

Фильтрация без подпора из незакольтматированного канала трапециoidalного сечения в однородном грунте

Ю. Д. Соколов

1. Основные предпосылки. Постановка задачи

Большие потери воды на фильтрацию из каналов обуславливают практическую важность исследования этого явления, что, естественно, вызвало появление большого количества экспериментальных и теоретических работ, посвященных этому вопросу.

В настоящей статье мы не останавливаемся на обзоре этих работ, так как это сделано обстоятельно в книге проф. В. В. Ведерникова [7]. Отметим только, что первое гидромеханическое решение задачи о движении грунтовых вод со свободной поверхностью было дано в 1920 г. проф. Н. Е. Жуковским [8]. Он же рассмотрел случай фильтрации из канала бесконечной ширины с вертикальным откосом при бесконечной глубине залегания дренирующего слоя.

В 1931 г. Козени, применяя так называемый обратный метод, т. е. задаваясь наперед характеристической функцией течения, получил три случая фильтрации „в бесконечность“, соответствующих характеристическим функциями течения [9]¹:

$$z = -He^{-\frac{\pi w}{Q}} + i\frac{w}{x}, \quad z = He^{\frac{\pi w}{Q}} + i\frac{w}{x} + \frac{Q}{2x},$$

$$z = \frac{H}{i} \sin\left(i\pi \frac{w}{Q}\right) + i\frac{w}{x} + \frac{Q}{2x},$$

где $z = x + iy$ — комплексная координата точки в плоскости течения, $w = \varphi + i\psi$ — комплексный потенциал, Q — расход на фильтрацию на единицу длины канала, x — коэффициент фильтрации и H — наибольшая глубина воды в русле (с криволинейным очертанием поперечного сечения). Первый из этих случаев был найден в 1930 г. (опубликован в 1934 г. [1]) проф. В. В. Ведерниковым, принимавшим в плоскости комплекса Н. Е. Жуковского

$$\theta = \theta_1 + i\theta_2 = iw + ixz = \varphi - xy + i(\psi + xz)$$

периметр канала за полуокружность.

¹ Этот метод впервые применялся в 1921 г. Л. Хопфом и Э. Треффцем [13] в задаче об определении расхода грунтовых вод, перехватываемого „головной“ канавой.

В 1933 г. им же было дано решение задачи о фильтрации из канала, ограниченного с боков вертикальными непроницаемыми стенками, при конечной глубине залегания дренирующего слоя.

Некоторые случаи фильтрации из каналов при ряде упрощающих предположений были рассмотрены также акад. Н. Н. Павловским (10).

В ряде дальнейших работ проф. В. В. Ведерникова [2—6] был разработан достаточно общий метод и решены задачи о фильтрации в однородном грунте из каналов с треугольным и трапециoidalным поперечными сечениями при бесконечной глубине залегания дренирующего слоя. Эти решения были затем найдены в несколько иной форме проф. Б. К. Ризенкампом [11, 12].

Случай конечной глубины залегания грунта значительной водопроницаемости был рассмотрен проф. В. В. Ведерниковым в 1933 г. [1] в задаче о фильтрации без подпора из канала трапециoidalного сечения при наперед заданном законе изменения ψ на откосе (соответственно $\theta_2 = \text{const}$), вследствие чего откосы получились криволинейными.

В настоящей работе рассматривается задача о фильтрации в однородном грунте из незакольматированного канала трапециoidalного поперечного сечения при конечной глубине залегания дренирующего слоя, причем особое внимание обращено на разработку методов приближенного расчета, дающих достаточную точность в первом или в крайнем случае во втором приближении.

Таким образом, в дальнейшем решается задача о просачивании из канала через слой однородного грунта (например, суглинка) толщиной T в подстилающий его более водопроницаемый грунт (например, крупнозернистый песок или гравий), коэффициент фильтрации которого значительно превышает скорости фильтрации в верхнем грунте, так, что горизонт грунтовых вод от фильтрации не поднимается выше границы (горизонтальной) раздела между грунтами („фильтрация без подпора“).

Большая протяженность участков канала с относительно постоянным поперечным сечением и более или менее одинаковыми геологическими условиями позволяет ставить задачу о фильтрации без подпора как плоскую.

При этом, как обычно, в дальнейшем будем предполагать, что жидкость несжимаема, движение в грунте установившееся и подчиняется закону Дарси (силами инерции явлением капиллярного поднятия пренебрегаем)

$$\bar{v} = \kappa \bar{J} = -\kappa \text{grad } U, \quad U = \frac{p}{\rho g} + y \quad \left(J = -\frac{dU}{ds} \right), \quad (1)$$

где \bar{v} — „скорость фильтрации“, U — напорная функция, J — гидравлический уклон, $p = p_{\text{абс}} - p_{\text{атм}}$ — избыточное давление в данной точке грунтового потока, ρ — плотность жидкости, g — ускорение силы тяжести, y — координата, отсчитываемая вверх по вертикали.

Потенциал скорости представляется в виде

$$\varphi = -\kappa U + \text{const} = -\kappa \left(\frac{p}{\rho g} + y \right) + \text{const} \quad (2)$$

и на основании уравнения неразрывности удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad (3)$$

2. Характеристическая функция течения

Пусть (рис. 1) $BCDC'B'$ периметр поперечного сечения канала с углом заложения откоса α , шириной поверху B , шириной понизу b , длиной откоса c и глубиной H . Пусть $AB, A'B'$ — кривые депрессии, а AEA' — горизонтальная граница раздела грунтов.

Расположив оси координат как показано на рис. 1, будем рассматривать, вследствие полной симметрии, половину области течения $ABCDEA$.

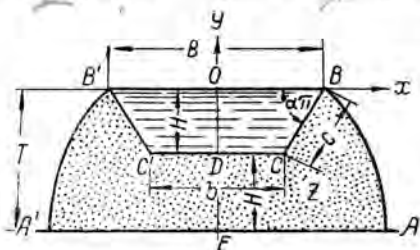


Рис. 1.

Для определения комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$ имеем следующие граничные условия: на BCD $\varphi = 0$, на AB $\psi = 0$ и, так как на кривой депрессии $p = 0$, то по (2).

$$\varphi = -xy \quad (\varphi = 0 \text{ при } y = 0), \quad (4)$$

на AE $\varphi = xT$ и, наконец, на DE $\psi = -\frac{Q}{2}$, где Q — полный расход на фильтрацию на единицу длины канала.

Таким образом, рассматриваемой области течения будет соответствовать в плоскости w прямоугольник, изображенный на рис. 2, причем

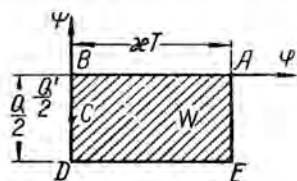


Рис. 2.

через $\frac{Q'}{2}$ обозначен расход через откос BC .

Дифференцируя (4) по дуге кривой депрессии, найдем, что на AB

$$v_x^2 + v_y^2 + xv_y = 0, \quad (5)$$

так что области $ABCDEA$ плоскости z в плоскости $v_x + iv_y$ будет соответствовать заштрихованная на рис. 3 область, ограниченная годографом скорости.

Произведя инверсию этой области относительно окружности единичного радиуса с центром в начале координат согласно формуле

$$u = \frac{dz}{dw} = \frac{1}{v_x - iv_y}, \quad (6)$$

получим в области „обратной комплексной скорости“ u треугольник¹, изображенный на рис. 4.

¹ Полуоклосу в случае $\alpha = \frac{1}{2}$.

Отобразим конформно этот треугольник на верхнюю полуплоскость вспомогательной переменной ζ так, чтобы вершинам B, C, A соответствовали значения $\zeta = 0, 1$ и ∞ (рис. 5).

По формуле Кристоффеля—Шварца будем иметь

$$u = A' \int_0^{\zeta} \zeta^{-\alpha - \frac{1}{2}} (\zeta - 1)^{\alpha - 1} d\zeta + \frac{\operatorname{tg} \alpha \pi - i}{\alpha}.$$

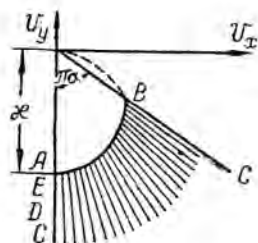


Рис. 3.

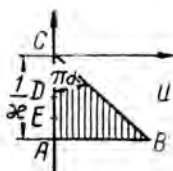


Рис. 4.

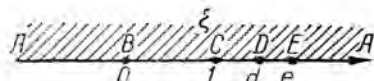


Рис. 5.

Применяя это к точке C , получим для определения A' равенство

$$\begin{aligned} 0 &= -A' e^{i\alpha\pi} \int_0^1 \zeta^{-\alpha - \frac{1}{2}} (1 - \zeta)^{\alpha - 1} d\zeta + \frac{\operatorname{tg} \alpha \pi - i}{\alpha} = \\ &= -A' e^{i\alpha\pi} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha)}{\cos \alpha \pi \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)} + \frac{\operatorname{tg} \alpha \pi - i}{\alpha}, \end{aligned}$$

откуда

$$A' = -\frac{i}{\alpha} A, \quad \text{где } A = \frac{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha)}, \quad (7)$$

и, следовательно,

$$u = -\frac{i}{\alpha} A \int_0^{\zeta} \zeta^{-\alpha - \frac{1}{2}} (\zeta - 1)^{\alpha - 1} d\zeta + \frac{\operatorname{tg} \alpha \pi - i}{\alpha}. \quad (8)$$

В частности, на отрезке BC ($0 \leq \zeta \leq 1$)

$$u = e^{i\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\pi} \frac{A}{\alpha} \int_0^{\zeta} \zeta^{-\alpha - \frac{1}{2}} (1 - \zeta)^{\alpha - 1} d\zeta + \frac{\operatorname{tg} \alpha \pi - i}{\alpha}, \quad (8a)$$

на CD, DE и EA ($\zeta \geq 1$)

$$u = -i \frac{A}{\alpha} \int_1^{\zeta} \zeta^{-\alpha - \frac{1}{2}} (\zeta - 1)^{\alpha - 1} d\zeta, \quad (8б)$$

и на кривой депрессии ($\zeta \leq 0$)

$$u = \frac{A}{x} \int_0^{\zeta} (-\zeta)^{-\alpha - \frac{1}{2}} (1 - \zeta)^{\alpha - 1} d\zeta + \frac{\operatorname{tg} \alpha \pi - i}{x}. \quad (8\text{в})$$

В случае прямоугольного сечения ($\alpha = \frac{1}{2}$) $A = \frac{1}{\pi}$ и соответственно (8а)—(8в) будем иметь

$$u = \frac{1}{\pi n} \int_{\zeta}^1 \frac{d\zeta}{\zeta \sqrt{1 - \zeta}} = \frac{2}{\pi n} \operatorname{Ar ch} \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \quad (\text{на } BC), \quad (8'\text{а})$$

$$u = -\frac{i}{\pi n} \int_1^{\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta \sqrt{\zeta - 1}} = -\frac{2i}{\pi n} \operatorname{arc cos} \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \quad (\text{на } CD, DE \text{ и } EA), \quad (8'\text{б})$$

$$u = -\frac{1}{\pi n} \int_{-\infty}^{\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta \sqrt{1 - \zeta}} - \frac{i}{x} = \frac{2}{\pi n} \operatorname{Ar sh} \frac{1}{\sqrt{-\zeta}} - \frac{i}{x} \quad (\text{на } BA). \quad (8'\text{в})$$

Отображая, наконец, прямоугольник области w (рис. 2) на верхнюю полуплоскость ζ согласно формуле

$$w = A'' \int_0^{\zeta} \zeta^{-\frac{1}{2}} (\zeta - d)^{-\frac{1}{2}} (\zeta - e)^{-\frac{1}{2}} d\zeta = \frac{2A''}{\sqrt{e}} \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{2\sqrt{d} \sqrt{\zeta \left(\frac{\zeta}{d} - 1\right) \left(k^2 \frac{\zeta}{d} - 1\right)}},$$

где $k^2 = \frac{d}{e} < 1$, а d и e — абсциссы точек действительной оси ζ , соответствующих точкам, D, E найдем

$$\begin{aligned} -i \frac{Q}{2} &= -\frac{2A''}{\sqrt{e}} \int_0^d \frac{d\zeta}{2\sqrt{d \cdot \zeta} \sqrt{\left(1 - \frac{\zeta}{d}\right) \left(1 - k^2 \frac{\zeta}{d}\right)}} = \\ &= -\frac{2A''}{\sqrt{e}} K, \quad \frac{2A''}{\sqrt{e}} = i \frac{Q}{2K}, \end{aligned}$$

где K — полный эллиптический интеграл первого рода, соответствующий модулю k .

Следовательно,

$$w = i \frac{Q}{2K} \int_0^{\zeta} \frac{1}{2\sqrt{d} \sqrt{\zeta \left(\frac{\zeta}{d} - 1\right) \left(k^2 \frac{\zeta}{d} - 1\right)}} d\zeta \quad (9)$$

и

$$\zeta = \frac{\operatorname{sn}^2 \frac{2iKw}{\lambda^2}}{\lambda^2}, \quad \text{где } \lambda = \sin \vartheta = \frac{1}{\sqrt{d}}. \quad (10)$$

1) В случае треугольного сечения ($b=0$): $d=1$, $k^2 = \frac{1}{e}$, $\lambda=1$ и $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.

Применяя (10) к точкам $C \left(\zeta=1, w=-i\frac{Q'}{2} \right)$ и $A(\zeta=\infty, w=xT)$, найдем

$$Q' = Q \frac{F(\vartheta)}{K}, \quad Q = 2xT \frac{K'}{K}, \quad (11)$$

где $F(\vartheta) = \int_0^{\vartheta} \frac{d\chi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \chi}}$ — неполный эллиптический интеграл первого рода, и K' — полный эллиптический интеграл, соответствующий дополнительному модулю $k' = +\sqrt{1-k^2}$. Интегрируя (8) получим характеристическую функцию течения в виде

$$\begin{aligned} z &= -\frac{i}{x} A \int_0^w dw \int_0^{\frac{1}{\lambda^2} \operatorname{sn}^2 \frac{2iKw}{Q}} \zeta^{-\alpha-\frac{1}{2}} (\zeta-1)^{\alpha-1} d\zeta + \frac{\operatorname{tg} \alpha\pi - i}{x} w_s + \frac{B}{2} = \\ &= \frac{\lambda A Q_s}{4K} \int_0^{\zeta} \frac{\Phi_1 d\zeta}{\sqrt{\zeta(\lambda^2 \zeta - 1)(k^2 \lambda^2 \zeta - 1)}} + (\operatorname{tg} \alpha\pi - i) w_s + \frac{B}{2} \end{aligned} \quad (12)$$

или в виде

$$\begin{aligned} z &= -\frac{iA}{x} \int_0^w dw \int_1^{\frac{1}{\lambda^2} \operatorname{sn}^2 \frac{2iKw}{Q}} \zeta^{-\alpha-\frac{1}{2}} (\zeta-1)^{\alpha-1} d\zeta + \frac{B}{2} - H \operatorname{ctg} \alpha\pi - iH = \\ &= \frac{\lambda A Q_s}{4K} \int_1^{\zeta} \frac{\Phi_2 d\zeta}{\sqrt{\zeta(\lambda^2 \zeta - 1)(k^2 \lambda^2 \zeta - 1)}} + \frac{B}{2} - H \operatorname{ctg} \alpha\pi - iH, \end{aligned} \quad (12')$$

где

$$\Phi_1 = \int_0^{\zeta} \zeta^{-\alpha-\frac{1}{2}} (\zeta-1)^{\alpha-1} d\zeta, \quad \Phi_2 = \int_1^{\zeta} \zeta^{-\alpha-\frac{1}{2}} (\zeta-1)^{\alpha-1} d\zeta,$$

$Q_s = \frac{Q}{x}$ („приведенный расход“), $w_s = \frac{w}{x}$ („приведенный комплексный потенциал“).

Из (12) интегрированием по частям найдем, что, в частности, на BC

$$z = \frac{A Q_s}{2K} e^{i\omega\pi} \int_0^{\zeta} \frac{F(\omega) - F(\tau)}{t^{\alpha+\frac{1}{2}} (1-t)^{1-\alpha}} dt + (1 + i \operatorname{tg} \alpha\pi) \psi_s + \frac{B}{2}, \quad (12a)$$

$$\left\{ z = -\frac{iQ_s}{2\pi K} \left[2F(\omega) \operatorname{Ar} \operatorname{ch} \frac{1}{\sqrt{\zeta}} + \int_0^{\zeta} \frac{F(\tau)}{t\sqrt{1-t}} dt \right] + \frac{B}{2} \text{ при } \alpha = \frac{1}{2} \right\},$$

где

$$\omega = \operatorname{arc} \sin \lambda \sqrt{\zeta}, \quad \tau = \operatorname{arc} \sin \lambda \sqrt{t}, \quad \psi_s = \frac{\psi}{x} \left(\zeta = \frac{\operatorname{sn}^2 \frac{2K\psi}{Q}}{\lambda^2} \right).$$

Таким же образом из (12') найдем, что на CD

$$z = x - iH = -\frac{AQ_s}{2K} \int_1^{\zeta} \frac{F(\omega) - F(x)}{t^{\alpha + \frac{1}{2}} (t-1)^{1-\alpha}} dt + \frac{B}{2} - H \operatorname{ctg} (\alpha\pi - iH). \quad (12a')$$

На линии раздела грунтов EA

$$z = x - iT = \frac{AQ_s}{2K} \left\{ [K - F(\omega_1)] \int_1^{\zeta} t^{-\alpha - \frac{1}{2}} (t-1)^{\alpha-1} dt - \int_0^{\zeta} \frac{K - F(\tau_1)}{t^{\alpha + \frac{1}{2}} (t-1)^{1-\alpha}} dt \right\} - iT, \quad (12б)$$

где

$$\omega_1 = \operatorname{arc} \sin \frac{1}{k\lambda\sqrt{\zeta}}, \quad \tau_1 = \operatorname{arc} \sin \frac{1}{k\lambda\sqrt{t}}.$$

Наконец, для кривой депрессии ($\zeta \leq 0$) из (12) получим

$$z = -\frac{AQ_s}{2K} \int_0^{\zeta} \frac{F(\tau_2; k') - F(\omega_2; k')}{(-t)^{\alpha + \frac{1}{2}} (1-t)^{1-\alpha}} dt + \frac{B}{2} - y \operatorname{tg} \alpha\pi + iy, \quad (12в)$$

$$\left\{ z = \frac{Q_s}{2\pi K} \left[2F(\omega_2; k') \operatorname{Ar} \operatorname{sh} \frac{1}{\sqrt{-\zeta}} + \int_0^{\zeta} \frac{F(\tau_2; k')}{t\sqrt{1-t}} dt \right] + \frac{B}{2} + iy \quad \text{при } \alpha = \frac{1}{2} \right\},$$

где

$$\omega_2 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \lambda \sqrt{-\zeta} = \operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{-\lambda^2 \zeta}{1 - \lambda^2 \zeta}}, \quad \tau_2 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \lambda \sqrt{-t},$$

причем

$$\zeta = -\frac{1}{\lambda^2} \frac{\operatorname{sn}'^2 \frac{2Ky}{Q_s}}{\operatorname{cn}'^2 \frac{2Ky}{Q_s}}, \quad (10a)$$

и штрихами обозначены эллиптические функции, соответствующие дополнительному модулю k' .

Таким образом, уравнение кривой депрессии представится в виде

$$\frac{B}{2} - y \operatorname{tg} \alpha\pi - x = \frac{AQ_s}{2K} \int_0^{\zeta} \frac{F(\tau_2; k') - F(\omega_2; k')}{(-t)^{\alpha + \frac{1}{2}} (1-t)^{1-\alpha}} dt =$$

$$= \frac{4\lambda AK}{Q_s} \int_0^{y_1} \frac{(y_1 - \eta) \operatorname{dn}' \frac{2K\eta}{Q_s}}{\operatorname{sn}'^{2\alpha} \frac{2K\eta}{Q_s} \left(1 - \lambda_1^2 \operatorname{cn}'^2 \frac{2K\eta}{Q_s} \right)^{1-\alpha}} d\eta \quad (y_1 = -y; \lambda_1 = \cos \vartheta = +\sqrt{1 - \lambda^2}). \quad (13)$$

В случае $\alpha = \frac{1}{2}$ для кривой депрессии получим уравнение

$$\pi \left(x - \frac{B}{2} \right) = 2y_1 \operatorname{Ar} \operatorname{sh} \frac{\lambda \operatorname{cn}' \frac{2Ky_1}{Q_s}}{\operatorname{sn}' \frac{2Ky_1}{Q_s}} +$$

$$+ \frac{4\lambda K}{Q_s} \int_0^{y_1} \frac{\eta \operatorname{dn}' \frac{2K\eta}{Q_s}}{\operatorname{sn}' \frac{2K\eta}{Q_s} \sqrt{1 - \lambda^2 \operatorname{cn}'^2 \frac{2K\eta}{Q_s}}} d\eta. \quad (13')$$

3. Система уравнений, определяющих параметры

Применяя (12а) к точке $C \left(z = \frac{B}{2} - H \operatorname{ctg} \alpha \pi - iH, \zeta = 1, \psi_s = -\frac{Q_s'}{2} \right)$, найдем

$$-H \operatorname{ctg} \alpha \pi - iH = \frac{AQ_s}{2K} e^{i\alpha\pi} \left[\frac{F(\vartheta)}{A \cos \alpha\pi} - I \right] - (1 + i \operatorname{tg} \alpha\pi) \frac{Q_s'}{2},$$

где

$$I = \int_0^1 \frac{F(\tau)}{t^{\alpha + \frac{1}{2}} (1-t)^{1-\alpha}} dt. \quad (14)$$

Отсюда

$$H \operatorname{ctg} \alpha \pi = \frac{AQ_s}{2K} I \cos \alpha\pi - \frac{Q_s}{2K} F(\vartheta) + \frac{Q_s'}{2},$$

что на основании первой из формул (11) даст

$$c = \frac{H}{\sin \alpha\pi} = \frac{AQ_s}{2K} I. \quad (15)$$

Применяя (12'а) к точке $D \left(z = -iH, \zeta = d = \frac{1}{\lambda^2} \right)$ и вводя обозначения

$$J_1 = \int_1^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{dt}{t^{\alpha + \frac{1}{2}} (t-1)^{1-\alpha}}, \quad J_2 = \int_1^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{F(t) dt}{t^{\alpha + \frac{1}{2}} (t-1)^{1-\alpha}}, \quad J = KJ_1 - J_2^{(1)}, \quad (14')$$

получим

$$\frac{b}{2} = \frac{B}{2} - H \operatorname{ctg} \alpha \pi = \frac{AQ_s}{2K} J. \quad (16)$$

Применяя, наконец, (12б) к точке $A (\zeta = +\infty, y = -iT)$, абсциссу которой в области течения обозначим через a , будем иметь

$$a = \frac{AQ_s}{2K} \left[K \int_1^{+\infty} t^{-\alpha - \frac{1}{2}} (t-1)^{\alpha-1} dt - G \right] = \frac{AQ_s}{2K} \left(\frac{K}{A} - G \right), \quad (17)$$

1) Так, что в случае прямоугольного сечения $J_1 = \pi - 2\theta$, а в случае треугольного $J_1 = J_2 = J = 0$.

где

$$G = \int_{\frac{1}{k^2}}^{+\infty} \frac{K - F(\tau)}{t^{\alpha + \frac{1}{2}} (t-1)^{1-\alpha}} dt. \quad (14')$$

Вводя обозначения

$$\beta = \frac{b}{2c} = \frac{b \sin \alpha l}{2H}, \quad \gamma = \frac{\alpha c}{A T} = \frac{\alpha}{A} \frac{H}{T \sin \alpha l} \quad (18)$$

и исключая Q_s из (15), (16) и второго из (11), для определения λ и k^2 получим систему двух уравнений

$$KJ_1 - J_2 = J = \beta I, \quad (A)$$

$$\alpha I = \gamma K', \quad (A_1)$$

комбинация которых дает

$$\frac{K'}{K} = \frac{\alpha}{\gamma} \frac{IJ_1}{J_2 + \beta I}. \quad (B)$$

После нахождения λ и k^2 Q_s , Q_s' и α определяются на основании (11) и (17) по формулам

$$Q_s = 2T \frac{K}{K'} = \frac{2T\gamma}{\alpha} \frac{J_2 + \beta I}{IJ_1}, \quad (B)$$

$$Q_s' = Q_s \frac{F(\vartheta)}{K} = 2T \frac{F(\vartheta)}{K'}, \quad (Г)$$

$$\alpha = \frac{Q_s}{2} \left(1 - \frac{A}{K} G \right). \quad (Д)$$

Для случая треугольного сечения ($\beta=0$) остаются уравнения (A₁), (B) и (Д).

По формуле (14)

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{F(x)}{t^{\alpha + \frac{1}{2}} (1-t)^{1-\alpha}} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{F(\tau)}{t^{\alpha + \frac{1}{2}} (1-t)^{1-\alpha}} dt.$$

Полагая в первом из этих интегралов при $\alpha < \frac{1}{2}$

$$t = \frac{\xi^{\frac{1}{2-\alpha}}}{1 + \xi^{\frac{1}{2-\alpha}}}$$

и $t = \frac{\xi^{\frac{1}{2}}}{2}$ при $\alpha = \frac{1}{2}$, а во втором

$$t = \frac{1}{1 + \xi^{\frac{1}{2}}}$$

получим

$$f = \alpha I = \frac{\alpha}{\frac{1}{2} - \alpha} \int_0^1 \frac{F(\sigma_1)}{\sqrt{1 + \xi^{\frac{1}{\frac{1}{2} - \alpha}}}} d\xi + \int_0^1 \frac{F(\sigma_2)}{\sqrt{1 + \xi^{\frac{1}{\alpha}}}} d\xi \quad \left(\alpha < \frac{1}{2} \right) \quad (19)$$

и

$$f = \frac{1}{2} I = \int_0^1 \frac{F(\sigma_1)}{\xi \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{2}}} d\xi + \int_0^1 \frac{F(\sigma_2)}{\sqrt{1 + \xi^2}} d\xi \quad \left(\alpha = \frac{1}{2} \right)^{11)}, \quad (19')$$

где

$$\sigma_1 = \arcsin \lambda \sqrt{\frac{\frac{1}{\frac{1}{2} - \alpha}}{\xi^{\frac{1}{\frac{1}{2} - \alpha}} + 1}} \quad \left(\sigma_1 = \arcsin \lambda \frac{\xi}{\sqrt{2}} \text{ при } \alpha = \frac{1}{2} \right), \quad (19'')$$

$$\sigma_2 = \arcsin \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \xi^{\frac{1}{\alpha}}}}.$$

Делая в интегралах (14') подстановку

$$t = \frac{1}{1 - \lambda_1^2 \xi^{\frac{1}{\alpha}}}$$

также найдем

$$g_1 = \frac{\alpha}{\lambda_1^{2\alpha}} J_1 = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \lambda_1^2 \xi^{\frac{1}{\alpha}}}}, \quad g_2 = \frac{\alpha}{\lambda_1^{2\alpha}} J_2 = \int_0^1 \frac{F(\sigma_3)}{\sqrt{1 - \lambda_1^2 \xi^{\frac{1}{\alpha}}}} d\xi \quad (g = K g_1 - g_2), \quad (20)$$

где

$$\sigma_3 = \arcsin \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \lambda_1^2 \xi^{\frac{1}{\alpha}}}}.$$

Полагая, наконец, в формуле (14'')

$$t = \frac{1}{k^2 \lambda^2 \xi^2}$$

1) Или полагая при $\alpha = \frac{1}{2}$ $t = \sin^2 \frac{\pi}{2} \xi$, получим

$$f = \frac{1}{2} I = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{F \left[\arcsin \left(\lambda \sin \frac{\pi}{2} \xi \right) \right]}{\sin \frac{\pi}{2} \xi} d\xi.$$

2) При $\alpha = \frac{1}{2}$: $g_1 = \frac{\pi - 2\vartheta}{2\lambda_1}$.

будем иметь

$$g_3 = \frac{G}{2k\lambda} = \int_0^1 \frac{K - F(\arcsin \xi)}{(1 - k^2 \lambda^2 \xi^2)^{1-\alpha}} d\xi. \quad (21)$$

Таким образом, на основании (19), (20), (21) формулы для определения параметров (А)–(Д) примут вид

$$\lambda_1^{2\alpha} (Kg_1 - g_2) = \beta f, \quad (A')$$

$$f = \gamma K', \quad (A'')$$

$$\frac{K'}{K} = \frac{1}{\gamma} \frac{g_1 f}{g_2 + \frac{\beta}{\lambda_1^{2\alpha}} f}, \quad (B')$$

$$Q_s = 2T \frac{K}{K'} = 2T \gamma \frac{g_2 + \frac{\beta}{\lambda_1^{2\alpha}} f}{g_1 f}, \quad (B'')$$

$$Q_s' = Q_s \frac{F(\vartheta)}{K} = 2T \frac{F(\vartheta)}{K'}, \quad (C')$$

$$a = \frac{Q_s}{2} \left(1 - \frac{2Ak\lambda}{K} g_3 \right). \quad (D')$$

Положив

$$f - F(\vartheta) = \delta,$$

по (A'') найдем

$$F(\vartheta) = f - \delta = \gamma K' - \delta,$$

откуда

$$\lambda = \sin \vartheta = \operatorname{sn}(\gamma K' - \delta). \quad (A''')$$

4. Случай бесконечной глубины залегания дренирующего слоя.

Уравнение кривой депрессии

В случае бесконечной глубины залегания дренирующего слоя ($T = \infty$, $k = 0$, $K = \frac{\pi}{2}$, $F(\vartheta) = \vartheta$) для откоса BC по (12а) будем иметь

$$z = \frac{AQ_s}{\pi} e^{i\alpha\pi} \int_0^{\zeta} \frac{\arcsin \lambda \sqrt{\zeta} - \arcsin \lambda \sqrt{t}}{t^{\alpha+\frac{1}{2}}(1-t)^{1-\alpha}} dt + (1 + i \operatorname{tg} \alpha\pi) \psi_s + \frac{B}{2} \left(\zeta = \frac{\sin^2 \frac{\pi\psi}{Q}}{\lambda^2} \right) \quad (22)$$

или

$$z = \frac{AQ_s}{\pi} e^{i\alpha\pi} \int_{\zeta}^1 \frac{\arcsin \lambda \sqrt{t} - \arcsin \lambda \sqrt{\zeta}}{t^{\alpha+\frac{1}{2}}(1-t)^{1-\alpha}} dt + \frac{b}{2} - iH. \quad (22a)$$

Для CD по (12а')

$$z = x - iH = -\frac{AQ_s}{\pi} \int_1^{\zeta} \frac{\arcsin \lambda \sqrt{\zeta} - \arcsin \lambda \sqrt{t}}{t^{\alpha + \frac{1}{2}}(t-1)^{1-\alpha}} dt + \frac{b}{2} - iH \quad (22б)$$

и на свободной поверхности по (12в)

$$z = -\frac{AQ_s}{\pi} \int_0^{\zeta} \frac{\operatorname{Ar sh} \lambda \sqrt{-t} - \operatorname{Ar sh} \lambda \sqrt{-\zeta}}{(-t)^{\alpha + \frac{1}{2}}(1-t)^{1-\alpha}} dt + \frac{B}{2} - y \operatorname{tg} \alpha n +$$

$$+ iy \left(\alpha < \frac{1}{2}; \zeta = -\frac{1}{\lambda^2} \operatorname{sh}^2 \frac{\pi y}{Q_s}; y = -\frac{Q_s}{\pi} \operatorname{Ar sh} \sqrt{-\zeta} \right), \quad (22в)$$

$$z = \frac{Q_s}{\pi^2} \left[2 \operatorname{Ar sh} \lambda \sqrt{-\zeta} \operatorname{Ar sh} \frac{1}{\sqrt{-\zeta}} + \int_0^{\zeta} \frac{\operatorname{Ar sh} \lambda \sqrt{-t}}{t \sqrt{1-t}} dt \right] + \frac{B}{2} + iy \quad \left(\alpha = \frac{1}{2} \right). \quad (22в')$$

Уравнение кривой депрессии представится в виде

$$\frac{B}{2} - y \operatorname{tg} \alpha n - x = -A \int_0^{\frac{1}{\lambda^2} \operatorname{sh}^2 \frac{\pi y}{Q_s}} \frac{y + \frac{Q_s}{\pi} \operatorname{Ar sh} \lambda \sqrt{t_1}}{t_1^{\alpha + \frac{1}{2}}(1+t_1)^{1-\alpha}} dt_1 =$$

$$= -\frac{2\pi\lambda A}{Q_s} \int_0^y \frac{(y+\eta) d\eta}{\operatorname{ch} \frac{\pi\eta}{Q_s} \operatorname{th}^2 \frac{\alpha\pi\eta}{Q_s} \left(1 - \lambda_1^2 \operatorname{sech}^2 \frac{\pi\eta}{Q_s} \right)^{1-\alpha}} \quad \left(\alpha < \frac{1}{2} \right), \quad (23)$$

$$n \left(x - \frac{B}{2} \right) = 2y_1 \operatorname{Ar sh} \frac{\lambda}{\operatorname{sh} \frac{\pi y_1}{Q_s}} + \frac{Q_s}{\pi} \int_0^{\frac{1}{\lambda^2} \operatorname{sh}^2 \frac{\pi y_1}{Q_s}} \frac{\operatorname{Ar sh} \lambda \sqrt{t_1}}{t_1 \sqrt{1+t_1}} dt_1 = 2y_1 \operatorname{Ar sh} \frac{\lambda}{\operatorname{sh} \frac{\pi y_1}{Q_s}} +$$

$$+ \frac{2\pi\lambda}{Q_s} \int_0^{y_1} \frac{\eta d\eta}{\operatorname{sh} \frac{\pi\eta}{Q_s} \sqrt{1 - \lambda_1^2 \operatorname{sech}^2 \frac{\pi\eta}{Q_s}}} \quad \left(\alpha = \frac{1}{2} \right), \quad (23')$$

или в виде

$$\frac{Q_s}{2} - x = A \int_0^{+\infty} \frac{Q_s \operatorname{Ar sh} \lambda \sqrt{t_1} - y_1}{t_1^{\alpha + \frac{1}{2}}(1+t_1)^{1-\alpha}} dt_1 \quad (23а)$$

$$\frac{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi y_1}{Q_s}}{\lambda^2}$$

Полагая в (23) $t_1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda^2} - \alpha}$, $-y = y_1$, найдем

$$\frac{B}{2} + y_1 \operatorname{tg} \alpha \pi - x = \frac{A}{\frac{1}{2} - \alpha} \int_0^1 \frac{1}{\left(1 + \lambda^2 \operatorname{csch}^2 \frac{\pi y_1}{Q_s}\right)^{\frac{1}{2} - \alpha}} \frac{y_1 - \frac{Q_s}{\pi} \operatorname{Ar sh} \frac{\lambda \xi^{\frac{1}{2} - 2\alpha}}{\sqrt{1 - \xi^{\frac{1}{2} - \alpha}}}}{\sqrt{1 - \xi^{\frac{1}{2} - \alpha}}} d\xi, \quad (24)$$

так что при малых значениях y_1 :

$$\begin{aligned} & \frac{B}{2} + y_1 \operatorname{tg} \alpha \pi - x \approx \\ & \approx \frac{A Q_s}{\pi \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)} \frac{1}{\left(1 + \lambda^2 \operatorname{csch}^2 \frac{\pi y_1}{Q_s}\right)^{\frac{1}{2} - \alpha}} \left[\frac{\pi y_1}{Q_s} - \frac{1 - 2\alpha}{2(1 - \alpha)} \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2 \operatorname{csch}^2 \frac{\pi y_1}{Q_s}}} \right] \end{aligned} \quad (24')$$

и в окрестности $y_1 = 0$

$$\frac{B}{2} + y_1 \operatorname{tg} \alpha \pi - x \approx \frac{A}{(1 - \alpha)(1 - 2\alpha)} \left(\frac{\pi}{\lambda Q_s}\right)^{1 - 2\alpha} y_1^{2(1 - \alpha)}. \quad (24'')$$

При $\alpha = \frac{1}{2}$, полагая в (23) $t_1 = \frac{\xi^2}{1 - \xi^2}$, получим

$$\pi \left(x - \frac{B}{2}\right) = 2y_1 \operatorname{Ar sh} \frac{\lambda}{\operatorname{sh} \frac{\pi y_1}{Q_s}} + 2 \frac{Q_s}{\pi} \int_0^1 \frac{\operatorname{Ar sh} \frac{\lambda \xi}{\xi \sqrt{1 - \xi^2}}}{\sqrt{1 + \lambda^2 \operatorname{csch}^2 \frac{\pi y_1}{Q_s}}} d\xi,$$

так что при малых значениях y_1

$$x - \frac{B}{2} \approx \frac{2Q_s}{\pi^2} \left[\frac{\pi y_1}{Q_s} \operatorname{Ar sh} \frac{\lambda}{\operatorname{sh} \frac{\pi y_1}{Q_s}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2 \operatorname{csch}^2 \frac{\pi y_1}{Q_s}}} \right]$$

и в окрестности $y_1 = 0$

$$x - \frac{B}{2} \approx \frac{2}{\pi} y_1 \ln \frac{2e\lambda Q_s}{\pi y_1}.$$

Полагая в (23а)

$$t_1 = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{1}{\xi^2} - 1\right),$$

найдем

$$\frac{Q_s}{2} - x = 2\lambda A \int_0^{\frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi y_1}{Q_s}}} \frac{\frac{Q_s}{\pi} \operatorname{Ar sch} \xi - y_1}{(1-\xi^2)^{\alpha+\frac{1}{2}} (1-\lambda_1^2 \xi^2)^{1-\alpha}} d\xi. \quad (25)$$

При больших значениях y_1 отсюда получим

$$\frac{Q_s}{2} - x \approx \frac{2\lambda A Q_s}{\pi} \int_0^{\frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi y_1}{Q_s}}} \left(\ln 2 - \frac{\pi y_1}{Q_s} - \ln \xi \right) d\xi = \frac{2\lambda A Q_s}{\pi} \left(\ln 2 e - \frac{\pi y_1}{Q_s \operatorname{ch} \frac{\pi y_1}{Q_s}} \right), \quad (25')$$

так что в окрестности $y_1 = \infty$

$$\frac{Q_s}{2} - x \approx \frac{4\lambda A Q_s}{\pi} e^{-\frac{\pi y_1}{Q_s}}. \quad (25'')$$

5. Определение параметра λ

В рассматриваемом случае формула (A₁) теряет смысл, из формулы (Д') видно, что для кривой депрессии

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} x = \frac{Q_s}{2},$$

а формулы (А), (В), (Г) принимают вид

$$J_0 - \beta I_0 = \int_1^{\frac{1}{\lambda}} \frac{\arccos \lambda \sqrt{t}}{t^{\alpha+\frac{1}{2}} (t-1)^{1-\alpha}} dt - \beta \int_0^1 \frac{\arcsin \lambda \sqrt{t}}{t^{\alpha+\frac{1}{2}} (1-t)^{1-\alpha}} dt = 0 \quad (A_0)$$

$$Q_s = \frac{2H}{A \sin \alpha \pi} \frac{J_{2\alpha} + \beta I_0}{I_0 J_{10}}. \quad (B_0)$$

$$Q_s' = 2 \frac{\beta}{\alpha} Q_s. \quad (Г_0)$$

Применяя к уравнению (A₀) Regula falsi, получаем формулу для приближенного определения λ

$$\lambda_0 = \frac{1}{1 + \frac{2\beta A}{\pi} \int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{t}}{t^{\alpha+\frac{1}{2}} (1-t)^{1-\alpha}} dt} \approx \frac{1}{1 + \frac{2\beta A}{\sin \alpha \pi}} = \frac{1}{1 + A \frac{b}{H}}. \quad (a_0)$$

Если в первом приближении положим в уравнении (A') (см. (19), (20))

$$g_1 \approx 1, \quad g_2 \approx f \approx \beta,$$

1) То обстоятельство, что в этом случае кривая депрессии должна иметь асимптоту, соответствующую абсциссе $\frac{Q_s}{2}$, очевидно и из физических соображений.

то последнее примет вид

$$\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) \cos^{2\alpha} \vartheta - \beta \vartheta = 0, \quad (A_0')$$

Применяя к этому уравнению Regula falsi, получим также простую формулу

$$\lambda_0 = \sin \frac{\pi}{2(\beta+1)} = \sin \frac{\pi c}{P}, \quad (3_0')$$

где через $P = b + 2c = 2c(\beta + 1)$ обозначен смоченный периметр канала.

Для сопоставления формул (a_0) , (a_0') с формулой, данной Б. К. Ризенкампом [11] и имеющей в принятых здесь обозначениях вид

$$\lambda_0 = \frac{\pi}{8A \left(1 + \frac{B}{2H}\right)}, \quad (26)$$

применим эти формулы к тринадцати случаям, табулированным в книге В. В. Ведерникова ([7], стр. 135). Результаты вычислений можно свести в табл. 1, в которой знак + указывает на приближения с избытком, а — на приближения с недостатком.

Т а б л и ц а 1

№	α	B/H	$\lambda_{\text{ист.}}$	Погрешность в %, получаемая при вычислении λ по формуле		
				(a_0)	(a_0')	(26)
1	$\frac{1}{4}$	2,882	0,8660	1,2—	7,5+	2,6—
2	$\frac{1}{4}$	4,084	0,7071	1,2+	11,2+	4,3—
3	$\frac{1}{4}$	6,856	0,5000	3,8+	9,2+	7,0—
4	$\frac{1}{4}$	10,94	0,3536	4,6+	4,0+	9,9—
5	$\frac{1}{4}$	16,71	0,2500	5,0+	0,2+	12,0—
6	$\frac{1}{6}$	4,932	0,8660	3,0—	5,4+	4,7—
7	$\frac{1}{6}$	6,785	0,7071	3,0—	7,0+	7,9—
8	$\frac{1}{6}$	10,90	0,5000	1,0—	4,4+	11,2—
9	$\frac{1}{6}$	16,69	0,3386	0,5+	0,9+	13,4—
10	$\frac{1}{8}$	6,921	0,8660	6,0—	4,0+	5,4—
11	$\frac{1}{8}$	9,416	0,7071	5,5—	5,0+	9,7—
12	$\frac{1}{8}$	14,83	0,5000	3,6—	2,6+	13,1—
13	$\frac{1}{8}$	22,34	0,3536	1,8—	0,1—	15,2—

Таким образом, при $\alpha \geq \frac{1}{6}$ и малых значениях β (в случаях № 1—3, 6—8 табл. 1: $\beta \leq 1,86$) лучшие результаты получаются по формуле (a_0) ; при $\alpha = \frac{1}{8}$, а также при $\alpha > \frac{1}{8}$ и значениях $\beta \geq 3,16$ меньшую погрешность дает формула (a_0') (случаи № 4—5, 10—13).

Для предельного случая $b = 0$ ($\beta = 0$; канал с треугольным поперечным сечением) формулы (a_0) , (a_0') дают, как и следует, $\lambda = 1$, в то

время как при значениях b , близких к нулю, формула (26) дает для λ значения, большие единицы.

При значениях α , близких к $\frac{1}{2}$, формулы (a_0') и (26) дают значительную погрешность. Для случая прямоугольного сечения $\left(\alpha = \frac{1}{2}, A = \frac{1}{\pi}, \beta = \frac{B}{2H}\right)$, так как $\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{t}}{t\sqrt{1-t}} dt = 3,665\dots$, по (a_0) получим приближенную формулу

$$\lambda \approx \lambda_0 = \frac{1}{1 + 0,371 \frac{B}{H}}. \quad (a_0)$$

6. Определение расхода воды на фильтрацию

Обозначая через ε всякую функцию от λ , стремящуюся к нулю вместе с λ , по (14) найдем

$$I_0 = \int_0^1 \frac{\arcsin \lambda \sqrt{t}}{t^{\alpha + \frac{1}{2}} (1-t)^{1-\alpha}} dt = \lambda \int_0^1 t^{-\alpha} (1-t)^{\alpha-1} dt + \varepsilon \lambda^2 = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi} \lambda + \varepsilon \lambda^2. \quad (27)$$

По (14')

$$\begin{aligned} J_{10} &= \int_1^{+\infty} t^{-\alpha - \frac{1}{2}} (t-1)^{\alpha-1} dt - \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{+\infty} t^{-\alpha - \frac{1}{2}} (t-1)^{\alpha-1} dt = \frac{1}{A} - 2 \int_0^{\lambda} (1-t_1^2)^{\alpha-1} dt_1 = \\ &= \frac{1}{A} - 2\lambda + \varepsilon \lambda^2 \quad \left(t = \frac{1}{t_1^2}\right). \end{aligned} \quad (28)$$

Представляя J_{20} в виде

$$\begin{aligned} J_{20} &= \lambda \int_1^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{dt}{t} + \int_1^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{\arcsin \lambda \sqrt{t} - \lambda \sqrt{t}}{t^{\frac{3}{2}}} dt + \lambda \int_1^{\frac{1}{\lambda^2}} \left[\left(1 - \frac{1}{t}\right)^{\alpha-1} - 1 \right] \frac{dt}{t} + \\ &+ \int_1^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{\arcsin \lambda \sqrt{t} - \lambda \sqrt{t}}{t^{\frac{3}{2}}} \left[\left(1 - \frac{1}{t}\right)^{\alpha-1} - 1 \right] dt = j_1 + j_2 + j_3 + j_4, \end{aligned}$$

найдем

$$j_1 = -2\lambda \ln \lambda, \quad (29_1)$$

$$\begin{aligned} j_2 &= 2\lambda \int_{\lambda}^1 \frac{\arcsin t_1 - t_1}{t_1^2} dt_1 = 2\lambda \left[-\frac{\pi}{2} + \frac{\arcsin \lambda}{\lambda} + \ln(1 + \sqrt{1 - \lambda^2}) \right] = \\ &= 2\lambda \left(1 + \ln 2 - \frac{\pi}{2} \right) + \varepsilon \lambda^2 \quad \left(t = \frac{t_1^2}{\lambda^2}\right), \end{aligned} \quad (29_2)$$

$$i_3 = \lambda \int_1^{+\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{t}\right)^{\alpha-1} - 1}{t} dt + \varepsilon\lambda = \lambda \int_0^1 \frac{t_1^{\alpha-1} - 1}{1-t_1} dt_1 + \varepsilon\lambda =$$

$$= \lambda \left[\frac{1}{\alpha} - C - \Psi(\alpha) \right] + \varepsilon\lambda \quad \left(t = \frac{1}{1-t_1} \right), \quad (29_3)$$

где $\Psi(\alpha) = \frac{d \ln \Gamma(\alpha+1)}{d\alpha}$, а $C=0,57721\dots$ — постоянная Эйлера;

$$j_4 < \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \lambda^3 \int_1^{\frac{1}{\lambda^2}} \left[\left(1 - \frac{1}{t}\right)^{\alpha-1} - 1 \right] dt =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \lambda^3 \left\{ \int_1^{2-\lambda^2} \left[\left(1 - \frac{1}{t}\right)^{\alpha-1} - 1 \right] dt + \int_{2-\lambda^2}^{\frac{1}{\lambda^2}} \left[\left(1 - \frac{1}{t}\right)^{\alpha-1} - 1 \right] dt \right\} <$$

$$< \varepsilon\lambda^2 + \frac{\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) (1-\alpha) \lambda^3}{\left(1 - \frac{1}{2-\lambda^2}\right)^{2-\alpha}} \int_{2-\lambda^2}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{dt}{t} = \varepsilon\lambda^2 - \frac{\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) (1-\alpha)}{\left(1 - \frac{1}{2-\lambda^2}\right)^{2-\alpha}} \lambda^3 \ln \lambda^2 (2-\lambda^2),$$

так что

$$j_4 = \varepsilon\lambda^2. \quad (29_4)$$

Таким образом, на основании (29₁)—(29₄) J_{20} можем представить в виде

$$J_{20} = \lambda(D - 2 \ln \lambda) + \varepsilon\lambda, \quad (30)$$

где

$$D = \frac{1}{\alpha} + 2(1 + \ln 2) - \pi - C - \Psi(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - \Psi(\alpha) - 0,33251. \quad (30')$$

Так как при $0 < \alpha < 0,46\dots$ $\Psi(\alpha) < 0$ и при $0 < \alpha \leq 0,2$ $-\Psi(\alpha) - 0,33251\dots$ не составляет и 1% от $\frac{1}{\alpha}$, достигая 2,6% при $\alpha = \frac{1}{4}$, то в этих пределах можно положить приближенно

$$D \approx \frac{1}{\alpha}. \quad (30'')$$

Пренебрегая в выражениях I_0 , J_{10} , J_{20} малыми порядками выше λ и подставляя (27), (28), (30) в (B₀), получим следующую приближенную формулу для определения расхода:

$$Q_* = \frac{b + \frac{2H}{\pi}(D - 2 \ln \lambda)}{1 - 2A\lambda} \quad (B_0)$$

или по (30''),

$$Q_s = \frac{b + \frac{2H}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} - 2 \ln \lambda \right)}{1 - 2A\lambda}. \quad (B_0')$$

На основании уравнения (A₀) формуле (B₀) можно придать вид (непосредственно получаемый также из (15) и (16))

$$Q_s = \frac{\pi P}{2A(I_0 + J_0)}, \quad (31)$$

откуда получаем приближенную формулу такой же степени точности, как и (B₀)

$$Q_s = \frac{P}{1 - \frac{2A}{\pi} \lambda (D' - 2 \ln \lambda)}, \quad (32)$$

где

$$D' = D + \pi(1 - \operatorname{cosec} \alpha \pi). \quad (32')$$

Так как по (A₀)

$$I_0 + J_0 = (1 + \beta) I_0,$$

то, полагая, как и на стр. 79.

$$I_0 \approx \frac{1}{\alpha} \vartheta_0$$

и применяя формулу (a₀''), найдем

$$I_0 + J_0 \approx \frac{1}{\alpha} (1 + \beta) \vartheta_0 = \frac{\pi}{2\alpha},$$

на основании чего из (31) получим простейшую приближенную формулу расхода

$$Q_s \approx \frac{\alpha}{A} P, \quad (B_0'')$$

отличающуюся от формулы Морица коэффициентом $\frac{\alpha}{A}$ ¹⁾. Б. К. Ризенкампом была предложена формула [11], дающая хорошее приближение и в принятых здесь обозначениях, имеющая вид

$$Q_s = \frac{B + 2H}{1 - \frac{2}{3 \left(1 + \frac{B}{2H} \right)} + \frac{(1 - \alpha) \pi^2}{72A^2 \left(1 + \frac{B}{2H} \right)^3}}. \quad (33)$$

В табл. 2 приведены погрешности, получаемые при вычислении $\frac{H}{Q_s}$ по предыдущим формулам для случаев № 1—13 табл. 1²⁾.

1) При изменении α от 0 до $\frac{1}{2}$ этот коэффициент изменяется от 1 до $\frac{\pi}{2}$.

2) При применении формул (B₀), (B₀') λ вычислялось по формуле (a₀) в случаях № 1—3, 6—8 и по формуле (a₀') в случаях № 4—5, 9—13.

№	α	$\frac{H}{Q_s \text{ ист.}}$	Погрешность в %, получаемая при вычислении $\frac{H}{Q_s}$ по формуле			
			(v_0'')	(v_0')	(v_0)	(33)
1	$\frac{1}{4}$	0,1891	8,7+	1,8-	0,3+	0,2-
2	$\frac{1}{4}$	0,1456	6,7+	1,2-	0,1+	0,5-
3	$\frac{1}{4}$	0,09860	0,7+	1,2-	0,4-	1,0+
4	$\frac{1}{4}$	0,06817	5,0-	1,2-	0,6-	2,9+
5	$\frac{1}{4}$	0,04801	9,4-	1,7-	0,6-	3,8+
6	$\frac{1}{6}$	0,1387	8,6+	0,8+	0,8+	0,9-
7	$\frac{1}{6}$	0,1062	6,0+	0,3+	0,3+	1,4-
8	$\frac{1}{6}$	0,07129	1,0+	0,2-	0,2-	0,3+
9	$\frac{1}{6}$	0,04941	3,2-	0,5-	0,5-	1,3+
10	$\frac{1}{8}$	0,1094	7,3+	0,7+	0,2+	0,9-
11	$\frac{1}{8}$	0,08316	5,0+	0,2+	0,2-	1,3-
12	$\frac{1}{8}$	0,05592	0,9+	0,2-	0,4-	0,3-
13	$\frac{1}{8}$	0,03872	2,3-	0,3-	0,4-	0,9+

В предельном случае треугольного русла ($b = 0$, $\beta = 0$, $\lambda = 1$) формула (v_0) теряет смысл, и Q_s определяется по (15)

$$Q_s = \frac{\pi H}{A \sin \alpha \pi I_0} \quad (15')$$

Однако при изменении α от 0,05 до 0,4

$$I_0 = \int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{t}}{t^{\alpha + \frac{1}{2}} (1-t)^{1-\alpha}} dt \approx \frac{\pi^2}{D \sin \alpha \pi} \left(\frac{1}{2A} - 1 \right)$$

с погрешностью, не превышающей 1%, вследствие чего по (15') для случая треугольного русла получаем приближенные формулы

$$Q_s \approx \frac{2DH}{\pi(1-2A)}, \quad (v_{01})$$

$$Q_s \approx \frac{2H}{\alpha \pi (1-2A)}, \quad (v'_{01})$$

совпадающие с предельными значениями (v_0) и (v_0') при $b \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow 1$. Этим объясняется то обстоятельство, что формулы (v_0) и (v_0') дают хорошее приближение и при значениях λ , близких к 1.

В табл. 2а приведены результаты вычислений для трех случаев треугольного русла, фигурирующих в таблице В. В. Ведерникова [7].

Таблица 2а

№	α	$\frac{H}{Q_s \text{ ист.}}$	Погрешность в %, получаемая при вычислении $\frac{H}{Q_s}$ по формуле			
			(v_0'')	(v'_{01})	(v_{01})	(33)
1а	$\frac{1}{4}$	0,2500	7,9+	2,8-	0,5-	2,0+
6а	$\frac{1}{6}$	0,1892	8,8+	0,4+	0,4+	1,9+
10а	$\frac{1}{8}$	0,1524	7,9+	1,2+	0,5+	2,4+

В случае прямоугольного сечения формулы (v_0'') и (33) приводят к чувствительным погрешностям. Значительно лучшие результаты дает снова формула (v_0) (при $A = \frac{1}{\pi}$ и $D = 1,631 \dots$). При $\alpha = \frac{1}{2}$ и $\lambda \approx 1$ ($\lambda_1 \approx 0$)

$$I_0 = \int_0^1 \frac{\arcsin \lambda \sqrt{t}}{t \sqrt{1-t}} dt \approx \int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{t}}{t \sqrt{1-t}} dt + \lambda_1^2 \ln \lambda_1^2, \quad J_{10} \approx 2\lambda_1, \quad J_{20} \approx \pi\lambda_1 \left(1 - \frac{\lambda_1}{2}\right)$$

и на основании (v_0) найдем

$$\frac{Q_s}{H} \approx 2,693 \frac{1 - \frac{\lambda_1}{2}}{1 + 0,545 \lambda_1^2 \ln \lambda_1} + \frac{\pi\beta}{\lambda_1}. \quad (\bar{v}_0)$$

После определения Q_s и $\lambda(\vartheta)$ Q_s' найдем по формуле (Γ_0). Если же воспользуемся формулами (v_0'') и (a_0'), то для расхода через откосы получим приближенную формулу

$$Q_s' = \frac{Q_s}{1 + \beta} = \frac{2\alpha}{A} c = \frac{2\alpha H}{A \sin \alpha \pi}, \quad (\Gamma_0)$$

определяющую в первом приближении Q_s' только в функции длины откоса и угла его заложения.

Табл. 3 характеризует погрешности, получаемые при вычислении Q_s' по формуле (Γ_0) для 13 случаев табл. 1.

Наконец, для скорости фильтрации в точке D дна канала получаем по (8б), (14') и (20) выражение

$$\frac{1}{v_d} = i u_d = \frac{A}{z} \int_1^{\frac{1}{\lambda}} \zeta^{-\alpha - \frac{1}{2}} (\zeta - 1)^{\alpha - 1} d\zeta = \frac{A}{z} J_1 = \frac{A \lambda_1^{2\alpha}}{\pi \alpha} g_1, \quad (e_0)$$

откуда по (28) при малом λ приближенно

$$\frac{z}{v_d} \approx 1 - 2A\lambda \quad (e_0')$$

№	1	2	3	4	5	6
	α	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{H}{Q_{s \text{ ист}}}$	0,2887	0,2919	0,2958	0,2963	0,2986	0,2080
Погрешность в %, получаемая по формуле (Γ_0)	4,9—	7,4—	8,8—	9,0—	9,7—	1,0—

и при значениях λ , близких к единице

$$\frac{x}{v_d} \approx \frac{A}{a} \lambda_1^{2\alpha} \quad (e_0'')$$

При $\alpha = \frac{1}{2}$ $J_1 = \pi - 2\vartheta$ и, следовательно,

$$\frac{x}{v_d} = 1 - \frac{2\vartheta}{\pi}.$$

7. Случай конечной глубины залегания дренирующего слоя.

Первое приближение

В общем случае конечной глубины (T) залегания дренирующего слоя можно предложить следующий метод приближенного вычисления значений искомых параметров.

Полагая, в зависимости от значения $\frac{P}{T-H} = \frac{P}{H'}$, k^2 равным 0, $\frac{1}{2}$ или 1, находим приближенное значение $\lambda \approx \lambda_0$ по формулам (a_0) (a_0') (примерно при $\frac{P}{H'} \leq 1,5$) или (при $1,5 \leq \frac{P}{H'} < 2,4$) по (A_1'') (при $\delta = 0$, $K' = K_0' = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \right]^2 = 1,85407$, $k^2 = \frac{1}{2}$)

$$\lambda_0 = \sin \vartheta_0 = \operatorname{sn} \left(K_0 \gamma; \frac{1}{2} \right) \quad (a_1)$$

или, наконец (при $\frac{P}{H'} \geq 2,4$), по (A_1'') , где положено $\delta = 0$, $K' = \frac{\pi}{2}$

$$\lambda_0 = \operatorname{th} \frac{\pi}{2} \gamma. \quad (a_1')$$

Полагая, далее, в первом приближении

$$\delta = 0, \quad f = g_2 = F(\vartheta), \quad g_1 = 1, \quad (34)$$

Т а б л и ц а 3

7	8	9	10	11	12	13
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
0,2124	0,2139	0,2147	0,1641	0,1663	0,1678	0,1683
3.1—	3.7—	4.1—	0.2+	1.1—	2.0—	2.3—

на основании (Б') находим $\log q_1 = -\pi \frac{K_1'}{K_1} \log e$ (а следовательно, k_1^2 , K_1 и K_1') по формуле

$$\log q_1 = -\frac{\pi \log e}{\gamma \left(1 + \frac{\beta}{\lambda_{10}^{2\alpha}}\right)} \quad (\lambda_{10} = +\sqrt{1-\lambda_1^2}). \quad (6)$$

Затем вычисляем по (Б') и (6) приближенное значение расхода по формуле

$$Q_{s1} = 2T \frac{K_1}{K_1'} = 2\gamma T \left(1 + \frac{\beta}{\lambda_{10}^{2\alpha}}\right). \quad (в)$$

При условии (34) $\left(\frac{F(\vartheta)}{K'} \approx \frac{f}{K'} = \gamma\right)$ по (А₁') расход через откосы снова представится (по (Г') формулой (г₀)) независимым от T

$$Q'_{s1} = \frac{2a}{A} c = \frac{2aH}{A \sin \alpha \pi}. \quad (г)$$

Наконец a , на основании (Д) найдется по формуле

$$a \approx a_1 = \frac{Q_{s1}}{2} \left(1 - \frac{2A\lambda_0 k_1}{K_1} g_{s1}\right), \quad (д)$$

где

$$g_{s1} = \int_0^1 \frac{K_1 - F(\arcsin \xi)}{(1 - k_1^2 \lambda_0^2 \xi^2)^{1-\alpha}} d\xi,$$

причем при малых значениях $k^2 \lambda^2$

$$g_{s1} \approx \frac{1}{k_1} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\theta_1}{2} + \frac{\pi}{4}\right), \quad (д')$$

где θ_1 — приближенное значение модулярного угла.

Применим формулы первого приближения к 14 случаям табл. 4²).

Погрешности в процентах, получаемые при вычислении по формулам первого приближения, приведены в табл. 5, причем для характеристики поведения простейшей формулы (в₀'') в случае $k^2 > 0$ даны также результаты вычислений Q_s по этой формуле.

Таким образом, в пяти первых случаях формула (в₀'') дает лучшие результаты, чем формула (в₁).

¹) Можно было бы после этого попытаться „уточнить“ значение $\lambda \approx \lambda_0$ по формуле $\lambda \approx \lambda^{(1)} = \operatorname{sn} \gamma K_1'$, однако никакого более или менее существенного улучшения этим путем не получится вследствие предположения (34), на основе которого выведена из (А₁'') последняя формула.

²) Эти случаи, кроме первого, выбраны применительно к предварительным вариантам, предложенным для расчета Институтом Укрэнипродхлопка, согласно договору о содружестве, заключенному между этим учреждением и Институтом математики Академии наук УССР. Случай № 1 дает некоторую характеристику применения формул к расчету очень широкого и мелкого канала.

Таблица 4

№	α	Модуляр- ный угол θ	θ	k^2	i	T (в. м.)	H (в. м.)	B (в. м.)	Q_1 (в. м.)	Q'_2 (в. м.)	a (в. м.)	$\frac{P}{H'}$
1	0,25	89°	6°	0,9997	0,1045	20	0,80	127	138,4	2,671	66,8	6,7
2	0,20	37°	16°30'	0,9522	0,2840	30	2,18	43,7	52,76	8,714	25,4	1,6
3	0,20	60°	18°	0,7500	0,3090	30	2,82	63,8	76,75	11,32	36,1	2,4
4	0,20	77°	27°30'	0,9494	0,4618	20	3,09	57,1	72,96	12,53	32,3	3,5
5	0,15	27°	30°	0,2061	0,5000	20	1,84	23,7	29,65	9,420	14,3	1,4
6	0,20	4°	33°18'	0,0049	0,5490	30	2,13	16,8	23,28	8,607	11,6	0,7
7	0,15	55°	45°	0,6710	0,7071	20	3,74	35,0	47,01	19,47	20,95	2,3
8	0,15	51°	53°	0,6037	0,7986	25	5,39	39,5	55,04	28,41	24,3	2,1
9	0,15	45°	61°	0,5000	0,8746	20	4,72	28,0	40,00	25,13	17,7	2,0
10	0,10	89°30'	75°	0,9999	0,9659	20	6,48	109	156,0	51,62	57,4	8,2
11	0,10	72°	81°53'40''	0,9045	0,9900	20	6,65	47,2	64,58	53,53	26,4	3,7
12	0,10	89°	81°59'40''	0,9997	0,9900	20	8,04	90,9	138,4	67,33	49,1	7,8
13	0,10	89°55'	83°34'	0,999977	0,9937	20	8,59	125	201,7	73,37	67,9	11
14	0,10	89°55'46'' ⁵	83°34'	0,999995	0,9937	20	8,59	170	280,9	73,38	92,4	15

№	Погрешности вычислений по формуле (34)		Погрешности вычислений λ по формулам				θ_1	Погрешности вычислений Q_2 по формулам		Погрешности вычислений Q_2 по формуле (Γ_1)	Погрешности вычислений α по формуле (Δ_1)
	для f	для g	(a_0)	(a_0')	(a_1)	(a_1')		(v_1)	(v_0'')		
1	10—	17,7—				10,9+	89°41'	21,4+	21,0+	11,0+	20,8+
2	6,1—	8,5—			1,0—		42°14'	8,8+	7,3+	9,0+	8,3+
3	6,0—	8,6—				1,3—	64°45'	8,9+	7,2+	6,3+	8,5+
4	5,0—	5,5—				2,0+	79°2'	6,0+	1,5+	5,1+	5,9+
5	2,9—	1,5—		0,8—			28°3'	1,9+	1,0—	3,0+	1,8+
6	5,3—	0,1+	0,3+				4°20'	2,1+	2,5—	5,6+	0,1—
7	0,9—	2,2+			7,0+		55°17'	0,5+	6,5—	1,0+	0,2—
8	0,2+	4,3+			3,6+		50°24'	1,1—	8,7—	0,2—	0,3—
9	1,2+	6,0+			0,6—		43°2'	3,1—	9,7—	1,2—	1,5—
10	8,8+	1,3+				1,3—	89°18'	5,6—	19,0—	8,0—	6,0—
11	9,8+	5,4+				3,3—	66°41'	10,4—	13,5—	9,0—	8,0—
12	14,3+	2,4+				0,9—	88°14'	10,4—	24,0—	12,4—	9,2—
13	16,5+	1,3+				0,8—	89°45'	10,8—	28,2—	14,2—	8,1—
14	16,5+	0,7+				0,8—	89°59'	9,9—	30,0—	14,2—	6,9—

8. Второе приближение

Для получения второго приближения по найденным значениям λ_0 и $k_1^2(\theta_1)$ вычисляем (например, по формуле Гаусса с пятью ординатами) интегралы f , g_1 , g_2 . Затем по (B') получим

$$\log q_2 = -\frac{\pi \log e}{\gamma} \frac{f g_1}{g_2 + \frac{\beta}{\lambda_{10}^{2\alpha}} f} \quad (6_2)$$

и, следовательно, $\theta_2(k_2^2)$, K_2 , K_2' .

Найдя затем

$$\delta = f - F(\vartheta_0; \theta_2),$$

вычисляем значение λ во втором приближении по (A_1'')

$$\lambda \approx \lambda_2 = \operatorname{sn}(\gamma K_2' - \delta). \quad (a_2)$$

Расход определяется по формуле (B')

$$Q_{s2} = 2T\gamma \frac{g_2 + \frac{\beta}{\lambda_{12}^{2\alpha}} f}{g_1 f} \quad (\lambda_{12} = \cos \vartheta_2 = +\sqrt{1 - \lambda_2^2}). \quad (B_2)$$

Расход через откосы по (Γ') можно вычислить по одной из двух формул

$$Q_{s2} = 2T \frac{F(\vartheta_2; \theta_2)}{K_2'}, \quad Q_{s2} = Q_{s1} \frac{F(\vartheta_2; \theta_2)}{K_2}. \quad (r_2)$$

¹⁾ В случаях № 1—9 вычисление производилось по формуле (Δ_1).

Наконец, абсцисса a определяется по формуле

$$a \approx a_2 = \frac{Q_{s2}}{2} \left(1 - \frac{2Ak_2 \lambda_2}{K_2} g_{s2} \right), \quad (Д_2)$$

где

$$g_{s2} = \int_0^1 \frac{K_2 - F(\arcsin \xi; \theta_2)}{(1 - k_2^2 \lambda_2^2 \xi^2)^{1-\alpha}} d\xi$$

или при малом $k^2 \lambda^2$

$$g_{s2} \approx \frac{1}{k^2} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\theta_2}{2} + \frac{\pi}{4} \right). \quad (Д_2')$$

Результаты вычислений по формулам второго приближения для случаев табл. 4 приведены в табл. 6.

Таблица 6

№	θ_2	Погрешности в %			
		λ	Q_s	Q_s'	a
1	89°0'38''	0,7—	0,1+	0,7—	0,2+
2	37°0'	0,0—	0,0+	0,0—	0,1—
3	59°58'	0,0+	0,0—	0,0—	0,2+
4	77°0'	0,2—	0,1—	0,2—	0,6+
5	26°59'	0,1—	0,0+	0,1—	0,1+
6	3°59'	0,1+	0,1—	0,0—	0,1—
7	55°50'	0,1+	0,2+	0,4—	0,0+
8	51°35'	0,1+	0,0+	0,2—	0,2—
9	44°47'	0,4+	0,0+	0,4+	0,1+
10	89°25'5''	0,3—	0,9—	0,2—	0,3—
11	69°52'	0,1—	2,4—	0,0—	1,2—
12	88°44'8''	0,1—	1,8—	0,1+	1,0—
13	89°51'36''	0,2—	2,8—	4,5—	2,1—
14	89°59'38''	0,2—	0,9—	0,7—	0,2—

9. Уравнение кривой депрессии

Уравнение кривой депрессии (13) путем преобразования, подобного приведенному в § 4, представится в виде

$$\frac{B}{2} + y_1 \operatorname{tg} \alpha \pi - x = \frac{A}{2^{1-\alpha}} \int_0^1 \frac{y_1 - \frac{Q_s}{2K} F(\tau_2; k')}{\sqrt{1 - \xi^{\frac{1}{2}-\alpha}}} d\xi$$

$$\left(\tau_2 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\lambda \xi^{\frac{1}{2}-2\alpha}}{\sqrt{1 - \xi^{\frac{1}{2}-\alpha}}} ; \alpha < \frac{1}{2} \right) \quad (35)$$

$$\pi \left(x - \frac{B}{2} \right) = 2y_1 \operatorname{Ar sh} \frac{\lambda \operatorname{cn}' \frac{2Ky_1}{Q_s}}{\operatorname{sn}' \frac{2Ky_1}{Q_s}} +$$

$$+ \frac{1}{K} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2 \operatorname{cs}'^2 \frac{2Ky_1}{Q_s}}}} \frac{F(\tau_2; k')}{\xi \sqrt{1-\xi^2}} d\xi \quad \left(\tau_2 = \operatorname{arc tg} \frac{\lambda \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}; \alpha = \frac{1}{2} \right). \quad (35)$$

При малых значениях y_1

$$\frac{B}{2} + y_1 \operatorname{tg} \alpha \pi - x \approx \frac{AQ_s}{(1-2\alpha)K} \frac{1}{\left(1 + \lambda^2 \operatorname{cs}'^2 \frac{2Ky_1}{Q_s}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha}} \times$$

$$\times \left[\frac{2Ky_1}{Q_s} - \frac{1-2\alpha}{2(1-\alpha)} \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2 \operatorname{cs}'^2 \frac{2Ky_1}{Q_s}}} \right], \quad (35')$$

$$\left[x - \frac{B}{2} \approx \frac{Q_s}{\pi K} \left(\frac{2Ky_1}{Q_s} \operatorname{Ar sh} \frac{\lambda \operatorname{cn}' \frac{2Ky_1}{Q_s}}{\operatorname{sn}' \frac{2Ky_1}{Q_s}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2 \operatorname{cs}'^2 \frac{2Ky_1}{Q_s}}} \right) \text{ при } \alpha = \frac{1}{2} \right]$$

и в окрестности $y_1 = 0$

$$\frac{B}{2} + y_1 \operatorname{tg} \alpha \pi - x \approx \frac{A}{(1-\alpha)(1-2\alpha)} \left(\frac{2K}{\lambda Q_s} \right)^{1-2\alpha} y_1^{2(1-\alpha)}, \quad (35'')$$

$$\left[x - \frac{B}{2} \approx \frac{2y_1}{\pi} \ln \frac{e\lambda Q_s}{\pi y_1} \text{ при } \alpha = \frac{1}{2} \right].$$

Иначе, записав уравнение кривой депрессии на основании (Д) в виде

$$x - a = A \int_{\frac{1}{\lambda^2 \operatorname{cs}'^2 \frac{2Ky_1}{Q_s}}}^{+\infty} \frac{y_1 - \frac{Q_s}{2K} F(\tau_2; k')}{t_1^{\alpha + \frac{1}{2}} (1+t_1)^{1-\alpha}} dt_1, \quad (35a)$$

где $\tau_2 = \operatorname{arc tg} \lambda \sqrt{t_1}$, и сделав здесь подстановку

$$t_1 = \frac{1}{k^2 \lambda^2} \left(\frac{1}{\xi^2} - 1 \right) \quad \left[\xi^2 = \frac{1}{1 + k^2 \lambda^2 t_1} \right],$$

найдем

$$a - x = 2k\lambda A \int_0^{\operatorname{cd}' \frac{2Ky_1}{Q_s}} \frac{T - y_1 - \frac{Q_s}{2K} F(\operatorname{arc sin} \xi; k')}{(1-\xi^2)^{\alpha + \frac{1}{2}} [1 - (1 - k^2 \lambda^2) \xi^2]^{1-\alpha}} d\xi. \quad (36)$$

При малых значениях $T - y_1$

$$a-x \approx \frac{k\lambda A Q_s}{K} \operatorname{sn}' \frac{2K}{Q_s} (T-y_1) \left[\frac{2K}{Q_s} (T-y_1) - \frac{1}{2} \operatorname{sn}' \frac{2K}{Q_s} (T-y_1) \right] \quad (36')$$

и в окрестности $y_1 = T$

$$a-x \approx \frac{2k\lambda AK}{Q_s} (T-y_1)^2. \quad (36'')$$

Наконец, скорости фильтрации в точках D и E определяются на основании (6), (86) по формулам

$$\frac{1}{v_d} = iu_d = \frac{A}{\kappa} J_1 = \frac{A\lambda_1^{2\alpha}}{\kappa\alpha} g_1,$$

$$\frac{1}{v_e} = iu_e = \frac{A}{\kappa} \int_1^{\frac{1}{k^2\lambda^2}} \zeta^{-\alpha-1/2} (\zeta-1)^{\alpha-1} d\zeta = \frac{A(1-k^2\lambda^2)^\alpha}{\kappa\alpha} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-(1-k^2\lambda^2)\xi^\alpha}} \quad (e_1)$$

$$\left(\zeta = \frac{1}{1-(1-k^2\lambda^2)\xi^\alpha} \right)$$

и при малых λ

$$\frac{x}{v_d} \approx 1 - 2A\lambda, \quad \frac{x}{v_e} = 1 - 2Ak\lambda$$

[аналогично формуле (e₁') (28)], и при значениях λ , близких к 1,

$$\frac{x}{v_d} \approx \frac{A}{\alpha} \lambda^{2\alpha}, \quad \frac{x}{v_e} \approx \frac{A}{\alpha} (1-k^2\lambda^2)^\alpha. \quad (e_1'')$$

10. Случай малых значений λ и k^2

В случае прямоугольного сечения (и при $\alpha \approx \frac{1}{2}$), а также при значениях λ , близких к 0 или 1 (следовательно и для треугольного сечения¹), формулы первого приближения § 8 не дают достаточно удовлетворительного результата (например, случаи № 1—3, 11—14 табл. 4).

Поэтому в этих случаях при малых значениях λ , а также и вообще при малых значениях k^2 , лучше следовать следующему методу, аналогичному примененному в случае $T = \infty$ ($k^2 = 0$).

Подобно тому, как в § 7 найдем, что и при $k^2 > 0$:

$$I = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi} \lambda + \varepsilon\lambda^2, \quad J_1 = \frac{1}{A} - 2\lambda + \varepsilon\lambda^2, \quad j_1 = -2\lambda \ln \lambda,$$

$$j_2 = \lambda \left[\frac{1}{\alpha} - C - \Psi(\alpha) \right] + \varepsilon\lambda,$$

$$j_4 = \int_1^{\frac{1}{k^2\lambda^2}} \frac{F(\arcsin \lambda\sqrt{t}) - \lambda\sqrt{t}}{t^{\frac{3}{2}}} \left[\left(1 - \frac{1}{t}\right)^{\alpha-1} - 1 \right] dt = \varepsilon\lambda^2 \quad (\varepsilon \rightarrow 0 \text{ при } \lambda \rightarrow 0).$$

¹ В этом случае по (34) получаем формулы

$$f \approx K, \quad \log q_1 \approx -\frac{\pi \log e}{\gamma}, \quad Q_{s,1} = 2T \frac{K_1}{K_1} \approx 2T\gamma = \frac{\alpha}{A} P$$

(и при $\alpha = \frac{1}{2}$: $O_s' = \pi H$), приводящие к значительным погрешностям.

В рассматриваемом случае

$$j_2 = 2 \int_{\lambda}^1 \frac{F(\arcsin t_1) - t_1}{t_1^2} dt_1 =$$

$$= 2\lambda \left\{ -K - \frac{1}{2} \ln k'^2 + \frac{F(\vartheta)}{\lambda} + \frac{1}{2} \ln [2 - (1+k^2)\lambda^2 + 2\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)}] \right\} =$$

$$= 2\lambda(1 + \ln 2 - K - \ln k') + \varepsilon\lambda^2.$$

Здесь приближенно можем положить

$$K + \ln k' \approx \frac{\pi}{2} \quad \text{при малых значениях } k^2,$$

$$K + \ln k' \approx K_0 - \frac{1}{2} \ln 2 = 1,50750 \dots \quad \text{при } k^2 \approx 0,5,$$

$$K + \ln k' \approx 2 \ln 2 \quad \text{при } k^2 \approx 1.$$

Таким образом, будем иметь

$$f = \frac{\alpha\pi}{\sin \alpha\pi} \lambda + \varepsilon\lambda^2,$$

$$\frac{\lambda^{2\alpha}}{\alpha} g_1 = \frac{1}{A} - 2\lambda + \varepsilon\lambda^2, \quad \frac{\lambda^{2\alpha}}{\alpha} g_2 = \lambda(D - 2 \ln \lambda) + \varepsilon\lambda, \quad (37)$$

где

$$D = \frac{1}{\alpha} + 2(1 + \ln 2) - \pi - C - \Psi(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - \Psi(\alpha) - 0,33251 \dots \quad \text{при } k^2 \approx 0,$$

$$D = \frac{1}{\alpha} + 2 + 3 \ln 2 - 2K_0 - C - \Psi(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - \Psi(\alpha) - 0,20591 \dots$$

$$\text{при } k^2 \approx \frac{1}{2} \left(K_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \omega}} \right),$$

$$D = \frac{1}{\alpha} + 2(1 - \ln 2) - C - \Psi(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - \Psi(\alpha) + 0,03649 \dots \quad \text{при } k^2 \approx 1.$$

При изменении α от 0,05 до 0,2 $100\alpha[-\Psi(\alpha) - 0,20591]$ принимает значения, лежащие между 1,5 и 2,3, а затем убывает до 0,5 (при $\alpha = 0,25$); при $0,05 \leq \alpha \leq 0,25$: $100\alpha[-\Psi(\alpha) + 0,03649] \geq 2,6$, возрастая до 6,6 при $\alpha \rightarrow 0,25$. Таким образом приближение $D \approx \frac{1}{\alpha}$ наиболее обосновано при $k^2 \approx 0$.

Так как $\Psi\left(\frac{1}{2}\right) = 0,0365$, то при $\alpha = \frac{1}{2}$: $D = 1,6310$ при $k^2 \approx 0$, $D = 1,7576$ при $k^2 \approx \frac{1}{2}$ и $D = 2$ при $k^2 \approx 1$. При $\lambda \approx 0$ из (A₁') на основании первой из формул (37) будем иметь

$$\frac{\alpha\pi}{\sin \alpha\pi} \lambda \approx \gamma K',$$

откуда в этом случае вместо (a_1) , (a_1') получим две следующие приближенные формулы:

$$\lambda_0 = \frac{\gamma \sin a\pi}{a\pi} K_0 = \frac{K_0 H}{\pi A T} \quad (\text{при } k^2 \approx 0,5), \quad (a_1)$$

$$\lambda_0 = \frac{\gamma \sin a\pi}{2a} = \frac{H}{2AT} \quad (\text{при } k^2 \approx 1). \quad (a_1')$$

Таким образом, определив λ_0 по одной из формул (a_0) , (a_0') , (a_1) , (a_1') , (a_1) , (a_1') , найдем в первом приближении $\log q_1$ (k_1 , K_1 , K_1') по формуле, получаемой из (Б) или (Б') на основании (37)

$$\log q_1 = - \frac{2\pi T(1-2A\lambda_0)}{b + \frac{2H}{\pi}(D-2 \ln \lambda_0)} \log e. \quad (\beta_1)$$

Тогда для Q_{s1} по (В), (В') получим формулу (β_0)

$$Q_{s1} = 2T \frac{K_1}{K_1'} = \frac{b + \frac{2H}{\pi}(D-2 \ln \lambda_0)}{1-2A\lambda_0}, \quad (\beta_0)$$

но с другими значениями D для $k^2 \approx 0,5$ и $k^2 \approx 1$.

Далее, по (Г) — (Г')

$$Q'_{s1} = 2T \frac{F(\vartheta_0; \theta_1)}{K_1'}, \quad Q_{s1} = Q'_{s1} \frac{F(\vartheta_1; \theta_1)}{K_1} \quad (\gamma_1)$$

и, наконец, a_1 — по формуле (d_1) .

Результаты применения формул настоящего параграфа к случаям № 1—9 приведены в табл. 7¹.

Таблица 7

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
θ_1	88°52'	37°22'	60°28'	77°3'	27°1'	4°3'	54°6'	49°27'	43°18'
Погрешность в %, полученная при вычислении Q_s по формуле (β_0)	2,2—	0,6—	0,8+	0,2+	0,0+	0,2+	1,5—	2,5—	2,7—
Погрешность в %, полученная при вычислении Q'_s по формуле (γ_1)	0,2+	0,7—	1,1—	3,5+	0,9—	0,3+	9,9+	4,6+	4,5—

Применение формул (β_1) , (β_0) при $a = \frac{1}{2}$ и θ , ϑ , λ , T , соответствующих случаям № 1, 6, 7 табл. 4, приводит соответственно к значениям модулярного угла 89°3', 4°18', 57°7' и погрешностям для Q_s : 1,0, 1,8 и 3,6%.

¹ При этом для случая № 1 по формуле (a_1') для λ_0 получим значение 0,1048, т. е. погрешность вычисления будет меньше 0,3%.

Если k^2 не очень близко к единице, то формулы (β_1) , (ν_0) дают вполне удовлетворительные результаты и для случая треугольного сечения. Так, например, при α , θ и T , соответствующих случаям № 6 и 7, по этим формулам получаются модулярные углы $3^\circ 58'$, $52^\circ 39'$ и значения Q , с погрешностями в 0,1 и 3,8%.

11. Случай, когда λ и k^2 близки к единице

В случае $k^2 \approx 1$, $\lambda \approx 1$ формулы первого приближения § 8 также не дают удовлетворительного результата (например, случаи № 11—14 табл. 4) и поэтому требуют улучшения метода. Для этой цели найдем приближенное представление f в окрестности $\lambda = 1$, $k^2 = 1$.

По (14) и (19) запишем этот интеграл при $k^2 = 1$, $\alpha < \frac{1}{2}$ в следующем виде:

$$f = \frac{\alpha}{2} \int_0^1 \frac{\ln \frac{1 + \sqrt{t}}{1 - \sqrt{t}}}{t^{\alpha + \frac{1}{2}} (1-t)^{1-\alpha}} dt - \alpha(f_1 + f_2), \quad (38)$$

где

$$f_1 = \frac{1}{\frac{1}{2} - \alpha} \int_0^1 \frac{\ln \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\sigma_{10}}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\sigma_1}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}}{\sqrt{\frac{1}{1 + \xi^{\frac{1}{2} - \alpha}}}} d\xi, \quad f_2 = \frac{1}{\alpha} \int_0^1 \frac{\ln \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\sigma_{20}}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\sigma_2}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}}{\sqrt{1 + \xi^\alpha}} d\xi \quad (39)$$

$$\left(\sin \sigma_{10} = \sqrt{\frac{\frac{1}{\frac{1}{2} - \alpha}}{\xi^{\frac{1}{2} - \alpha}}}, \quad \sin \sigma_{20} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^\alpha}} \right).$$

Обозначая через ε_1 всякую величину, стремящуюся к нулю вместе с λ_1 , найдем

$$f_1 = \frac{\lambda_1^2}{2} \int_0^1 \frac{dt_1}{t_1^{\frac{1}{2} - \alpha}} + \varepsilon_1 \lambda_1^2 = \frac{\lambda_1^2}{2(1-\alpha)} + \varepsilon_1 \lambda_1^2 \quad \left(t_1 = \xi^{\frac{1}{2} - \alpha} \right), \quad (40_1)$$

$$f_2 = \frac{\lambda_1^{2\alpha}}{2\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{t_2^{\alpha-1}}{1+t_2} dt_2 + \varepsilon_1 \lambda_1^{2\alpha} = \frac{\lambda_1^{2\alpha}}{2\alpha} \frac{\pi}{\sin \alpha\pi} + \varepsilon_1 \lambda_1^{2\alpha} \quad \left(t_2 = \frac{\xi^\alpha}{\lambda_1^2} \right). \quad (40_2)$$

Следовательно, по (38) и (40₁)—(40₂)

$$f = \frac{\alpha}{2} \int_0^1 \frac{\ln \frac{1 + \sqrt{t}}{1 - \sqrt{t}}}{t^{\alpha + \frac{1}{2}} (1-t)^{1-\alpha}} dt - \frac{\pi}{2 \sin \alpha \pi} \lambda_1^{2\alpha} + \varepsilon_1 \lambda_1^{2\alpha} = \frac{\alpha \pi}{2A \sin \alpha \pi} -$$

$$- \frac{\pi}{2 \sin \alpha \pi} \lambda_1^{2\alpha} + \varepsilon_1 \lambda_1^{2\alpha} = \frac{\alpha \pi}{2 \sin \alpha \pi} \left(\frac{1}{A} - \frac{\lambda_1^{2\alpha}}{\alpha} \right) + \varepsilon_1 \lambda_1^{2\alpha}. \quad (41)$$

При $\alpha = \frac{1}{2}$ выкладка, значительно упрощаясь, приводит к такому же результату.

Пренебрегая членом $\varepsilon_1 \lambda_1^{2\alpha}$ и подставляя это значение f в (A₁'), где положим $K' = \frac{\pi}{2}$, найдем

$$\frac{1}{A} - \frac{\lambda_{10}^{2\alpha}}{\alpha} = \frac{H}{AT}, \quad (42)$$

откуда

$$\lambda_{10}^{2\alpha} = \frac{\alpha}{A} \left(1 - \frac{H}{T} \right) = \frac{\alpha H'}{AT}. \quad (\alpha_2)$$

Так как по (20)

$$g_1 = 1 + \varepsilon_1 \lambda_1^{2\alpha}, \quad g_2 = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\vartheta_0}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \varepsilon_1 \lambda_1^{2\alpha} \quad (\text{при } k^2 = 1), \quad (43)$$

то подставляя из (41), (42), (43) в (B'), на основании (18), найдем

$$Q_{s1} = \frac{T}{H'} \left[b + \frac{4H'}{\pi} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\vartheta_0}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (\vartheta_0 = \arccos \lambda_{10}). \quad (\beta_2)$$

Интересно отметить, что в сноске на стр. 60 своей книги [7] В. В. Ведерников рекомендует при большой ширине канала по дну и близком залегании дренирующего слоя пользоваться для приближенных подсчетов формулой (данной им без вывода), имеющей в наших обозначениях вид

$$Q_s = \frac{T}{H'} \left(b + H' \operatorname{ctg} \alpha \pi \ln \frac{T}{H'} \right). \quad (44)$$

В табл. 8 приведены погрешности, полученные при вычислении Q_s по формулам (β_2) и (44) для случаев № 1—4, 10—14 табл. 4. Значения λ_0 вычислены для случая № 1 по формуле (α_1'), для случая № 2 — по формуле (α_1), для случаев № 3—4 — по формуле (α_1') и для случаев № 10—14 — по формуле (α_2).

Представляя формулу (β_2) в виде

$$Q_{s1} = \frac{T}{H'} \left(b + \frac{4H'}{\pi} \ln \frac{1 + \lambda_0}{\lambda_{10}} \right),$$

заменяя λ_{10} его выражением (α_2) и полагая $\ln(1 + \lambda_0) \approx \ln 2$, получим вместо (β_2) приближенную формулу

$$Q_{s1} = \frac{T}{H'} \left[b + \frac{4H'}{\pi} \ln 2 \left(\frac{AT}{\alpha H'} \right)^{\frac{1}{2\alpha}} \right]. \quad (\beta_2')$$

№	$\lambda_{\text{ист}}$	λ_0	Погрешность в % Q_2 по формуле (32)	Погрешность в % Q_2 по формуле (44)
1	0,1045	0,1048	3,7—	5—
2	0,2840	0,2810	1,9—	17—
3	0,3090	0,3050	3,3—	19—
4	0,4618	0,4755	3,2—	15—
10	0,9659	0,9648	1,4—	19—
11	0,9900	0,9692	3,5—	47—
12	0,9900	0,9899	1,3—	27—
13	0,9937	0,9936	0,9—	20—
14	0,9937	0,9937	0,6—	14—

Погрешности (в процентах) значений Q_2 , вычисленных по формуле (β_2') , для 14 случаев табл. 4 соответственно равны: 1,2; 0,0; 0,8; 2,1; 2,4; 1,5; 4,6; 5,0; 5,4; 1,1; 2,9; 1,3; 0,9; 0,6. При $k^2 \approx 1$ последняя формула дает хорошие результаты также и в случаях прямоугольного и треугольного сечений¹

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Ведерников, Фильтрация из каналов, Госстройиздат (1934).
2. В. В. Ведерников, Метод решения некоторых задач по фильтрации со свободной поверхностью, „Гидротехническое строительство“ № 9 (1935).
3. V. V. Vedernikov, Sur la solution du problème à deux dimension du courant stationnaire des eaux souterraines à surface libre, C. R., t. 202, N 13, 16 (1936).
4. В. В. Ведерников, Фильтрация из треугольных и трапециoidalных каналов, Научные Записки МНИВХ, вып. 2 (1936).
5. V. V. Wedernikov, Über die Sickerung und Grundwasserbewegung mit freier Oberfläche, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. 17, N. 3 (1936).
6. В. В. Ведерников, Гидромеханические методы расчета движения грунтовых вод со свободной поверхностью, Научные записки МНИВХ, в. IV, 1937.
7. В. В. Ведерников, Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа, Госстройиздат (1939).
8. Н. Е. Жуковский, Просачивание воды через земляные плотины, М. (1923).
9. J. Kozeny, Grundwasserbewegung bei freiem Spiegel, Fluss- und Kanalversickerung, Wasserkraft und Wasserwirtschaft, N 3 (1931).
10. Н. Н. Павловский, Неравномерное движение грунтовых вод (1930).
11. Б. К. Ризенкамф, Гидравлика грунтовых вод, ч. 2, Ученые зап. Саратовского Гос. ун-та. Серия мат. мех., т. I (XIV), в. 2 (1938).
12. Б. К. Ризенкамф, Гидравлика грунтовых вод, ч. 3, Ученые зап. Саратовского Гос. ун-та, т. XV, в. 5 (1940).
13. L. Hopf und E. Trefftz, Grundwasserströmung in einem abfallenden Gelände mit Abfanggraben, ZAMM, Bd. 1, N. 4. (1921).

Получена 2 ноября 1951 г.

¹ Так, например, при $\alpha = \frac{1}{2}$, $T = 20$ м, $\theta = 89^\circ 55'$, $\lambda = 0,9937$ формула (β_2') дает погрешность в 2,8%, а при $\alpha \approx 0,1$, $T = 20$ м, $\theta = 89^\circ$, $\lambda = 1$ — 0,9%.