной p-группы G, а высоты элементов a и b равны соответственно p^α и p^β, где $\alpha < \beta$, то высота $(a \cdot b) = \min$ (высота a, высота b).*

Теорема 3'. *Если a и b — элементы регулярной p-группы G, а порядки элементов a и b равны соответственно p^α и p^β, где $\alpha < \beta$, то порядок $(a \cdot b) = \max$ (порядок a, порядок b).*

По теореме 1 совокупность p^α-х степеней всех элементов регулярной p-группы G образует характеристическую подгруппу группы G, которую мы обозначим через $G^{(\alpha)}$.

По теореме 3 совокупность элементов регулярной p-группы G, порядки которых не превосходят p^α, образует характеристическую подгруппу группы G, которую мы обозначим через $G_{(\alpha)}$.

Очевидно, что все теоремы 1, 2, 3 и 4 справедливы не только для конечных, но и для тех бесконечных регулярных p-групп, у которых всякая подгруппа вида $\{a, b\}$ конечна.

§ 2

Определение 1. L-рядом p-группы G назовем возрастающий инвариантный ряд с циклическими факторами порядка p, идущий от $G^{(1)}$ до G,

$$G^{(1)}=L_0\subset L_1\subset L_2\subset\ldots\subset L_\beta\subset L_{\beta+1}\subset\ldots\subset L_\nu=G. \tag{3}$$

В частности, L-рядом обладает всякая регулярная ZA p-группа, так как всякая ZA p-группа обладает возрастающим инвариантным рядом с циклическими факторами (А. Г. Курош и С. Н. Черников [2]). Множество элементов, содержащихся в $L_{\beta+1}$ и не содержащихся в L_β ($\beta\in\mathfrak{M}$ и упорядочена при помощи отношения $<$), называется *β-скачком* L-ряда группы G и обозначается через $L_{\beta+1}-L_\beta$.

Определение 2. Выбираем в каждом β-скачке этого ряда по одному элементу θ_β,

$$\theta_\beta\in L_{\beta+1}-L_\beta,$$

причем θ_β имеет в этом скачке наименьший порядок. Совокупность элементов $\{\theta_\beta\}$ называется *канонической системой элементов* группы G.

Существование хотя бы одной канонической системы элементов в p-группе G, обладающей L-рядом, очевидно, так как все скачки $L_{\beta+1}-L_\beta$ не пустые.

Определение 3. Последовательность элементов $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\alpha, \ldots$ p-группы G, порядки которых соответственно суть $p^{n_1}, p^{n_2}, \ldots, p^{n_\alpha}, \ldots$ (где все $n_\alpha\geqslant 1$, т. е. $\theta_\alpha\neq 1$), *будет называться базой единственности p-группы* G, если каждый элемент $x\in G$ отличный от 1 может быть выражен одним и только одним способом в виде

$$x=\theta_{\alpha_1}^{k_1}\theta_{\alpha_2}^{k_2}\ldots\theta_{\alpha_r}^{k_r}, \tag{4}$$

где

$$0\leqslant k_i<p^{n_{\alpha_i}},\quad i=1,2,\ldots,r,$$

и, кроме того,

$$\alpha_1>\alpha_2>\ldots>\alpha_r.$$

Заметим, что всякая p-группа G, обладающая возрастающим инвариантным рядом с циклическими факторами, локально конечна.

Это утверждение следует из того, что она периодическая и является RN^*-группой (А. Г. Курош и С. Н. Черников [2]).

Легко доказать также, что если регулярная p-группа обладает L-рядом и всякая ее подгруппа вида $\{a, b\}$ конечна, то каждая фактор-группа группы G также обладает L-рядом. Для доказательства теоремы о существовании базы единственности предварительно докажем следующие две леммы.

Лемма 1. *Если группа G, порядки всех элементов которой, кроме 1, равны p, обладает L-рядом, то каждая каноническая система элементов будет базой единственности.*

Доказательство. Построим L-ряд для групп G, причем в нашем случае $G^{(1)}=E$.

$$E=L_0\subset L_1\subset L_2\subset\ldots\subset L_\beta\subset L_{\beta+1}\subset\ldots\subset L_\nu=G. \tag{5}$$

Выбираем каноническую систему элементов $\theta_\beta \in L_{\beta+1} - L_\beta$ и покажем, что она является базой единственности.

Покажем сначала, что каждый элемент $x \in G$ можно записать в виде

$$x = \theta_{\alpha_1}^{k_1} \theta_{\alpha_2}^{k_2} \ldots \theta_{\alpha_l}^{k_l}, \tag{6}$$

где

$$0 < k_i < p \quad \text{и} \quad \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_l.$$

Действительно, возьмем любой элемент $x \in G$, $x \neq 1$; для него найдется такой скачок, что $x \in L_{\alpha_1+1} - L_{\alpha_1}$. Так как фактор-группа $L_{\alpha_1+1}/L_{\alpha_1}$ является циклической порядка p с образующим элементом $\bar{\theta}_{\alpha_1}$, то $x = \bar{\theta}_{\alpha_1}^{k_1}$, где $0 < k_1 < p$. Отсюда

$$x = \theta_{\alpha_1}^{k_1} x_1, \tag{7}$$

где $x_1 \in L_{\alpha_1}$. Далее, для x_1 найдется такой скачок нашего L-ряда, что $x_1 \in L_{\alpha_2+1} - L_{\alpha_2}$, где $\alpha_2 < \alpha_1$.

Повторяя вышеприведенное рассуждение, мы получим, что

$$x_1 = \theta_{\alpha_2}^{k_2} x_2,$$

где $x_2 \in L_{\alpha_2}$. Следовательно

$$x = \theta_{\alpha_1}^{k_1} \theta_{\alpha_2}^{k_2} x_2. \tag{8}$$

Продолжая это рассуждение, мы через конечное число шагов (так как L-ряд вполне упорядочен по возрастанию) получим

$$x = \theta_{\alpha_1}^{k_1} \theta_{\alpha_2}^{k_2} \ldots \theta_{\alpha_l}^{k_l}, \tag{9}$$

где $0 \leqslant k_i < p$ и $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_l$.

Доказательство единственности записи (9) не вызывает в рассматриваемом случае никаких затруднений.

Лемма 2. *Если регулярная p-группа G, у которой всякая подгруппа вида $\{a, b\}$ конечна, обладает L-рядом*

$$G^{(1)} = L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_\beta \subset \ldots \subset L_\nu = G$$

и $\{\theta_\beta\}$ — соответствующая каноническая система элементов,

$$\theta_\beta \in L_{\beta+1} - L_\beta,$$

то ряд

$$G^{(\alpha+1)} = L_0^{(\alpha)} \leqslant L_1^{(\alpha)} \leqslant L_2^{(\alpha)} \leqslant \ldots \leqslant L_\beta^{(\alpha)} \subseteq \ldots \subseteq L_\nu^{(\alpha)} = G^{(\alpha)}$$

после удаления повторений будет L-рядом группы $G^{(\alpha)}$, а элементы $\theta_\beta^{p^\alpha} \in L_{\beta+1}^{(\alpha)} - L_\beta^{(\alpha)}$ для тех θ_β, порядки которых больше p^α, образуют каноническую систему элементов группы $G^{(\alpha)}$.

Доказательство. Согласно теоремам 1 и 3 § 1 легко доказать, что все $L_\beta^{(\alpha)}$ являются характеристикой подгрупп группы $G^{(\alpha)}$ и нормальными делителями группы G, а фактор-группы $L_{\beta+1}^{(\alpha)}/L_\beta^{(\alpha)}$ будут группами порядка p или 1.

Покажем, что если $\theta_\beta^{p^\alpha} \neq 1$ и $\theta_\beta \in L_{\beta+1} - L_\beta$, то $\theta_\beta^{p^\alpha} \in L_{\beta+1}^{(\alpha)} - L_\beta^{(\alpha)}$. Действительно, допустим противное, т. е. пусть $\theta_\beta^{p^\alpha} \in L_\beta^{(\alpha)}$; тогда в L_β найдется такой элемент $b \in L_\beta \subset L_{\beta+1}$, что

$$\theta_\beta^{p^\alpha} = b^{p^\alpha} \tag{10}$$

согласно теореме 4 § 1 из равенства (10) получим

$$(\theta_\beta b^{-1})^{p^\alpha} = 1,$$

а так как $\theta_\beta b^{-1} \in L_{\beta+1} - L_\beta$, то мы приходим к противоречию, так как, по предположению, θ_β был элементом наименьшего порядка в $L_{\beta+1}$, не лежащим в L_β. Заметим, наконец, что элемент $\theta_\beta^{p^\alpha} \neq 1$ будет иметь наименьший порядок в своем скачке, т. е. лемма 2 полностью доказана.

§ 3

Теорема. *Если в регулярной p-группе G 1) порядки элементов ограничены в совокупности, 2) всякая подгруппа вида $\{a, b\}$ конечна и 3) существует L-ряд, то всякая каноническая система элементов этой группы будет базой единственности.*

Доказательство. Пусть $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\beta, \ldots$ является канонической системой элементов группы G и пусть x — произвольный элемент группы G, отличный от 1. Нам нужно показать, что x можно единственным образом представить в виде

$$x = \theta_{\alpha_1}^{k_1} \theta_{\alpha_2}^{k_2} \ldots \theta_{\alpha_r}^{k_r}, \tag{11}$$

где $0 \leqslant k_i < p^{n_{\alpha_i}}$, $p^{n_{\alpha_i}}$ — порядки элемента θ_{α_i}, и $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_r$. Докажем сначала, что такое представление возможно. Рассмотрим фактор-группу $G/G^{(1)} = \overline{G}$. В группе $\overline{G}$ каждый элемент, кроме 1, имеет порядок p и, как легко заметить, образ нашей канонической системы элементов является канонической системой элементов группы $\overline{G}$. Отсюда, по лемме 1 § 2 мы получим, что образ $\overline{x} \in \overline{G}$ элемента $x \in G$ однозначно записывается в виде

$$\overline{x} = \overline{\theta}_{\beta_1}^{n_1} \overline{\theta}_{\beta_2}^{n_2} \ldots \overline{\theta}_{\beta_l}^{n_l}, \tag{12}$$

где $\beta_1 > \beta_2 > \ldots > \beta_r$.

Следовательно, элемент $x \in G$ записывается в виде

$$x = x_1 \theta_{\beta_1}^{n_1} \theta_{\beta_2}^{n_2} \ldots \theta_{\beta_l}^{n_l}, \tag{13}$$

где $x_1 \in G^{(1)}$ и $\beta_1 > \beta_2 > \ldots > \beta_l$.

Рассмотрим фактор-группу $\dfrac{G^{(1)}}{G^{(2)}} = \overline{G}^{(1)}$, по лемме 2 § 2 следует, что те из элементов $\{\overline{\theta}_\beta^p\}$, которые отличны от 1, образуют каноническую систему элементов фактор-группы $\overline{G}^{(1)}$. Рассуждая аналогично предыдущему, получим, что элемент $x_1 \in G^{(1)}$ запишется в виде

$$x_1 = x_2 (\theta_{\gamma_1}^p)^{l_1} (\theta_{\gamma_2}^p)^{l_2} \ldots (\theta_{\gamma_m}^p)^{l_m}, \tag{14}$$

где $x_2 \in G^{(2)}$ и $\gamma_1 > \gamma_2 > \ldots > \gamma_m$. Это значение x_1 подставим в соотношение (13) и получим

$$x = x_2 (\theta_{\gamma_1}^p)^{l_1} (\theta_{\gamma_2}^p)^{l_2} \ldots (\theta_{\gamma_m})^{l_m} \theta_{\beta_1}^{n_1} \theta_{\beta_2}^{n_2} \ldots \theta_{\beta_r}^{n_r}. \tag{15}$$

В этой записи берем индекс β_1, и среди индексов $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ находим два соседних индекса таких, что $\gamma_i < \beta_1 \leqslant \gamma_{i-1}$. Переносим элемент $\theta_{\beta_1}^{n_1}$ на свое место, т. е. ставим после $(\theta_{\gamma_{i-1}}^{p})^{l_{i-1}}$, причем если $\gamma_{i-1} = \beta_1$, то объединяем и получим $\theta_{\beta_{i-1}}^{pl_i + n_1}$.

При этом переносе элемент $(\theta_{\gamma_{i+1}}^{p})^{l_{i+1}} \ldots (\theta_{\gamma_m}^{p})^{l_m}$ заменяется сопряженным элементом

$$\theta_{\beta_1}^{-n_1} (\theta_{\gamma_{i+1}}^{p})^{l_{i+1}} \ldots (\theta_{\gamma_m}^{p})^{l_m} \theta_{\beta_1}^{n_1} = y \in L_{\gamma'_{i+1}}^{(1)},$$

так как $L_{\gamma_{i+1}}^{(1)}$ является нормальным делителем группы G; при этом элемент $y \in L_{\gamma_{i+1}}^{(1)}$ записывается в виде произведения элементов $\theta_{\gamma'}$, где $\gamma' \leqslant \gamma_{i+1}$, с точностью до элементов из $G^{(2)}$. Рассмотрим затем элемент $\theta_{\beta_2}^{n_2}$ и произведем над ним аналогичные преобразования. Продолжая так далее, мы через конечное число шагов приведем выражение (15) к следующему виду:

$$x = x'_2 \, \theta_{\delta_1}^{l_1} \theta_{\delta_2}^{l_2} \ldots \theta_{\delta_n}^{l_n}, \tag{16}$$

где $x'_2 \in G^{(2)}$ и $\delta_1 > \delta_2 > \ldots > \delta_n$.

Повторяя аналогичную операцию, после конечного числа шагов в силу того, что существует такое число μ, для которого $G^{(\mu)} = E$, получим, что любой элемент $x \in G$ имеет запись

$$x = \theta_{\alpha_1}^{k_1} \cdot \theta_{\alpha_2}^{k_2} \ldots \theta_{\alpha_r}^{k_r}, \tag{17}$$

где $0 \leqslant k_i < p^{n\alpha_i}$, и $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_r$.

Теперь докажем единственность записи любого элемента x группы G в виде (17).

Для группы, каждый элемент которой имеет порядок, не превосходящий p, единственность записи элемента $x \in G$ в виде (17) доказана в лемме 1 § 2. Допустим, что наше утверждение доказано для всех регулярных p-групп, обладающих L-рядом, порядок элементов которых не превосходит $p^{\mu-1}$, и докажем ее справедливость для регулярных p-групп, обладающих L-рядом, порядок элементов которых не превосходит p^{μ}.

Допустим противное. Пусть некоторый элемент $x \in G$ имеет две различные записи:

$$x = \theta_{\alpha_1}^{k_1} \theta_{\alpha_2}^{k_2} \ldots \theta_{\alpha_r}^{k_r} = \theta_{\delta_1}^{n_1} \theta_{\delta_2}^{n_2} \ldots \theta_{\delta_k}^{n_k}, \tag{18}$$

где $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_r$ и $\delta_1 > \delta_2 > \ldots > \delta_k$.

Рассмотрим фактор-группу $G / G^{(\mu-1)} = \overline{G}$. Эта группа удовлетворяет всем условиям теоремы, и, кроме того, порядок каждого элемента ее не превосходит $p^{\mu-1}$. Следовательно, по индуктивному предположению для этой фактор-группы теорема справедлива и поэтому образ $\overline{x} \in \overline{G}$ элемента $x \in G$ однозначно записывается в виде

$$\overline{x} = \overline{\theta}_{\gamma_{n_1}}^{s n_1} \, \overline{\theta}_{\gamma_{n_2}}^{s n_2} \ldots \overline{\theta}_{\gamma_{n_t}}^{s n_t}, \tag{19}$$

где $\gamma_{n_1} > \gamma_{n_2} > \ldots > \gamma_{n_t}$.

Отсюда следует, что индексы элементов канонической системы, входящие в одну из записей (18), либо входят и в другую запись, либо соответствующий элемент $\theta_{\alpha_i}^{ki}$ (если θ_{α_i} в другую запись не входит) лежит в $G^{(\mu-1)}$. Для элементов, индексы которых входят в обе записи, имеет место равенство

$$\theta_{\gamma_{i_l}}^{k_{i_l}} = \theta_{\gamma_{i_l}}^{n_{i_l}} c, \quad (l=1, 2, \ldots, t),$$

где $c \in G^{(\mu-1)}$, т. е. $\theta_{\gamma_{i_l}}^{k_{i_l}-n_{i_l}} = c \in G^{(\mu-1)}$. Отсюда $k_{i_l} - n_{i_l} = p^{\mu-1} k$, где $0 < k < p$.

Допустим теперь, что $\alpha_1 \neq \delta_1$; для определенности положим, что $\alpha_1 > \delta_1$. Тогда $\theta_{\alpha_1}^{k_1}$ при гоморфизме $G \to G/G^{(\mu-1)}$ отображается в единицу и, следовательно, по лемме 2 § 2 имеет вид $\theta_{\alpha_1}^{k_1} = \theta_{\alpha_1}^{lp^{\mu-1}}$, где $(l, p)=1$.

Равенство (18) перепишем так:

$$\theta_{\alpha_1}^{lp^{\mu-1}} = \theta_{\delta_1}^{n_1} \theta_{\delta_2}^{n_2} \ldots \theta_{\delta_k}^{n_k} \cdot \theta_{\alpha_r}^{-k_r} \cdot \theta_{\alpha_{r-1}}^{-k_{r-1}} \ldots \theta_{\alpha_2}^{-k_2}. \tag{20}$$

Допустим, что элементы $\theta_{\delta_k}^{n_k}, \ldots, \theta_{\delta_j}^{n_j}$, $j \leqslant k$; а также элементы $\theta_r^{-k_r}, \ldots, \theta_{\alpha_t}^{-k_t}$, $t \leqslant r$ содержатся в G, а элементы $\theta_{\delta_{j-1}}^{n_{j-1}}, \ldots, \theta_{\delta_1}^{n_1}$ и также элементы $\theta_{\alpha_{t-1}}^{-k_{t-1}}, \ldots, \theta_{\alpha_r}^{-k_r}$ не содержатся в $G^{(\mu-1)}$. Тогда, ввиду индуктивного предположения индексы δ_{j-1} и α_{t-1} совпадают, т. е. $\delta_{j-1} = \alpha_{t-1}$. Перенесем элемент $\theta_{\alpha_{t-1}}^{-k_{t-1}}$ к элементу $\theta_{\delta_{j-1}}^{n_{j-1}}$; равенство (20) примет вид

$$\theta_{\alpha_1}^{lp^{\mu-1}} = \theta_{\delta_1}^{n_1} \ldots \theta_{\delta_{j-1}}^{n_{j-1}-k_{t-1}} \cdot \theta_1 \theta_{\alpha_{t-2}}^{-k_{t-2}} \ldots \theta_{\alpha_2}^{-k_2}, \tag{21}$$

где $\theta_1 \in L_{\delta_{j-1}+1}^{(\mu-1)}$.

Повторяя вышеуказанное рассуждение, мы получим, что правая часть равенства (21) содержится в $L_\sigma^{(\mu-1)}$, где $\sigma = \max(\delta_1, \alpha_2) < \alpha_1$. С другой стороны, согласно леммы 2, § 2

$$\theta_{\alpha_1}^{lp^{\mu-1}} \in L_{\alpha_1+1}^{(\mu-1)} - L_{\alpha_1}^{(\mu-1)}, \quad \text{т. е.} \quad \theta_{\alpha_1}^{lp^{\mu-1}} \in L_{\alpha_1+1}^{(\mu-1)}$$

и не лежит в $L_{\alpha_1}^{(\mu-1)}$, что противоречит равенству (21). Таким образом получено, что $\alpha_1 = \delta_1$. Если бы $k_1 \neq n_1$, например $k_1 > n_1$, то умножив элемент x слева на $\theta_{\delta_1}^{-n_1}$, мы пришли бы к первому случаю. Следовательно $k_1 = n_1$. Повторяя предыдущие рассуждения для равенства

$$\theta_{\alpha_1}^{-k_1} x = \theta_{\alpha_2}^{k_2} \ldots \theta_{\alpha_r}^{k_r} = \theta_{\delta_2}^{n_2} \ldots \theta_{\delta_k}^{n_k}, \tag{22}$$

получим, что $\alpha_2 = \delta_2$, $k_2 = n_2$ и т. д. Тем самым доказана единственность записи (17). Теорема полностью доказана. Частными случаями доказанной теоремы являются:

1. Теорема Холла [4]. *Если p-группа G конечна и регулярна, то всякая каноническая система элементов является базой единственности.*

2. Теорема Прюфера (см. А. Г. Курош [1]). *Всякая примерная абелева группа с ограниченными в совокупности порядками элементов разлагается в прямую сумму циклических групп.*

3. Теорема. *Всякая регулярная RN^* p-группа G с ограниченными в совокупности порядками элементов обладает базой единственности.*

В заключение автор считает своим долгом выразить глубокую благодарность проф. А. Г. Курошу и доц. А. П. Дицману за оказанное внимание и ряд ценных указаний при выполнении настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Курош, Теория групп, Гостехиздат, М.—Л., 1944.

2. А. Г. Курош и С. Н. Черников, Разрешимые и нильпотентные группы, Успехи матем. наук, т. 2, 3 (19), 1947, 18—59.

3. Ш. С. Кемхадзе, О регулярности p-групп при $p = 2$, Сообщения АН Грузинской ССР, т. X, (1950).

4. Ф. Холл, (Ph. Hall), A contribution to the theory of groups of prime-power order, Proc. London Math. Soc., 36 (1933), 29—95.

Получена 8 февраля 1951 г.
Батуми.