Замечание к работе „Об одной задаче, связанной с метризуемостью топологических пространств“ [1]

Ю. М. Смирнов

В этой статье приводится решение одной задачи, поставленной в 1922 году П. С. Александровым и П. С. Урысоном в их известном исследовании „О компактных топологических пространствах“ [2], а именно доказана следующая

Основная теорема. *Если компактное хаусдорфово пространство R представлено в виде суммы двух взаимно дополнительных множеств — замкнутого и открытого, каждое из которых является пространством со счетной базой, то пространство R имеет счетную базу и, следовательно, метризуемо.*

В моей работе [1] сформулированная выше гипотеза П. С. Александрова и П. С. Урысона доказана даже для всех локально-компактных хаусдорфовых пространств. Однако данное мною доказательство содержит существенный пробел, который и восполняется в настоящей статье.

Как и в [1], все рассматриваемые пространства предполагаются хаусдорфовыми.

* *
*

Основная теорема выводится дословно, как в [1], из следующей теоремы:

Теорема 1. *Если локально-компактное пространство R может быть представлено в виде суммы счетного числа множеств, являющихся F_σ и G_δ-множествами данного пространства и удовлетворяющих второй аксиоме счетности, то оно имеет счетную базу и, следовательно, метризуемо.*

Формулировка этой теоремы в [1] отличается от только что приведенной тем, что в ней говорится не о множествах, являющихся одновременно множествами типа F_σ и типа G_δ, а о множествах одного лишь типа G_δ. Я не знаю, верна ли теорема 1 в этой более сильной формулировке, но для достижения нашей цели — доказательства гипотезы Александрова—Урысона, это и несущественно.

Теорема 1 в ее исправленной формулировке выводится дословно, как в [1], из следующей леммы:

[1] См. [1].

Основная лемма 1. *Пусть в бикомпакте R дано множество H типа F_σ и G_δ одновременно; для того чтобы это множество H имело внешнюю счетную базу*[1] *достаточно (и, очевидно, необходимо), чтобы оно обладало обыкновенной счетной базой*[2].

(Соответствующая лемма в [1] опять-таки предполагает, что множество H имеет лишь тип G_δ; но в доказательстве той леммы содержится ошибка).

Итак, вопрос сводится к доказательству основной леммы 1. Этому доказательству и посвящена настоящая статья.

Доказательство леммы 1 в свою очередь опирается на следующую вспомогательную лемму:

Лемма 2. *Элементы любой счетной базы $\mathfrak{B}$ всякого нормального пространства R можно так занумеровать, что для любой точки $x \in R$ и любого, содержащего точку x и принадлежащего базе $\mathfrak{B}$ множества U_k найдется хотя бы одно такое $n > k$, что*

$$x \in U_n \subseteq [U_n] \subseteq U_k. \tag{1}$$

Доказательство леммы 2. Обозначим через J множество всех изолированных точек пространства R. Так как пространство R имеет счетную базу, то множество J либо счетно, либо конечно. Так как каждое множество U_x, состоящее из одной точки $x \in J$, открыто, то каждое такое U_x непременно является элементом базы $\mathfrak{B}$. Занумеруем теперь элементы базы $\mathfrak{B}$ таким образом, чтобы в получившейся последовательности

$$U_1, U_2, \ldots, U_k, \ldots \tag{2}$$

множеств базы $\mathfrak{B}$ каждое одноточечное множество U_x было повторено счетное число раз. Это, очевидно, можно сделать. Покажем теперь, что занумерованная таким образом база $\mathfrak{B} = \{U_k\}$ обладает нужным нам свойством. Пусть даны произвольно точка $x \in R$ и множество $U_k \ni x$. В случае изолированной точки x это действительно так: ведь именно для этого мы и занумеровали так своеобразно элементы базы $\mathfrak{B}$! Пусть же точка x не изолирована. Тогда в окрестности U_k точки x найдется точка y_1, отличная от точки x, и такое множество U_{n_1} из базы $\mathfrak{B}$, что $x \in U_{n_1}$, а $[U_{n_1}] \subseteq U_k$. По той же причине в U_{n_1} найдется вторая точка y_2, отличная от точки x, а также найдется и множество U_{n_2} из базы $\mathfrak{B}$ такое, что $x \in U_{n_2} \subseteq [U_{n_2}] \subseteq U_{n_1}$. Так как точка x — не изолирована, то указанное построение можно продолжать до бесконечности, в результате чего мы получим бесконечную последовательность отличных друг от друга множеств U_{n_i} базы $\mathfrak{B}$, содержащих точку x, и таких, что $[U_{n_i}] \subseteq U_k$. Следовательно, найдется число $n_i > k$, для которого мы будем иметь: $x \in U_{n_i} \subseteq [U_{n_i}] \subseteq U_k$.

Лемма 2 доказана.

---

[1] Внешней базой множества H в пространстве R называется такая система $\{U_\alpha\}$ открытых множеств U_α пространства R, что для любой точки $x \in H$ и любой окрестности Ox точки x в R существует U_α такое, что $x \in U_\alpha \subseteq Ox$.

[2] Легко видеть, что лемма 1 останется справедливой, если вместо бикомпактности пространства R потребовать, чтобы оно было лишь нормальным и компактным пространством.

Доказательство основной леммы 1. Пусть множество H представлено в виде суммы $H = \bigcup_i H_i$ счетного числа замкнутых в R множеств H_i. Так как множество H имеет счетную базу и регулярно, то оно метризуемо, значит, каждое H_i (будучи замкнутым в H) имеет тип G_δ в H. А так как все H имеет тип G_δ в R, то и каждое H_i имеет тип G_δ во всем пространстве R. Если мы докажем, что каждое H_i имеет внешнюю счетную базу в R, то тем самым мы докажем и всю лемму 1, так как объединение всех внешних счетных баз множеств H_i будет внешней счетной базой множества H. *Итак, нам нужно доказать нашу лемму 1 для того случая, когда множество H замкнуто.*

Пусть $H = \bigcap_n G_n$, где G_n — открытые в R множества, такие, что $G_n \supset G_{n+1}$. Возьмем в H счетную базу $\mathfrak{B}$ и занумеруем элементы этой базы так, чтобы выполнялось условие леммы 2. Подберем далее к каждому $U_k \in \mathfrak{B}$ открытое во всем R множество V_k, такое, что $V_k \cap H = U_k$. Построим теперь систему $\mathfrak{A}$ открытых в R множеств W_k, удовлетворяющих следующим условиям:

а) для каждого k множество $W_k \subseteq G_k \cap V_k$,

б) для каждого k пересечение $H \cap W_k = U_k$,

в) если при $h > k$ замыкание $[U_h] \subseteq U_k$, то и

$$[W_h] \subseteq W_k.$$

Для этого положим сначала $W_1 = V_1 \cap G_1$. После этого, допустив, что для всех k, не превосходящих некоторого n, мы уже построили множества W_k, удовлетворяющие условиям а), б), в), перейдем к построению следующего множества W_{n+1}.

Пусть $U_{k_1}, U_{k_2}, \ldots, U_{k_j}$ — все те множества базы $\mathfrak{B}$ с индексами $k_i \leqslant n$, которые содержат замыкание $[U_{n+1}]$ множества U_{n+1}. Так как их конечное число, то пересечение $V' = \bigcap_{i \leqslant j} W_{k_i}$ является открытым в R множеством, содержащим замыкание $[U_{n+1}]$. В силу нормальности пространства R существует открытое в R множество V'', такое, что $[U_{n+1}] \subseteq V'' \subseteq [V''] \subseteq V'$.
Докажем, что множество $W_{n+1} = V_{n+1} \cap G_{n+1} \cap V''$ будет искомым. Действительно, условия а) и б) для него выполнены. Остается проверить условие в). Для этого возьмем какое-нибудь $k \leqslant n$, такое, что $[U_{n+1}] \subseteq U_k$. Это значит, что k есть некоторое k_i, а потому, в силу построения множества W_{n+1}, получим, что

$$[W_{n+1}] \subseteq [V''] \subseteq V' \subseteq W_k.$$

Итак, это решающее место индукции полностью проведено и мы, строя указанным образом один за другим множества W_k, в конце концов придем к системе $\mathfrak{A}$ множеств W_k, удовлетворяющих условиям а), б), в).

Докажем теперь, что эта счетная система $\mathfrak{A}$ является внешней счетной базой множества H. Пусть даны точка $x \in H$ и открытое в R множество Γ, содержащее эту точку. Найдем множество $W_l \in \mathfrak{A}$, удовлетворяющее условию $x \in W_l \subseteq \Gamma$. Этим все будет доказано.

Так как множества U_k образуют базу множества H, удовлетворяющую условию леммы 2, то существует последовательность

$$U_{k_1}, U_{k_2}, \ldots, U_{k_i}, \ldots \qquad (3)$$

множеств U_{k_i}, подчиняющихся следующим требованиям:

α) для любой окрестности Ox точки x, взятой во множестве H, существует i, такое, что $x \in U_{k_i} \subseteq Ox$;

β) каждое $U_{k_i} \supseteq [U_{k_{i+1}}]$;

γ) каждый индекс $k_i < k_{i+1}$.

Из требования α) сразу получаем, что пересечение множеств U_{k_i} состоит всего лишь из одной точки x. Покажем, что и пересечение замыканий соответствующих множеств W_{k_i} также состоит из одной лишь точки x. Действительно, из условий β) и в) сразу вытекает, что $W_{k_i} \supseteq [W_{k_{i+1}}]$ для любого i. Отсюда следуют и включения

$$\bigcap_i [W_{k_i}] = \bigcap_i W_{k_i} \subseteq \bigcap_i (V_{k_i} \cap G_{k_i}) = \bigcap_i V_{k_i} \cap H = \bigcap_i U_{k_i} = x. \tag{4}$$

Положим $F_i = [W_{k_i}] \setminus \Gamma$. Из (4) следует, что пересечение $\bigcap_i F_i$ не может содержать никакой точки, отличной от точки x, но оно очевидно, не содержит и этой точки x (т. к. $x \in \Gamma$). Значит, пересечение $\bigcap_i F_i$ пусто, а потому — в силу компактности пространства R — пусто и некоторое F_i т. е. $[W_{k_i}] \subseteq \Gamma$, чем лемма 1 доказана.

Этим, стало быть, доказана и теорема 1, а вместе с нею и наша *основная* теорема (гипотеза Александрова—Урысона).

З а м е ч а н и е. Теорема 2 работы [1] должна быть сформулирована так:

Т е о р е м а 2. *Если регулярное пространство R может быть представлено в виде суммы счетного числа множеств H_i, удовлетворяющих второй аксиоме счетности, и являющихся одновременно абсолютными G_δ и абсолютными F_σ^1, то R метризуемо.*

Доказательство работы [1] сохраняется дословно. Остается неизвестным, можно ли и здесь ограничиться требованием, чтобы H_i были абсолютными G_δ?

* *
*

Поставим в заключение следующую задачу: может ли неметризуемый бикомпакт быть представлен в виде суммы двух произвольных непересекающихся множеств, каждое из которых является пространством со счетной базой?

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. С м и р н о в, Об одной задаче, связанной с метризуемостью топологических пространств, Укр. матем. журн., III, № 2, 1951, стр. 161—163.

2. П. С. А л е к с а н д р о в и П. С. У р ы с о н, О компактных топологических пространствах, Труды Матем. инст. АН СССР, вып. 31.

Поступила 16 декабря 1951 г.
Москва.

---

[1] Топологическое пространство R называется абсолютным G_δ, если оно есть G_δ в любом объемлющем бикомпакте. Топологическое пространство называется абсолютным F_σ, если оно является суммой счетного или конечного числа бикомпактов.