В ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ АКАДЕМИИ НАУК УССР

Заседания ученого совета Института математики АН УССР

Заседание 11 сентября 1951 г. Доклад Б. В. Гнеденко и Е. Л. Рвачевой: „Об одной задаче сравнения двух эмпирических распределений".

Для оценки правильности гипотезы, что две серии наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$; $y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$ получены в результате испытаний над случайными величинами ξ_1, ξ_2 с одним и тем же непрерывным распределением вероятностей, Н. В. Смирнов[1] предложил принять за меру величины

$$D^{+}_{n_1 n_2} = \sup_{-\infty < x < \infty} \{T_1(x) - T_2(x)\}; \quad D_{n_1 n_2} = \sup_{-\infty < x < \infty} | T_1(x) - T_2(x) |,$$

где $T_1(x)$ и $T_2(x)$ — соответствующие эмпирические функции распределения, и нашел предельное распределение для этих величин при $\lim\limits_{n_1 \to \infty} \frac{n_2}{n_1} = \tau$ $(0 < \tau < \infty)$. В работе для конечных $n_1 = n_2$ получено совместное распределение величин

$$\max_{-\infty < x < \infty} \{T_1(x) - T_2(x)\} \text{ и } \max_{-\infty < x < \infty} \{T_2(x) - T_1(x)\},$$

а также найдено их совместное предельное распределение. Как частный случай из полученных результатов следуют результаты работы Б. В. Гнеденко и В. С. Королюк[2].

Заседание 9 октября 1951 г. Доклад Г. Е. Шилова: „Векторногладкие функции". Соответствующая статья автора опубликована в журнале „Успехи математических наук" № 5 за 1951 г.

Заседание 23 октября 1951 г. Доклад М. А. Красносельского и С. Г. Крейна: „Итерационный процесс с минимальными невязками".

1. Вопрос о приближенном решении системы уравнений

$$Bx = b, \tag{1}$$

где B — положительно определенная квадратная n-мерная матрица, b — известный, x — искомый, n-мерные векторы, может ставиться различными способами. Можно ставить вопрос об отыскании приближенного решения, возможно более близкого к точному решению системы (1). Можно ставить вопрос об отыскании такого приближенного решения x_n, при котором длина вектора невязки $\Delta_n = Bx_n - b$ будет возможно меньшей.

Оценка качества метода приближенного решения системы (1) естественным образом зависит от того, как поставлен вопрос о приближенном решении.

Авторы ставили перед собой задачу отыскания метода, возможно лучшего с точки зрения второй постановки, т. е. добивались возможно большего уменьшения длины невязки.

---

[1] Н. В. Смирнов, Бюлл. Моск. ун-та, 2, в. 2 (1939).

[2] Б. В. Гнеденко и В. С. Королюк, ДАН, 80, № 4 (1951).

2. Для приближенного решения системы (1) предлагается нелинейный итерационный процесс, при котором $n+1$-ое приближение x_{n+1} находится по предыдущему x_n по формуле

$$x_{n+1}=x_n-\frac{(B\Delta_n,\ \Delta_n)}{(B\Delta_n,\ B\Delta_n)}\Delta_n. \tag{2}$$

Как оказывается, этот процесс сходится не медленнее геометрической прогрессии со знаменателем

$$q=\frac{M-m}{M+m},$$

где M и m — соответственно наибольшее и наименьшее собственные числа матрицы B. Процесс (2) оказывается монотонным.

Проводится сравнительное изучение процесса (2) с обычным итерационным процессом и с методом скорейшего спуска, разработанным Л. В. Канторовичем. Как оказывается, с точки зрения уменьшения невязки при одном шаге процесса, предлагаемый метод оказывается лучшим.

В связи с рассмотрением процесса (2) авторы изучили нелинейный оператор

$$K\varphi=\varphi-\frac{(B\varphi,\ \varphi)}{(B\varphi,\ B\varphi)}B\varphi$$

и выяснили его структуру.

Заседание 20 ноября 1951 г. Доклад Г. Е. Шилова: „Векторногладкие поля".

Непрерывное векторное поле $\overline{R}(x,\ y,\ z)$ в области G называется векторногладким, если в каждой точке $(x_0,\ y_0,\ z_0)\in G$ существуют дивергенция и ротор этого поля (определенные обычными предельными формулами с интегралами по замкнутым поверхностям), представляющие собой функции, непрерывные в области G.

Автор показывает, что для любых непрерывных полей — скалярного $\varphi(x,\ y,\ z)$ и векторного $\overline{T}(x,\ y,\ z)$, определенных в (ограниченной) области G, можно построить векторногладкое поле $\overline{R}(x,\ y,\ z)$, для которого

$$\operatorname{div}\overline{R}=\varphi,\quad \operatorname{rot}\overline{R}=\overline{T},$$

если только $\operatorname{div}\overline{T}=0$.

Поле определяется с точностью до градиента гармонической функции. До сего времени аналогичные задачи векторного анализа решались в более сильных предположениях относительно полей φ и $\overline{T}$ (наличие первых производных), что приводило к разрыву между необходимыми и достаточными условиями существования решения задачи.

Заседания научного семинара на механико-математическом факультете Киевского государственного университета им. Т. Г. Шевченко

С 13 ноября 1951 г. на механико-математическом факультете Киевского государственного университета начал функционировать научный семинар общего типа. В план работы семинара включены сообщения о собственных исследованиях участников и обзорные доклады по различным областям математики.

Заседание 13 ноября 1951 г. Доклад Г. Н. Положий, „О движении граничных точек отображаемых областей".

Многие задачи гидромеханики и теории фильтрации приводят к необходимости детального изучения соответствия граничных точек конформно отображаемых областей, имеющих частично общую границу, в том случае, когда одна из них является внутренней по отношению к другой. В настоящей работе ставится вопрос о характере движений точек общей части границ областей и о появлении на этой общей части границ неподвижных точек. В качестве ответа на поставленный вопрос доказывается следующая теорема

Теорема. *При конформном отображении односвязной области G на произвольную область G^*, содержащую G и имеющую с G частично общую границу в виде жордановой кривой Γ, на открытой* (т. е. не содержащей своих концов) *кривой Γ не может быть больше трех неподвижных точек. Если таких точек имеется три, то* *две крайние из них — притягивающие, а средняя — отталкивающая, если таких точек только две, то одна из них — притягивающая, другая — непритягивающая.*

В качестве непосредственных выводов из этой теоремы получаются следствия:

Следствие 1. Если L и M — концы кривой $\boldsymbol{\Gamma}$, то при наличии на открытой кривой $\boldsymbol{\Gamma}$ трех неподвижных точек A, B, C все точки полузакрытой кривой $[LB)$ (т. е. содержащей точку L и не содержащей точки B) и полузакрытой кривой $(BM]$ при отображении G на G^* получают ненулевые смещения в направлении к точке A и соответственно в направлении к точке C.

Следствие 2. В случае, когда на открытой кривой $\boldsymbol{\Gamma}$ имеется только две неподвижных точки A и C, если для определенности считать притягивающей точку A, то все точки полузакрытой кривой $[LC)$ при отображении G на G^* получают ненулевые смещения в направлении к точке A, а все точки открытой кривой (CM) получают ненулевые смещения в одном и том же направлении по отношению к точке C.

Следствие 3 (о закрепленном конце). Если конец M кривой $\boldsymbol{\Gamma}$ закреплен и на открытой кривой $\boldsymbol{\Gamma}$ имеется две неподвижных точки A и C, то при отображении G на G^* все точки полузакрытой кривой $[LC)$ получают ненулевые смещения в направлении к точке A, а все точки открытой кривой (CM) получают ненулевые смещения в направлении от точки C.

Следствие 4 (о закрепленных концах). Если концы L и M кривой Γ закреплены и на открытой кривой $\boldsymbol{\Gamma}$ имеется одна неподвижная точка B, то при отображении G на G^* все точки открытой кривой $\boldsymbol{\Gamma}$ получают ненулевые смещения в направлении от точки B.

Следствие 5 (о свободной средней точке). Пусть границы односвязных областей D и D^* составлены из общей им жордановой кривой $\boldsymbol{\Gamma}$ и соответственно из жордановых кривых γ и γ^*, пересекающихся одна с другой в одной точке P. Тогда при отображении D на D^* при условии, что концы кривой $\boldsymbol{\Gamma}$ закреплены и одна из точек открытой кривой $\boldsymbol{\Gamma}$ остается неподвижной, точка P получает ненулевое смещение вдоль кривой γ^* в направлении к ее концу, подходящему к границе области D изнутри.

Заседание 20 ноября 1951 г. Доклад К. Я. Латышевой: „Поднормальные и нормальные ряды, как решения линейных диференциальных уравнений". Рассматриваются условия появления и структура формальных решений вида

$$y \sim S(x) \equiv e^{Q\left(x^{\frac{1}{\mu}}\right)} x^r \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{-i}, \tag{1}$$

где $Q\left(x^{\frac{1}{\mu}}\right)$ — многочлен некоторой степени от $x^{\frac{1}{\mu}}$ (μ — целое число $\geqslant 1$) линейных диференциальных уравнений

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \sum_{i=1}^{n} P_i(x) \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-i}} = 0, \tag{2}$$

коэфициенты которых разложимы в ряды по целым убывающим степеням независимого переменного, асимптотические или сходящиеся в окрестности бесконечно удаленной точки

$$P_i(x) = \sum_{v=0}^{\infty} p_{iv} x^{\beta_i - v}$$

(β_i — целые числа) в том случае, когда характеристическое уравнение

$$a_0^n + \sum_{i=1}^{n} p_{i0}\, a_0^{n-i} = 0$$

(где не все p_{i0} равны нулю) имеет l-кратный корень $a_0^{(1)}$.

Кроме того, выяснены условия сходимости рядов в выражениях (1) и условия появления логарифмических нормальных и поднормальных рядов, т. е. рядов вида

$$\sum_{i=0}^{\tau} S_i(x) \ln^i x \qquad (0 \leqslant \tau \leqslant l-1)$$

Приведем некоторые результаты.

Применим к уравнению (2) преобразование $y=e^{Q(x)}u$, где функция $Q(x)$ определяется равенством

$$Q(x)=\sum_{s=1}^{k+1}\frac{a_{k+1-s}\,x^s}{S}\,; \qquad k=\max\frac{\beta_i}{i} \qquad (1\leqslant i\leqslant n)$$

с неопределенными a_{k+1-s}; коэфициенты полученного уравнения

$$\frac{d^n u}{dx^n}+\sum_{i=1}^{n}T_i(x)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-i}}=0$$

$$T_i(x)=x^{ik}\left(b_{i0}+\frac{b_{i1}}{x}+\frac{b_{i2}}{x^2}+\ldots\right).$$

Тогда: 1) если уравнения $b_{n,\,l+l_1+\ldots l_{v-1}}=0$ ($v=1,\ldots,s$; $s\leqslant k-1$) имеют корни $a_1, a_2,\ldots, a_v$ соответственно кратности $l_1, l_2,\ldots, l_{v-1}$, а выражения $b_{n-j,\,l+l_1+\ldots+l_{v-1}-vj-i}$ ($j=0, 1,\ldots, l_{v-1}-1$; $i=1, 2,\ldots, l+l_1+\ldots+l_{v-1}-vj$) равны тождественно нулю, то l-кратному корню характеристического уравнения соответствуют l асимптотических решений уравнения (2);

2) если $l=l_1=\ldots=l_k$ и $s=k$, то при выполнении условий пункта 1) l'-кратному корню характеристического уравнения соответствуют l нормальных решений (т. е. таких, для которых входящие ряды сходятся для достаточно больших значений x) уравнения (2);

3) если условия пункта 1) выполняются до s, равного k, то l-кратному корню характеристического уравнения соответствуют l асимптотических решений, среди которых могут быть и логарифмические;

4) если при определенных значениях $a_1, a_2,\ldots, a_v$ из вышеуказанных уравнений выражения $b_{n-j,\,l+l_1+\ldots+l_v-(v+1)j-i}$ ($0\leqslant j\leqslant j_1\leqslant l_v-1$; $i=l_v-j_1,\ldots l_v-j$) тождественно равны нулю, но выражение $b_{n-j,\,l+l_1+\ldots+l_v-(v+1)j_1-i_1}$ не равно нулю, то в этом случае l-кратному корню характеристического уравнения соответствуют j_1 нормальных рядов и l_v-j_1 поднормальных рядов.

В. В. Хорошилов („Прикладная математика и механика“ 1950 г.) рассмотрел форму поднормальных рядов для $k=0$, $n=2$.