DOI: 10.37863/umzh.v74i8.6614

УДК 517.9

О. Є. Гентош (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів),
Я. А. Прикарпатський[1] (Ін-т математики НАН України, Київ, та Університет рільництва, Краків, Польща),
О. А. Балінський (Мат. ін-т Університету Кардіфф, Великобританія),
А. К. Прикарпатський (Ін-т математики Краків. ун-ту технологій, Польща)

ГЕОМЕТРИЧНІ СТРУКТУРИ НА ОРБІТАХ ПЕТЕЛЬНИХ ГРУП ДИФЕОМОРФІЗМІВ ТА АСОЦІЙОВАНІ ІНТЕГРОВНІ ГАМІЛЬТОНОВІ СИСТЕМИ „НЕБЕСНОГО” ТИПУ. I

A review of differential-geometric and Lie-algebraic approaches to the study of a broad class of nonlinear integrable differential systems of “heavenly” type associated with Hamiltonian flows on the spaces conjugate to the loop Lie algebras of vector fields on the tori. These flows are generated by the corresponding orbits of the coadjoint action of the diffeomorphism loop group and satisfy the Lax – Sato-type vector-field compatibility conditions. The corresponding hierarchies of conservation laws and their relationships with Casimir invariants are analyzed. Typical examples of these systems are considered and their complete integrability is established by using the developed Lie-algebraic construction. We describe new generalizations of the integrable dispersion-free systems of “heavenly” type for which the corresponding generating elements of orbits have a factorized structure, which allows their extension to the multidimensional case.

Наведено огляд диференціально-геометричних і Лі-алгебраїчних підходів до вивчення широкого класу нелінійних інтегровних диференціальних систем „небесного” типу, асоційованих із гамільтоновими потоками на спряжених просторах до петельних алгебр Лі векторних полів на торах. Ці потоки породжуються відповідними орбітами коприєднаної дії петельної групи дифеоморфізмів і задовольняють векторно-польові умови сумісності типу Лакса – Сато. Проаналізовано відповідні ієрархії законів збереження і їхній зв'язок з інваріантами Казиміра. Розглянуто типові приклади таких систем і встановлено їхню повну інтегровність за допомогою розвиненої Лі-алгебраїчної конструкції. Описано нові узагальнення інтегровних бездисперсійних систем „небесного” типу, для яких відповідні породжуючі елементи орбіт мають факторизовану структуру, що допускає їх розширення на багатовимірний випадок.

1. Вступ. Відомо, що дослідження інтегровності складних математичних моделей сучасного природознавства або відповідних їм нелінійних диференціальних рівнянь та динамічних систем — це активна область [4, 7, 23] математичних досліджень з моменту відкриття методу оберненого розсіювання та застосування диференціально-геометричних, алгебро-геометричних та операторно-спектральних методів [2, 13 – 16, 18, 19, 23] до їх глибокого вивчення. Такі нелінійні моделі є певним чином універсальними, оскільки вони з’являються у багатьох областях фізики, таких як фізика твердого тіла, нелінійна оптика, гідродинаміка, фізика плазми тощо, серед як теоретичних, так і прикладних досліджень. Одночасно інтегровність цих моделей тісно пов’язана з багатьма напрямками сучасної математики і характеризується багатими і красивими структурами, що стоять за ними. Основним об’єктом даного огляду є інтегровні системи багатовимірних бездисперсійних динамічних потоків та диференціальних рівнянь з частинними похідними, що мають модифіковане зображення типу Лакса – Сато, асоційоване з їх прихованою груповою симетрією та гамільтоновою структурою. Такі системи виникають у механіці, загальній теорії відносності, диференціальній геометрії, загальній теорії інтегровних динамічних систем. Серед них варто згадати рівняння Боєра – Фінлі, рівняння Плєбанського „небесного” типу, які описують клас самодуальних 4-многовидів, бездисперсійне рівняння

[1] Відповідальний за листування, e-mail: yarpry@imath.kiev.ua.

Кадомцева – Петвіашвілі, відоме як рівняння Хохлова – Заболоцького з нелінійної акустики та теорії структур Ейнштейна – Вейля. Їх інтегровність досліджувалась за допомогою різних сучасних підходів, зокрема симетрійного аналізу, диференціально-геометричних методів, технік бездисперсійного $\bar{\partial}$-одягання і факторизації, в'язей Вірасоро, гідродинамічних редукцій і т. п. У цій статті наведено огляд певного класу диференціально-геометричних та Лі-алгебраїчних структур, що характеризують класичні динамічні системи гідродинамічного типу, важливі для опису та побудови як їхніх точних розв'язків, так і детального аналізу властивостей пов'язаних з ними математичних об'єктів. Перші приклади та відповідні гамільтонові структури було розглянуто у роботах [24 – 28], а згодом у статтях [29 – 31, 49, 69 – 72], у яких було детально проаналізовано багато прикладів систем бездисперсійних рівнянь з частинними похідними. Ці системи називають системами „небесного" типу, а їхню назву вперше ввів Є. Плєбанський [32]. Системи „небесного" типу вивчались у багатьох статтях (див. [8 – 12, 20 – 22, 26 – 28, 31 – 42]) з використанням різних підходів. Зокрема, у працях [26 – 28, 33 – 41] активно застосовувались та розвивались диференціально-геометричні та симплектичні методи досліджень. У недавніх статтях [29, 30] було розроблено загальну Лі-алгебраїчну схему для конструювання інтегровних за Лаксом – Сато диференціальних систем „небесного" типу, яка ґрунтується на застосуванні класичної геометричної конструкції Адлера – Костанта – Саймза (АКС-теорії) та пов'язаних з нею R-операторних структур [16 – 18, 24 – 28, 42 – 45] до петельної алгебри Лі $\widetilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{T}^n)$ векторних полів на n-вимірному торі $\mathbb{T}^n$ та її голоморфного узагальнення. Згідно з розвиненою авторами схемою такі диференціальні системи виникають з умови комутування гамільтонових потоків на регулярних спряжених просторах до згаданих вище алгебр Лі, заданих R-деформованою дужкою Лі – Пуассона та відповідними інваріантами Казиміра як гамільтоніанами. Для кожної з цих алгебр Лі умова комутування на орбітах коприєднаної дії редукується до зображень Лакса – Сато систем „небесного" типу. У цих працях було також зазначено, що у більшості випадків інтегровні системи „небесного" типу породжуються елементами регулярного спряженого простору до петельної алгебри Лі, що мають спеціальну структуру повного диференціала або пропорційну до нього над кільцем гладких функцій на торі. При цьому на просторі модулів [46, 47] калібрувальних зв'язностей на $\mathbb{T}^n$ для коприєднаних дій відповідних інваріантів Казиміра існує канонічна симплектична структура, що дозволяє вивчати геометричну природу таких систем за допомогою когомологічних підходів, запропонованих у роботах [46, 48] для випадку ріманових поверхонь. Крім того, було встановлено зв'язок побудованих нами гамільтонових потоків із відомим у класичній механіці принципом Лагранжа – Даламбера. Зокрема, для $n = 1$ у статті [10] було запропоновано узагальнення розробленої в [29, 30] Лі-алгебраїчної схеми на випадок петельної алгебри Лі суперконформних векторних полів на суперколі $\mathbb{S}^{1|N} \simeq \mathbb{S}^1 \times \Lambda_1$, де $\Lambda := \Lambda_0 \oplus \Lambda_1,\ \Lambda_0 \supset \mathbb{C}$, — алгебра Грассмана над полем $\mathbb{C}$, та отримано нові інтегровні за Лаксом – Сато супераналоги деяких відомих систем „небесного" типу [30, 49]. Зазначимо також, що у працях [30, 50 – 53] для аналізу систем „небесного" типу було використано неасоціативні та некомутативні алгебри струмів на торі $\mathbb{T}^m,\ m \in \mathbb{N}$, а в працях [26 – 28] було розвинено загальний Лі-алгебраїчний підхід до конструювання бігамільтонових систем „небесного" типу з використанням центрального розширення так званої петельної алгебри Лі векторних полів на колі.

Опишемо коротко структуру статті. У першому пункті ми розглядаємо деякі основні поняття та математичні конструкції, які лежать в основі диференціально-геометричного підходу Лі до вивчення інтегровних диференціальних рівнянь типу Лакса – Сато. У другому пункті описано асоційовані з ними Лі-алгебраїчні структури на спряженому просторі до алгебри Лі, асоційовані структури Лі – Пуассона та сформульовано алгебраїчний критерій існування інтегровних потоків типу Лакса. Третій пункт присвячено диференціально-геометричному аналізу групи дифеоморфізмів тора, побудові канонічної структури Лі – Пуассона на спряженому просторі до її алгебри Лі. В четвертому пункті наведено опис інтегровних гамільтонових систем, породжених орбітами коприєднаної дії петельної групи дифеоморфізмів на спряженому просторі до її алгебри Лі. Інтегровні багатовимірні „небесні” системи типу Лакса – Сато й асоційовані з ними конформні структури, що генерують ці рівняння, містяться у п’ятому та шостому пунктах. Як виявилося, серед них є важливі рівняння для сучасних досліджень фізики, гідродинаміки і, зокрема, геометрії Рімана, пов’язані з такими цікавими конформними структурами на метричних просторах Рімана, як рівняння метрики Ейнштейна та Ейнштейна – Вейля, друге рівняння конформної метрики Плєбанського, рівняння метрики Дунайського тощо. При цьому деякі з них мали в основі голоморфні породжуючі елементи в деяких спеціальних підобластях комплексної площини, аналіз яких потребував певної модифікації їх теоретичного обґрунтування. Окрім того, загальна диференціально-геометрична структура породжуючих елементів, пов’язана з деякими рівняннями конформних метрик, виявилась інваріантною щодо просторового виміру розглянутих просторів Рімана, що дало можливість аналітично описати їх у багатовимірному випадку. Нами проаналізовано, зокрема, рівняння метрики Ейнштейна – Вейля, модифіковане рівняння метрики Ейнштейна – Вейля, систему „небесних” рівнянь Дунайського, рівняння першої та другої конформних структур, що генерують відповідні інтегровні „небесні” рівняння, обернене перше „небесне” рівняння Шабата, перше і модифіковане „небесне” рівняння Плєбанського, як і його багатовимірне узагальнення, „небесне” рівняння Хусейна та його багатовимірне узагальнення, загальне рівняння Монжа та його багатовимірне узагальнення. Короткий сьомий пункт присвячено побудові суперконформних аналогів „небесного” рівняння Візема, а восьмий пункт — дослідженню геометричних структур, пов’язаних з одновимірною повністю інтегровною гідродинамічною системою Чаплигіна, яка виявилася глибоко пов’язаною з диференціальними системами на торі та відповідно асоційованими з ними орбітами групи петельної групи дифеоморфізмів. Ця геометрична структура дозволила знайти додатковий взаємозв’язок між породжуючими диференціальними формами на торі та аналітично описати нескінченну ієрархію нових інтегровних гідродинамічних систем. Ці системи, як було продемонстровано у [3], тісно пов’язані з класом цілком інтегровних рівнянь типу Монжа, геометричну структуру яких також нещодавно було глибоко проаналізовано в [6] за допомогою дещо іншого підходу, який базується на властивостях вкладення у многовиди Грассмана загальних диференціальних систем, визначених на джет-підмноговидах в координатах Плюкера. Цей підхід ставить, зокрема, цікаву проблему пошуку зв’язків між різними геометричними підходами до опису повністю інтегровних бездисперсійних диференціальних систем. В останніх двох пунктах розвивається аналог Лі-алгебраїчної схеми, запропонованої у працях [10, 29, 30], для центральних розширень петельної алгебри Лі векторних полів на n-вимірному торі $\mathbb{T}^n$ для довільного $n \in \mathbb{N}$, яка є напівпрямою сумою алгебри Лі векторних полів на $\mathbb{T}^n$ відповідного регулярного спряженого до неї простору та петельної алгебри Лі голоморфних узагальнень векторних полів на торі $\mathbb{T}^n$. Запропоновану Лі-алгебраїчну схему використано для побудови інтегровних за Лаксом – Сато модифікованої та узагальненої „небесних" системи типу Михальова – Павлова у чотиривимірному просторі та модифікованої системи Мартінеса Алонсо – Шабата у чотиривимірному просторі.

2. Алгебри Лі, асоційовані структури Пуассона та існування інтегровних потоків типу Лакса. Нехай $(\tilde{\mathcal{G}};[\cdot,\cdot])$ — алгебра Лі над полем $\mathbb{C}$ і $\tilde{\mathcal{G}}^*$ — природний спряжений простір. Розглянемо деякий тензорний елемент $r \in \tilde{\mathcal{G}} \otimes \tilde{\mathcal{G}} \simeq \mathrm{Hom}(\tilde{\mathcal{G}}^*;\tilde{\mathcal{G}})$ з розбиттям на симетричну та антисиметричну частини у вигляді $r = k \oplus \sigma$, де симетричний тензор $k \in \tilde{\mathcal{G}} \otimes \tilde{\mathcal{G}}$ є невиродженим. Це дозволяє ввести на алгебрі Лі $\tilde{\mathcal{G}}$ невироджену симетричну білінійну форму $(\cdot|\cdot):$ $\tilde{\mathcal{G}} \otimes \tilde{\mathcal{G}} \to \mathbb{C}$ за допомогою виразу $(a|b) := k^{-1}(ab)$ для будь-яких $a, b \in \tilde{\mathcal{G}}$. Композиція відображень $R := \sigma \circ k^{-1} : \tilde{\mathcal{G}} \to \tilde{\mathcal{G}}$, яка діє за правилом $\tilde{\mathcal{G}} \overset{k^{-1}}{\to} \tilde{\mathcal{G}}^* \overset{\sigma}{\to} \tilde{\mathcal{G}}$, визначає на алгебрі Лі $\tilde{\mathcal{G}}$ R-операторну структуру $[a,b]_R := [Ra,b] + [a,Rb]$ для будь-яких $a, b \in \tilde{\mathcal{G}}$. Наступна теорема дозволяє ввести пуассонову структуру [42, 48, 54, 55] на спряженому просторі до $\tilde{\mathcal{G}}$.

Теорема 2.1. *Для довільних $\alpha, \beta \in \tilde{\mathcal{G}}^*$ введемо дужку*

$$\{\alpha, \beta\} := ad^*_{r\alpha}\beta - ad^*_{r\beta}\alpha. \tag{2.1}$$

Дужка (2.1) *є пуассоновою тоді й лише тоді, коли R-операторна структура на алгебрі Лі $\tilde{\mathcal{G}}$ задає на $\tilde{\mathcal{G}}$ структуру Лі, тобто для будь-яких $a, b \in \tilde{\mathcal{G}}$ має місце рівність Янга – Бакстера*

$$[Ra, Rb] - R[a,b]_R = -[a,b].$$

За допомогою цієї теореми можна побудувати гамільтонові потоки лаксового типу на спряженому просторі $\tilde{\mathcal{G}}^*$ у випадку, коли існує функціонал $Tr(\cdot)$ типу Кіллінга, який породжує на $\tilde{\mathcal{G}}$ симетричний та ad-інваріантний добуток

$$Tr(ab) := (a|b), \quad (a|[b,c]) = (([a,b]|,c)$$

для будь-яких a, b і $c \in \tilde{\mathcal{G}}$. Тоді гамільтоновий потік для довільного елемента $a \in \tilde{\mathcal{G}}$ має стандартну форму Лакса $da/dt = [\mathrm{grad}(h), a]$, де елементу $\mathrm{grad}(h) \in \tilde{\mathcal{G}}$ відповідає певний функціонал $h \in \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{G}})$.

Щодо петельної алгебри Лі $\tilde{\mathcal{G}} := \widetilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{T}^n)$ на торі $\mathbb{T}^n$ відомо, що функціонал Tr-типу на $\tilde{\mathcal{G}}$ не існує, а тому доводиться вивчати гамільтонові потоки на спряженому просторі петель $\tilde{\mathcal{G}}^* \simeq \tilde{\Lambda}^1(\mathbb{T}^n)$ мероморфних диференціальних форм на торі $\mathbb{T}^n$ та отримувати інтегровні бездисперсійні рівняння як умови сумісності для відповідних векторних полів, породжених інваріантами Казиміра на $\tilde{\mathcal{G}}^*$. Така процедура є складнішою, ніж стандартна, і в ній використано більше геометричних інструментів та властивостей структури коприєднаних орбіт для елементів, які породжують ієрархію інтегровних гамільтонових потоків. Зокрема, виникає потреба досліджувати редукційні властивості цієї ієрархії, які б гарантували існування нетривіальних інваріантів Казиміра на цих коприєднаних орбітах.

Застосування згаданих вище ідей до центральних розширень алгебр Лі дозволяє побудувати нові класи комутуючих гамільтонових потоків на розширеному спряженому просторі $\bar{\mathcal{G}}^* :=$ $:= \tilde{\mathcal{G}}^* \oplus \mathbb{C}$. Ці гамільтонові потоки породжуються елементами $(\tilde{a} \ltimes \tilde{l}; \alpha) \in \bar{\mathcal{G}}^*$ і побудованими інваріантами Казиміра на орбітах у $\tilde{\mathcal{G}}^*$.

У більшості випадків породжуючі елементи можна отримати як спеціально факторизовані диференціальні об'єкти, геометрична природа яких все ще є маловивченою. На основі Лі-алгебраїчного підходу встановлено, що відповідна умова комутування побудованих факторизованих гамільтонових потоків є умовою сумісності для системи трьох лінійних векторно-польових рівнянь типу Лакса – Сато. Як приклади, що демонструють ці математичні структури, ми отримаємо узагальнення бездисперсійних систем Михальова – Павлова та Мартінеса Алонсо – Шабата, для яких породжуючі елементи мають спеціальну факторизовану структуру, яка дозволяє розширити їх до багатовимірного випадку.

3. Група дифеоморфізмів $\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n)$ та асоційовані диференціально-геометричні структури. Розглянемо n-вимірний тор $\mathbb{T}^n$ і точки $X \in \mathbb{T}^n$ як змінні Лагранжа для конфігурації $\eta \in \mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n)$. Многовид $\mathbb{T}^n$, визначений як цільовий простір конфігурації $\eta \in \mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n)$, називається просторовим або конфігурацією Ейлера, а його точки називаються просторовими або точками Ейлера, які будемо позначати малими літерами $x \in \mathbb{T}^n$. Тоді будь-яка однопараметрична конфігурація $\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n)$ є залежною від часу $t \in \mathbb{R}$ сім'єю дифеоморфізмів [56 – 60], яка записується у вигляді

$$\mathbb{T}^n \ni x = \eta(X,t) := \eta_t(X) \in \mathbb{T}^n$$

для довільної початкової конфігурації $X \in \mathbb{T}^n$ і деяких відображень $\eta_t \in \mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n),\ t \in \mathbb{R}$.

З метою вивчення потоків на просторі лагранжевих конфігурацій $\eta \in \mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n)$ щодо часової змінної $t \in \mathbb{R}$, породжених групою дифеоморфізмів $\eta_t \in \mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n),\ t \in \mathbb{R}$, опишемо структуру дотичного $T_{\eta_t}(\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n))$ та кодотичного $T^*_{\eta_t}(\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n))$ просторів до групи дифеоморфізмів $\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n)$ у точках $\eta_t \in \mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n)$ для будь-яких $t \in \mathbb{R}$.

Опишемо спочатку дотичний простір $T_{\eta_t}(\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n))$ до многовиду групи дифеоморфізмів $\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n)$ у точці $\eta \in \mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n)$, використавши для цього конструкцію, розроблену раніше у роботах [56, 57, 61]. Зокрема, розглянемо лагранжеву конфігурацію $\eta \in \mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n)$ і визначимо дотичний простір $T_\eta(\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n))$ для $\eta \in \mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n)$ як набір векторів $\xi_\eta := d\eta_\tau/d\tau|_{\tau=0}$, де $\mathbb{R} \ni \tau \mapsto \eta_\tau \in \mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n),\ \eta_\tau|_{\tau=0} = \eta,$ — гладка крива на $\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n)$ і для довільної точки $X \in \mathbb{T}^n$ має місце рівність

$$\xi_\eta(X) = d\eta_\tau(X)/d\tau|_{\tau=0}.$$

Останнє співвідношення означає, що вектори $\xi_\eta(X) \in T_{\eta(X)}(\mathbb{T}^n),\ X \in \mathbb{T}^n$, задають векторне поле $\xi : \mathbb{T}^n \to T(\mathbb{T}^n)$ на $\mathbb{T}^n$ для будь-якої $\eta \in \mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n)$. Тобто дотичний простір $T_\eta(\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n))$ збігається з множиною векторних полів на $\mathbb{T}^n$:

$$T_\eta(\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n)) \simeq \{\xi_\eta \in \Gamma(T(\mathbb{T}^n)) : \xi_\eta(X) \in T_{\xi(X)}(\mathbb{T}^n)\}.$$

Аналогічно, кодотичний простір $T^*_\eta(\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n))$ утворюють усі лінійні функціонали на $\mathbb{T}^n$ над $\eta \in \mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n)$:

$$T^*_\eta(\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n)) = \{\alpha_\eta \in \Lambda^1(\mathbb{T}^n) \otimes \Lambda^3(\mathbb{T}^n) : \alpha_\eta(X) \in T^*_{\eta(X)}(\mathbb{T}^n) \otimes |\Lambda^3(\mathbb{T}^n)|\}$$

щодо звичайної невиродженої згортки $(\cdot|\cdot)_c$ на $T^*_\eta(\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n)) \times T_\eta(\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n))$: якщо $\alpha_\eta \in$ $\in T^*_\eta(\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n)),\ \xi_\eta \in T_\eta(\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n))$, де $\alpha_\eta|_X = \langle \alpha_\eta(X)|dx\rangle \otimes d^3X,\ \xi_\eta|_X = \langle \xi_\eta(X)|\partial/\partial x\rangle$, то

$$(\alpha_\eta|\xi_\eta)_c := \int\limits_{\mathbb{T}^n} \langle \alpha_\eta(X)|\xi_\eta(X)\rangle d^3X.$$

Ця конструкція дозволяє ототожнити кодотичне розшарування $T^*_\eta(\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n))$ для фіксованої лагранжевої конфігурації $\eta \in \mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n)$ з дотичним простором $T_\eta(\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n))$, оскільки дотичний простір $T(\mathbb{T}^n)$ наділено природною внутрішньою метрикою $\langle\cdot|\ \cdot\rangle$ у точці $\eta(X) \in \mathbb{T}^n$, яка дозволяє ототожнити простори $T(\mathbb{T}^n)$ та $T^*(\mathbb{T}^n)$ за допомогою відповідного метричного ізоморфізму $\sharp\colon T^*(\mathbb{T}^n) \to T(\mathbb{T}^n)$. Можна побудувати розширення цього ізоморфізму на $T^*_\eta(\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n))$ для $\eta \in \mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n)$ таким чином: для будь-яких елементів $\alpha_\eta, \beta_\eta \in T^*_\eta(\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n))$, $\alpha_\eta|_X = \langle\alpha_\eta(X)|dx\rangle \otimes d^3X$ і $\beta_\eta|_X = \langle\beta_\eta(X)|dx\rangle \otimes d^3X \in T^*_\eta(\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n))$ задамо метрику

$$(\alpha_\eta|\beta_\eta) := \int\limits_{\mathbb{T}^n} \langle \alpha^\sharp_\eta(X)|\beta^\sharp_\eta(X)\rangle d^3X,$$

де, за означенням, $\alpha^\sharp_\eta(X) := \sharp\langle\alpha_\eta(X)|dx\rangle$, $\beta^\sharp_\eta(X) := \sharp\langle\beta_\eta(X)|dx\rangle \in T_{\eta(X)}(\mathbb{T}^n)$ для будь-якого $X \in \mathbb{T}^n$.

За допомогою описаної вище конструкції можна побудувати гладкі функціонали на кодотичному розшаруванні $T^*(\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n))$, які є інваріантними щодо коприєднаної дії групи дифеоморфізмів $\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n)$. Крім того, кодотичне розшарування $T^*(\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n))$ *a priori* наділене канонічною симплектичною структурою [42, 43, 45, 56, 57, 60, 62 – 65], яка є еквівалентною до дужки гладких функціоналів на $T^*(\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n))$, що дозволяє вивчати відповідні гамільтонові потоки, їх приховані симетрії та інтегровність.

Далі будемо розглядати кодотичне розшарування $T^*(\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n))$ як гладкий многовид з канонічною симплектичною структурою [56, 62], яка є еквівалентною до канонічної дужки Пауссона на просторі гладких функціоналів, заданих на цьому многовиді.

Оскільки кодотичний простір $T^*_\eta(\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n))$ для $\eta \in \mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n)$, зміщений за допомогою $R_{\eta^{-1}}$-дії до простору $T^*_{Id}(\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n))$, $Id \in \mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n)$, є дифеоморфним до спряженого простору $\mathrm{Diff}^*(\mathbb{T}^n)$ алгебри Лі $\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n) \simeq \Gamma(T(\mathbb{T}^n))$ векторних полів на $\mathbb{T}^n$ (це показав С. Лі ще у 1887 р. (див., наприклад, [60, 66 – 68])), то ця канонічна дужка Пуассона на $T^*_\eta(\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n))$ перетворюється у класичну дужку Лі – Пуассона на спряженому просторі $\mathcal{G}^*$ [57, 60, 62, 64, 66, 67]. Крім того, орбіти групи дифеоморфізмів $\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n)$ на $T^*(\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n))$ відображаються у коприєднані орбіти на спряженому просторі $\mathcal{G}^*$, породжені відповідними елементами алгебри Лі $\mathcal{G}$. Наступна лема дозволяє побудувати цю дужку Лі – Пуассона.

Лема 3.1. *Алгебра Лі* $\mathrm{diff}(\mathbb{T}^n) \simeq \Gamma(T(\mathbb{T}^n))$ *задається комутаторним співвідношенням*

$$[a_1, a_2] = \langle a_1|\nabla\rangle a_2 - \langle a_2|\nabla\rangle a_1 \tag{3.1}$$

для будь-яких векторних полів $a_1, a_2 \in \Gamma(T(\mathbb{T}^n))$ *на многовиді* $\mathbb{T}^n$.

Доведення. Комутаційне співвідношення (3.1) випливає з означення групової операції множення

$$(\varphi_{1,t} \circ \varphi_{2,t})(X) = \varphi_{2,t}(\varphi_{1,t}(X))$$

для будь-яких групових дифеоморфізмів $\varphi_{1,t}, \varphi_{2,t} \in \mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n), t \in \mathbb{R}$, і $X \in \mathbb{T}^n$ при умові, що $a_j(X) := d\varphi_{j,t}(X)/dt|_{t=0}$ і $\varphi_{j,t}|_{t=0} = Id \in \mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n), j = \overline{1,2}$.

Щоб знайти дужку Пуассона на кодотичному просторі $T^*_\eta(\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n))$ для будь-якого $\eta \in \in \mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n)$, розглянемо кодотичний простір $T^*_\eta(\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n)) \simeq \mathrm{Diff}^*(\mathbb{T}^n)$, тобто спряжений простір до дотичного простору $T_\eta(\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n))$ лівоінваріантних векторних полів $\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n)$ для будь-якої $\eta \in \mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n)$, та канонічну симплектичну структуру на $T^*_\eta(\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n))$ у вигляді $\omega^{(2)}(\mu,\eta) := := \delta\alpha(\mu,\eta)$. При цьому *a priori* визначено канонічну форму Ліувілля $\alpha(\mu,\eta) := := (\mu|\delta\eta)_c \in \Lambda^1_{(\mu,\eta)}(T^*_\eta(\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n)))$ у точці $(\mu,\eta) \in T^*_\eta(\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n))$ на дотичному просторі $T_\eta(\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n)) \simeq \Gamma(T(M))$ правоінваріантних векторних полів на торі $\mathbb{T}^n$. Знайшовши відповідну дужку Пуассона для гладких функцій $(\mu|a)_c, (\mu|b)_c \in C^\infty(T^*_\eta(\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n));\mathbb{R})$ на $T^*_\eta(\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n)) \simeq \mathrm{Diff}^*(\mathbb{T}^n)$, $\eta \in \mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n)$, можна сформулювати таку теорему.

Теорема 3.1. *Дужка Лі – Пуассона на спряженому просторі* $T^*_\eta(\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n)) \simeq \mathrm{diff}^*(\mathbb{T}^n)$, $\eta \in M$, *задається виразом*

$$\{f,g\}(\mu) = (\mu|[\delta g(\mu)/\delta\mu, \delta f(\mu)/\delta\mu])_c \tag{3.2}$$

для будь-яких гладких функціоналів $f, g \in C^\infty(\mathcal{G}^*;\mathbb{R})$.

Доведення. Використовуючи означення [56, 62] дужки Пуассона для гладких функцій $(\mu|a)_c, (\mu|b)_c \in C^\infty(T^*_\eta(\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n));\mathbb{R})$ на симплектичному просторі $T^*_\eta(\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n))$, знаходимо

$$\begin{gathered}\{\mu(a),\mu(b)\} := \delta\alpha(X_a, X_b) = \\ = X_a(\alpha|X_b)_c - X_b(\alpha|X_a)_c - (\alpha|[X_a, X_b])_c,\end{gathered} \tag{3.3}$$

де $X_a := \delta(\mu|a)_c/\delta\mu = a \in \mathrm{diff}(\mathbb{T}^n)$, $X_b := \delta(\mu|b)_c/\delta\mu = b \in \mathrm{diff}(\mathbb{T}^n)$. Оскільки внаслідок правої інваріантності векторних полів $X_a, X_b \in T_\eta(\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n))$ $X_a(\alpha|X_b)_c = 0$ і $X_b(\alpha|X_a)_c = 0$, дужка Пуассона (3.3) перетворюється на

$$\begin{gathered}\{(\mu|a)_c, (\mu|b)_c\} = -(\alpha|[X_a, X_b])_c = \\ = (\mu|[b,a])_c = (\mu|[\delta(\mu|b)_c/\delta\mu, \delta(\mu|a)_c/\delta\mu])_c\end{gathered}$$

для всіх $(\mu,\eta) \in T^*_\eta(\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n)) \simeq \mathrm{Diff}^*(\mathbb{T}^n)$, $\eta \in \mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n)$, і будь-яких $a, b \in \mathrm{diff}(\mathbb{T}^n)$. Дужку Пуассона (3.3) легко узагальнити до

$$\{f,g\}(\mu) = (\mu|[\delta g(\mu)/\delta\mu, \delta f(\mu)/\delta\mu])_c$$

для будь-яких гладких функціоналів $f, g \in C^\infty(\mathcal{G}^*;\mathbb{R})$, що завершує доведення.

За допомогою дужки Лі – Пуассона (3.2) можна побудувати гамільтонові потоки на спряженому просторі $\mathrm{diff}^*(\mathbb{T}^n)$ у вигляді $\partial l/\partial t = -ad^*_{\mathrm{grad}\, h(l)} l$ для будь-якого елемента $l \in \mathrm{diff}^*(\mathbb{T}^n)$, $t \in \mathbb{R}$. Тут, за означенням, $\dfrac{d}{d\varepsilon} h(l+\varepsilon m)|_{\varepsilon=0} := (m|\,\mathrm{grad}\, h(l))_c$ для деякої гладкої гамільтонової функції $h \in C^\infty(\mathrm{Diff}^*(\mathbb{T}^n);\mathbb{R})$.

Якщо система має, крім функції Гамільтона, достатню кількість додаткових глобальних інваріантів, то можна сподіватись, що процедура редукування приведе до її цілком інтегровної диференціальної форми.

4. Векторні поля на торі та їхні Лі-алгебраїчні властивості. Розглянемо групу Лі $\tilde{G} := \widetilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{T}^n)$ петель, тобто [47] множину гладких відображень $\{\mathbb{C}^1 \supset \mathbb{S}^1 \longrightarrow G := \mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n)\}$, голоморфно продовжених, відповідно, з кола $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^1$ на множину $\mathbb{D}^1_+$ внутрішніх точок кола $\mathbb{S}^1$ і на множину $\mathbb{D}^1_-$ його зовнішніх точок $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}^1_+$. Відповідна алгебра Лі допускає розщеплення

$\tilde{\mathcal{G}} := \tilde{\mathcal{G}}_+ \oplus \tilde{\mathcal{G}}_-$, де $\tilde{\mathcal{G}}_+ := \widetilde{\operatorname{diff}}(\mathbb{T}^n)_+ \subset \Gamma(\mathbb{D}^1_+ \times \mathbb{T}^n; T(\mathbb{D}^1_+ \times \mathbb{T}^n))$ — підалгебра Лі, що складається з векторних полів на многовиді $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{T}^n$, відповідно голоморфно розширених на диск $\mathbb{D}^1_+$, $\tilde{\mathcal{G}}_- := \widetilde{\operatorname{diff}}(\mathbb{T}^n)_- \subset \Gamma(\mathbb{D}^1_- \times \mathbb{T}^n; T(\mathbb{D}^1_- \times \mathbb{T}^n))$ — підалгебра Лі, що містить векторні поля на многовиді $\mathbb{C} \times \mathbb{T}^n$, відповідно голоморфні на множині $\mathbb{D}^1_-$. Спряжений простір $\tilde{\mathcal{G}}^* := \tilde{\mathcal{G}}^*_+ \oplus \tilde{\mathcal{G}}^*_-$, де простір $\tilde{\mathcal{G}}^*_+ \subset \Gamma(\mathbb{D}^1_+ \times \mathbb{T}^n; T^*(\mathbb{D}^1_+ \times \mathbb{T}^n))$ містить диференціальні форми на многовиді $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{T}^n$, голоморфно продовжені на множину $\mathbb{C} \backslash \overline{\mathbb{D}}^1_+$, а спряжений простір $\tilde{\mathcal{G}}^*_- \subset \Gamma(\mathbb{D}^1_- \times \mathbb{T}^n; T^*(\mathbb{D}^1_- \times \mathbb{T}^n))$ містить диференціальні форми на многовиді $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{T}^n$, голоморфно продовжені на множину $\mathbb{D}^1_+$, так що простір $\tilde{\mathcal{G}}^*_+$ є дуальним до $\tilde{\mathcal{G}}_+$, а простір $\tilde{\mathcal{G}}^*_-$ — дуальним до $\tilde{\mathcal{G}}_-$ щодо такої конволюції на добутку $\tilde{\mathcal{G}}^* \times \tilde{\mathcal{G}}$:

$$(\tilde{l}|\tilde{a}) := \operatorname{res}_\lambda \int\limits_{\mathbb{T}^n} \langle l, a \rangle dx \tag{4.1}$$

для будь-якого векторного поля $\tilde{a} := \left\langle a(\mathrm{x}), \dfrac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \right\rangle \in \tilde{\mathcal{G}}$ і диференціальної форми $\tilde{l} := \langle l(\mathrm{x}), d\mathrm{x} \rangle \in \in \tilde{\mathcal{G}}^*$ на $\mathbb{C} \times \mathbb{T}^n$, залежної від координати $\mathrm{x} := (\lambda; x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{T}^n$. Тут $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — звичайний скалярний добуток на евклідовому просторі $\mathbb{E}^{n+1}$ і $\dfrac{\partial}{\partial \mathrm{x}} := \left(\dfrac{\partial}{\partial \lambda}, \dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n} \right)^\top$ — звичайний вектор градієнта. Розщеплення алгебри Лі $\tilde{\mathcal{G}}$ на пряму суму

$$\tilde{\mathcal{G}} = \tilde{\mathcal{G}}_+ \oplus \tilde{\mathcal{G}}_-, \tag{4.2}$$

приводить, відповідно, до розбиття на пряму суму $\tilde{\mathcal{G}}^* = \tilde{\mathcal{G}}^*_+ \oplus \tilde{\mathcal{G}}^*_-$ щодо конволюції (4.1). Якщо визначити множину гладких інваріантних функціоналів Казиміра $h\colon \tilde{\mathcal{G}}^* \to \mathbb{R}$ на спряженому просторі $\tilde{\mathcal{G}}^*$ за допомогою дії коспряженої алгебри Лі $\tilde{\mathcal{G}}$

$$ad^*_{\nabla h(\tilde{l})} \tilde{l} = 0 \tag{4.3}$$

на генеруючий (так званий „seed”) елемент $\tilde{l} \in \tilde{\mathcal{G}}^*$, то можна в явний спосіб сконструювати широкий клас багатовимірних цілком інтегровних бездисперсійних (так званих „небесних”) комутуючих між собою нелінійних гамільтонових систем за допомогою класичної [26 – 28, 30] схеми Адлера – Костанта – Саймза:

$$d\tilde{l}/dt := -ad^*_{\nabla h_+(\tilde{l})} \tilde{l} \tag{4.4}$$

для всіх $h \in \mathrm{I}(\tilde{\mathcal{G}}^*)$, $\nabla h(\tilde{l}) := \nabla h_+(\tilde{l}) \oplus \nabla h_-(\tilde{l}) \in \tilde{\mathcal{G}}_+ \oplus \tilde{\mathcal{G}}_-$ на відповідному функціональному многовиді. І навіть більше, комутуючі потоки (4.4) можна представити як сумісні системи векторно-польових рівнянь типу Лакса – Сато [30] на функціональному многовиді породжуючого елемента $C^2(\mathbb{C} \times \mathbb{T}^n; \mathbb{C})$, які генерують повну множину перших інтегралів на ньому.

5. Лі-алгебраїчні структури та інтегровні системи Гамільтона. Розглянемо визначену вище алгебру Лі петель $\tilde{\mathcal{G}}$. Елементи цієї алгебри можна записати як

$$a(x;\lambda) := \left\langle a(x;\lambda), \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \right\rangle = \sum_{j=1}^n a_j(x;\lambda) \frac{\partial}{\partial x_j} + a_0(x;\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} \in \tilde{\mathcal{G}}$$

для деяких голоморфних по $\lambda \in \mathbb{D}^1_\pm$ векторів $a(x;\lambda) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}^n$ для всіх $x \in \mathbb{T}^n$, де $\dfrac{\partial}{\partial \mathrm{x}} :=$ $:= \left(\dfrac{\partial}{\partial \lambda}, \dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)^\top$ — узагальнений вектор градієнта щодо змінної $\mathrm{x} := (\lambda, x) \in$ $\in \mathbb{C} \times \mathbb{T}^n$. Алгебра Лі $\tilde{\mathcal{G}}$ як пряма сума підалгебр (4.2) дозволяє ввести класичну $\mathcal{R}$-структуру

$$[\tilde{a}, \tilde{b}]_{\mathcal{R}} := [\mathcal{R}\tilde{a}, \tilde{b}] + [\tilde{a}, \mathcal{R}\tilde{b}]$$

для будь-яких $\tilde{a}, \tilde{b} \in \tilde{\mathcal{G}}$, де $\mathcal{R} := (P_+ - P_-)/2$ і $P_\pm \tilde{\mathcal{G}} := \tilde{\mathcal{G}}_\pm \subset \tilde{\mathcal{G}}$.

Простір $\tilde{\mathcal{G}}^* \simeq \tilde{\Lambda}^1(\mathbb{C} \times \mathbb{T}^n)$, спряжений до алгебри $\tilde{\mathcal{G}}$ відповідно голоморфних векторних полів на $\mathbb{C} \times \mathbb{T}^n$, є функціонально ототожненим із $\tilde{\mathcal{G}}$ щодо метрики (4.1). Тепер для довільних $f, g \in \mathrm{D}(\tilde{\mathcal{G}}^*)$ можна визначити дві дужки Лі – Пуассона

$$\{f, g\} := (\tilde{l}, [\nabla f(\tilde{l}), \nabla g(\tilde{l})])$$

і

$$\{f, g\}_{\mathcal{R}} := (\tilde{l}, [\nabla f(\tilde{l}), \nabla g(\tilde{l})]_{\mathcal{R}}), \tag{5.1}$$

де для будь-якого „seed”-елемента $\bar{l} \in \tilde{\mathcal{G}}^*$ градієнтний вектор $\nabla f(\tilde{l})$ і $\nabla g(\tilde{l}) \in \tilde{\mathcal{G}}$ обчислюється щодо метрики (4.1).

Припустимо, що гладка функція $\gamma \in \mathrm{I}(\tilde{\mathcal{G}}^*)$ є інваріантом Казиміра, тобто

$$ad^*_{\nabla\gamma(\tilde{l})}\tilde{l} = 0 \tag{5.2}$$

для вибраного „seed”-елемента $\tilde{l} \in \tilde{\mathcal{G}}^*$. Коприєднане відображення $ad^*_{\nabla f(\tilde{l})} : \tilde{\mathcal{G}}^* \to \tilde{\mathcal{G}}^*$ для будь-яких $f \in \mathrm{D}(\tilde{\mathcal{G}}^*)$ можна записати як

$$ad^*_{\nabla f(\tilde{l})}(\tilde{l}) = \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}, \circ \nabla f(l) \right\rangle \bar{l} + \sum_{j=1}^{n} \left\langle \left\langle l,\ \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\ \nabla f(l)\ \right\rangle, d\mathrm{x} \right\rangle,$$

де, за визначенням, $\nabla f(\tilde{l}) := \left\langle \nabla f(l), \dfrac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \right\rangle$. Тоді для функції Казиміра $\gamma \in \mathrm{D}(\tilde{\mathcal{G}}^*)$ умова (5.2) стає еквівалентною рівнянню

$$l \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}, \nabla\gamma(l) \right\rangle + \left\langle \nabla\gamma(l), \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \right\rangle l + \left\langle l, \left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \nabla\gamma(l) \right) \right\rangle = 0, \tag{5.3}$$

яке потрібно розв’язати у випадку застосувань аналітично. У випадку, коли елемент $\tilde{l} \in \tilde{\mathcal{G}}^*$ є сингулярним при $|\lambda| \to \infty$, можна розглянути загальний асимптотичний розклад

$$\nabla\gamma := \nabla\gamma^{(p)} \sim \lambda^p \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \nabla\gamma_j^{(p)} \lambda^{-j} \tag{5.4}$$

для відповідно вибраного $p \in \mathbb{Z}_+$, підставити (5.4) у рівняння (5.3) і розв’язати його рекурентно.

Нехай $h^{(y)}, h^{(t)} \in \mathrm{I}(\tilde{\mathcal{G}}^*)$ буде функцією Казиміра, для якої генератори гамільтонового векторного поля

$$\nabla h_+^{(y)}(l) := (\nabla \gamma^{(p_y)}(l))|_+, \quad \nabla h_+^{(t)}(l) := (\nabla h^{(p_t)}(l))|_+ \tag{5.5}$$

відповідно визначені для певних цілих величин $p_y, p_t \in \mathbb{Z}_+$. Ці два інваріанти породжують такі комутуючі гамільтонові потоки:

$$\partial l/\partial t = -\left\langle \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}, \circ \nabla h_+^{(t)}(l) \right\rangle l - \left\langle l, \left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \nabla h_+^{(t)}(l) \right) \right\rangle \tag{5.6}$$

і

$$\partial l/\partial y = -\left\langle \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}, \circ \nabla h_+^{(y)}(l) \right\rangle l - \left\langle l, \left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \nabla h_+^{(y)}(l) \right) \right\rangle \tag{5.7}$$

щодо дужки Лі – Пуассона (5.1), де $y, t \in \mathbb{R}$ — відповідні еволюційні параметри. Оскільки інваріанти $h^{(y)}, h^{(t)} \in \mathrm{I}(\tilde{\mathcal{G}}^*)$ комутують щодо дужки (5.1), то потоки (5.6), (5.7) також комутують, завдяки чому відповідні генератори гамільтонових векторних полів

$$\nabla h_+^{(t)}(\tilde{l}) := \left\langle \nabla h_+^{(t)}(l), \frac{\partial}{\partial \, \mathrm{x}} \right\rangle, \quad \nabla h_+^{(y)}(\tilde{l}) := \left\langle \nabla h_+^{(y)}(l), \frac{\partial}{\partial \, \mathrm{x}} \right\rangle \tag{5.8}$$

задовольняють умову сумісності Лакса

$$\frac{\partial}{\partial y} \nabla h_+^{(t)}(\tilde{l}) - \frac{\partial}{\partial t} \nabla h_+^{(y)}(\tilde{l}) = [\nabla h_+^{(t)}(\tilde{l}), \nabla h_+^{(y)}(\tilde{l})] \tag{5.9}$$

для всіх $y, t \in \mathbb{R}$. З іншого боку, умова (5.9) еквівалентна умові сумісності двох лінійних рівнянь

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nabla h_+^{(t)}(\tilde{l}) \right) \psi = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial y} + \nabla h_+^{(y)}(\tilde{l}) \right) \psi = 0 \tag{5.10}$$

для функції $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C} \times \mathbb{T}^n; \mathbb{C})$ для всіх $y, t \in \mathbb{R}$ і будь-яких $\lambda \in \mathbb{C}$. Наведені вище міркування можна сформулювати як основне технічне твердження.

Твердження 5.1. *Нехай „seed"-елемент $\tilde{l} \in \tilde{\mathcal{G}}^*$ і $h^{(y)}, h^{(t)} \in \mathrm{I}(\tilde{\mathcal{G}}^*)$ є функціями Казиміра щодо метрики $(\cdot|\cdot)$ на петельній алгебрі Лі $\tilde{\mathcal{G}}$ і природної коприєднаної дії на петельній коалгебрі $\tilde{\mathcal{G}}^*$. Тоді динамічні системи*

$$\partial \tilde{l}/\partial y = -ad^*_{\nabla h_+^{(y)}(\tilde{l})} \tilde{l}, \quad \partial \tilde{l}/\partial t = -ad^*_{\nabla h_+^{(t)}(\tilde{l})} \tilde{l}$$

є комутуючими векторними гамільтоновими полями для всіх $\lambda \in \mathbb{C}$ та $y, t \in \mathbb{R}$. І навіть більше, умова сумісності цих потоків еквівалентна зображенням (5.10), *де $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C} \times \mathbb{T}^n; \mathbb{C})$ і векторні поля $\nabla h_+^{(t)}(\tilde{l})$ та $\nabla h_+^{(y)}(\tilde{l}) \in \tilde{\mathcal{G}}$ задано виразами* (5.8) *і* (5.5).

***Зауваження* 5.1.** Як було вже згадано, розклад (5.4) буде ефективним, якщо вибраний породжуючий елемент $\tilde{l} \in \tilde{\mathcal{G}}^*$ сингулярний при $|\lambda| \to \infty$. У випадку, коли він сингулярний при $|\lambda| \to 0$, вираз (5.4) набере вигляду

$$\nabla \gamma^{(p)}(l) \sim \lambda^{-p} \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \nabla \gamma_j^{(p)}(l) \lambda^j$$

для відповідно вибраних цілих величин $p \in \mathbb{Z}_+$ і редукованих градієнтів функції Казиміра, які задані генераторами гамільтонових векторних полів

$$\nabla h_-^{(y)}(l) := \lambda(\lambda^{-p_y-1}\nabla\gamma^{(p_y)}(l))_-,$$
$$\nabla h_-^{(t)}(l) := \lambda(\lambda^{-p_t-1}\nabla\gamma^{(p_t)}(l))_-$$

для відповідно вибраних додатних цілих $p_y, p_t \in \mathbb{Z}_+$, а відповідні потоки Гамільтона записуються як $\partial\tilde{l}/\partial t = ad^*_{\nabla h_-^{(t)}(\tilde{l})}\tilde{l}$, $\partial\tilde{l}/\partial y = ad^*_{\nabla h_-^{(y)}(\tilde{l})}\tilde{l}$.

6. Інтегровні багатовимірні „небесні” системи типу Лакса – Сато та асоційовані рівняння конформних структур. ***6.1. Рівняння для метрик Ейнштейна – Вейля.*** Визначимо $\tilde{\mathcal{G}}^* = \widetilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{T}^1)^*$ і візьмемо „seed”-елемент

$$\tilde{l} = (u_x\lambda - 2u_xv_x - u_y)dx + \big(\lambda^2 - v_x\lambda + v_y + v_x^2\big)d\lambda,$$

який генерує щодо метрики (4.1) градієнт інваріантів Казиміра $h^{(p_t)}, h^{(p_y)} \in \mathrm{I}(\tilde{\mathcal{G}}^*)$ у вигляді

$$\nabla h^{(p_t)}(l) \sim \lambda^2(0,1)^\top + (-u_x, v_x)^\top\lambda + (u_y, u - v_y)^\top + O(\lambda^{-1}),$$
$$\nabla h^{(p_y)}(l) \sim \lambda(0,1)^\top + (-u_x, v_x)^\top + (u_y, -v_y)^\top\lambda^{-1} + O(\lambda^{-2})$$

при $|\lambda| \to \infty$ для $p_t = 2$, $p_y = 1$. Для градієнтів функцій Казиміра $h^{(t)}, h^{(y)} \in \mathrm{I}(\tilde{\mathcal{G}}^*)$, визначених рівнянням (5.5), можна отримати відповідні генератори гамільтонових векторних полів (5.8) і (5.5) на коалгебрі $\tilde{\mathcal{G}}^*$ у вигляді

$$\begin{gathered} A_{\nabla h_+^{(t)}} = \left\langle \nabla h_+^{(t)}(l), \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \right\rangle = (\lambda^2 + \lambda v_x + u - v_y)\frac{\partial}{\partial x} + (-\lambda u_x + u_y)\frac{\partial}{\partial\lambda}, \\ A_{\nabla h_+^{(y)}} = \left\langle \nabla h_+^{(y)}(l), \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \right\rangle = (\lambda + v_x)\frac{\partial}{\partial x} - u_x\frac{\partial}{\partial\lambda}, \end{gathered} \tag{6.1}$$

які задовольняють умову сумісності (5.9), еквівалентну інтегровним рівнянням Ейнштейна – Вейля [36]

$$\begin{gathered} u_{xt} + u_{yy} + (uu_x)_x + v_xu_{xy} - v_yu_{xx} = 0, \\ v_{xt} + v_{yy} + uv_{xx} + v_xv_{xy} - v_yv_{xx} = 0. \end{gathered} \tag{6.2}$$

Відомо [33], що інваріантна редукція (6.2) при $v = 0$ приводить до відомого бездисперсійного рівняння Кадомцева – Петвіашвілі

$$(u_t + uu_x)_x + u_{yy} = 0, \tag{6.3}$$

для якого редуковане зображення (5.10) випливає з (6.1) і подане у вигляді векторних полів

$$\begin{gathered} A_{\nabla h_+^{(t)}} = (\lambda^2 + u)\frac{\partial}{\partial x} + (-\lambda u_x + u_y)\frac{\partial}{\partial\lambda}, \\ A_{\nabla h_+^{(y)}} = \lambda\frac{\partial}{\partial x} - u_x\frac{\partial}{\partial\lambda}, \end{gathered} \tag{6.4}$$

які задовольняють умову сумісності (5.9), еквівалентну рівнянню (6.3). Як частковий результат з (5.10) і (6.4) знаходимо, що умова сумісності векторних полів

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+(\lambda^2+u)\frac{\partial\psi}{\partial x}+(-\lambda u_x+u_y)\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}=0$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial y}+\lambda\frac{\partial\psi}{\partial x}-u_x\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}=0$$

задовольняється для $\psi\in C^2(\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}\times\mathbb{T}^n;\mathbb{C})$ і будь-яких $y,t\in\mathbb{R},(x,\lambda)\in\mathbb{T}^1_{\mathbb{C}}$.

6.2. Модифіковані рівняння метрик Ейнштейна – Вейля. Ці рівняння виведені в [20] і мають вигляд

$$u_{xt}=u_{yy}+u_xu_y+u_x^2w_x+uu_{xy}+u_{xy}w_x+u_{xx}a,$$
$$w_{xt}=uw_{xy}+u_yw_x+w_xw_{xy}+aw_{xx}-a_y,$$

де $a_x:=u_xw_x-w_{xy}$. У цьому випадку візьмемо $\tilde{\mathcal{G}}^*=\widetilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{C}\times\mathbb{T}^n)$ і виберемо „seed”-елемент $\tilde{l}\in\tilde{\mathcal{G}}$ у вигляді

$$\tilde{l}=[\lambda^2u_x+(2u_xw_x+u_y+3uu_x)\lambda+2u_x\partial_x^{-1}u_xw_x+2u_x\partial_x^{-1}u_y+$$
$$+3u_x{w_x}^2+2u_yw_x+6uu_xw_x+2uu_y+3u^2u_x-2au_x]dx+$$
$$+[\lambda^2+(w_x+3u)\lambda+2\partial_x^{-1}\,u_xw_x+2\partial_x^{-1}u_y+{w_x}^2+3uw_x+3u^2-a]d\lambda.$$

Він генерує два інваріанти Казиміра щодо метрики (4.1) $\gamma^{(j)}\in\mathrm{I}(\tilde{\mathcal{G}}^*),\ j=\overline{1,2}$, градієнти яких

$$\nabla\gamma^{(2)}(l)\sim\lambda^2[(u_x,-1)^\top+(uu_x+u_y,-u+w_x)^\top\lambda^{-1}+$$
$$+(0,uw_x-a)^\top\lambda^{-2}]+O(\lambda^{-1}),$$
$$\nabla\gamma^{(1)}(l)\sim\lambda[(u_x,-1)^\top+(0,w_x)^\top\,\lambda^{-1}]+O(\lambda^{-1})$$

при $|\lambda|\to\infty$ для $p_y=1,p_t=2$. Відповідні градієнти функцій Казиміра $h^{(t)},h^{(y)}\in\mathrm{I}(\mathcal{G}^*)$, визначені (5.5), генерують гамільтонові векторні поля

$$\nabla h_+^{(y)}:=\nabla\gamma^{(1)}(l)|_+=(u_x\lambda,-\lambda+w_x)^\top,$$
$$\nabla h_+^{(t)}=\nabla\gamma^{(2)}(l)|_+=(u_x\lambda^2+(uu_x+u_y)\lambda,-\lambda^2+(w_x-u)\lambda+uw_x-a)^\top. \tag{6.5}$$

З (6.5) отримуємо узгоджену систему лінійних рівнянь Лакса

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}+(-\lambda+w_x)\frac{\partial\psi}{\partial x}+u_x\lambda\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}=0,$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\ (-\lambda^2+(\ w_x-u)\lambda+uw_x-a)\frac{\partial\psi}{\partial x}+(u_x\lambda^2+(uu_x+u_y)\lambda)\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}=0,$$

яка задовольняється для $\psi\in C^2(\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}\times\mathbb{T}^n;\mathbb{C})$ і будь-яких $y,t\in\mathbb{R},\ (\lambda,x)\in\mathbb{C}\times\mathbb{T}^n$.

6.3. Система „небесних" рівнянь Дунайського. Ці рівняння, запропоновані у [35], узагальнюють відповідне антисамодуальне рівняння вакууму Ейнштейна, яке має зв'язок з метрикою Плєбанського і відомим другим „небесним" рівнянням Плєбанського [8, 32]. Щоб вивчити інтегровність рівнянь Дунайського

$$\begin{aligned} &u_{x_1 t} + u_{y x_2} + u_{x_1 x_1} u_{x_2 x_2} - u_{x_1 x_2}^2 - v = 0, \\ &v_{x_1 t} + v_{x_2 y} + u_{x_1 x_1} v_{x_2 x_2} - 2u_{x_1 x_2} v_{x_1 x_2} = 0, \end{aligned} \tag{6.6}$$

де $(u, v) \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2)$, $(y, t; x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2$, визначимо $\tilde{\mathcal{G}}^* = \widetilde{\operatorname{diff}}(\mathbb{C} \times \mathbb{T}^2)^*$ і візьмемо в якості „seed"-елемента $\tilde{l} \in \tilde{\mathcal{G}}^*$

$$\tilde{l} = (\lambda + v_{x_1} - u_{x_1 x_1} + u_{x_1 x_2}) dx_1 + (\lambda + v_{x_2} + u_{x_2 x_2} - u_{x_1 x_2}) dx_2 + (\lambda - x_1 - x_2) d\lambda.$$

Щодо метрики (4.1) градієнти двох функціонально незалежних інваріантів Казиміра $h^{(p_y)}$, $h^{(p_y)} \in \mathrm{I}(\tilde{\mathcal{G}}^*)$ при $|\lambda| \to \infty$ можна знайти в асимптотичній формі

$$\begin{aligned} \nabla h^{(p_y)}(l) &\sim \lambda(1, 0, 0)^\top + (-u_{x_1 x_2}, u_{x_1 x_1}, -v_{x_1})^\top + O(\lambda^{-1}), \\ \nabla h^{(p_t)}(l) &\sim \lambda(0, -1, 0)^\top + (u_{x_2 x_2}, -u_{x_1 x_2}, v_{x_2})^\top + O(\lambda^{-1}) \end{aligned} \tag{6.7}$$

для $p_t = 1 = p_y$. Обчислюючи генератори гамільтонових векторних полів

$$\begin{aligned} \nabla h_+^{(y)} &:= \nabla h^{(p_y)}(l)|_+ = (\lambda - u_{x_1 x_2}, u_{x_1 x_1}, -v_{x_1})^\top, \\ \nabla h_+^{(t)} &:= \nabla h^{(p_t)}(l)|_+ = (u_{x_2 x_2}, -\lambda - u_{x_1 x_2}, v_{x_2})^\top, \end{aligned}$$

які випливають з градієнтів функцій Казиміра (6.7), отримуємо векторні поля

$$\begin{aligned} A_{\nabla h_+^{(t)}} &= \left\langle \nabla h_+^{(t)}, \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \right\rangle = u_{x_2 x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} - (\lambda + u_{x_1 x_2}) \frac{\partial}{\partial x_2} + v_{x_2} \frac{\partial}{\partial \lambda}, \\ A_{\nabla h_+^{(y)}} &= \left\langle \nabla h_+^{(y)}, \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \right\rangle = (\lambda - u_{x_1 x_2}) \frac{\partial}{\partial x_1} + u_{x_1 x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} - v_{x_1} \frac{\partial}{\partial \lambda}. \end{aligned}$$

Векторні поля (6.8) задовольняють умову сумісності Лакса (5.9), яка еквівалентна узгодженим співвідношенням для векторних полів

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \psi}{\partial t} + u_{x_2 x_2} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} - (\lambda + u_{x_1 x_2}) \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + v_{x_2} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = 0, \\ &\frac{\partial \psi}{\partial y} + (\lambda - u_{x_1 x_2}) \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + u_{x_1 x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} - v_{x_1} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = 0, \end{aligned} \tag{6.8}$$

що задовольняються для $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C} \times \mathbb{T}^2; \mathbb{C})$, будь-яких $(y, t) \in \mathbb{R}^2$ і всіх $(\lambda; x_1, x_2) \in \in \mathbb{C} \times \mathbb{T}^2$. Як зазначено в [34], рівняння Дунайського (6.6) узагальнюють обидва бездисперсійні рівняння Кадомцева – Петвіашвілі і друге рівняння Плєбанського також є інтегровною за Лаксом системою Гамільтона.

***6.4. Перше генеруюче рівняння конформної структури*: $\boldsymbol{u_{yt} + u_{xt}u_y - u_t u_{xy} = 0}$.** „Seed"-елемент $\tilde{l} \in \tilde{\mathcal{G}}^* = \widetilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{T}^1_{\mathbb{C}})^*$ у вигляді

$$\tilde{l} = [u_t^{-2}(1-\lambda)\lambda^{-1} + u_y^{-2}\lambda(\lambda-1)^{-1}]dx,$$

де $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^1; \mathbb{R}),\ x \in \mathbb{T}^1,\ \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ і d позначає повний диференціал, генерує два незалежні функціонали Казиміра $\gamma^{(1)}$ і $\gamma^{(2)} \in \mathrm{I}(\tilde{\mathcal{G}}^*)$, градієнти яких мають такі асимптотичні розклади:

$$\nabla\gamma^{(1)}(l) \sim u_y + O(\mu^2)$$

при $|\mu| \to 0,\ \mu := \lambda - 1$ і

$$\nabla\gamma^{(2)}(l) \sim u_t + O(\lambda^2)$$

при $|\lambda| \to 0$. Умова комутативності

$$[X^{(y)}, X^{(t)}] = 0 \tag{6.9}$$

векторних полів

$$X^{(y)} := \partial/\partial y + \nabla h^{(y)}(\tilde{l}), \quad X^{(t)} := \partial/\partial t + \nabla h^{(t)}(\tilde{l}), \tag{6.10}$$

де

$$\nabla h^{(y)}(\tilde{l}) := -(\mu^{-1}\nabla\gamma^{(1)}(\tilde{l}))|_- = -\frac{u_y}{\lambda-1}\frac{\partial}{\partial x},$$
$$\nabla h^{(t)}(\tilde{l}) := -(\lambda^{-1}\nabla\gamma^{(2)}(\tilde{l}))|_- = -\frac{u_t}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x},$$

приводить до „небесних" рівнянь

$$u_{yt} + u_{xt}u_y - u_{xy}u_t = 0.$$

Їхнє зображення Лакса – Сато є умовою сумісності для диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{u_y}{\lambda-1}\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{u_t}{\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0,$$

де $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^1_{\mathbb{C}}; \mathbb{C})$.

***6.5. Друге генеруюче рівняння конформної структури*: $\boldsymbol{u_{xt} + u_x u_{yy} - u_y u_{xy} = 0}$.** Для „seed"-елемента $\tilde{l} \in \tilde{\mathcal{G}}^* = \widetilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{C} \times \mathbb{T}^1)^*$ у формі

$$\tilde{l} = [u_x^2 + 2u_x^2(u_y + \alpha)\lambda^{-1} + u_x^2(3u_y^2 + 4\alpha u_y + \beta)\lambda^{-2}]dx,$$

де $u \in C^2(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R}),\ x \in \mathbb{T}^1,\ \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ і $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, існує один незалежний функціонал Казиміра $\gamma^{(1)} \in \mathrm{I}(\tilde{\mathcal{G}}^*)$ з таким асимптотичним розкладом при $|\lambda| \to 0$ його функціонального градієнта:

$$\nabla\gamma^{(1)}(l) \sim c_0 u_x^{-1} + (-c_0 u_y + c_1) u_x^{-1}\lambda + (-c_1 u_y + c_2) u_x^{-1}\lambda^2 + O(\lambda^3),$$

де $c_r \in \mathbb{R}$, $r = \overline{1,2}$. Якщо припустити, що $c_0 = 1$, $c_1 = 0$ і $c_2 = 0$, отримаємо два функціонально незалежні градієнтні елементи

$$\nabla h^{(y)}(\tilde{l}) := -(\lambda^{-1}\nabla\gamma^{(1)}(\tilde{l}))|_- = -\frac{1}{\lambda u_x}\frac{\partial}{\partial x},$$
$$\nabla h^{(t)}(\tilde{l}) := (\lambda^{-2}\nabla\gamma^{(1)}(\tilde{l}))|_- = \left(\frac{1}{\lambda^2 u_x} - \frac{u_y}{\lambda u_x}\right)\frac{\partial}{\partial x}.$$

Відповідна умова комутативності (6.9) векторних полів (6.10) приводить до „небесних” рівнянь

$$u_{xt} + u_x u_{yy} - u_y u_{xy} = 0,$$

лінеаризоване зображення Лакса – Сато яких задане системою рівнянь першого порядку

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{1}{\lambda u_x}\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \left(\frac{1}{\lambda^2 u_x} - \frac{u_y}{\lambda u_x}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0$$

на лінійні векторні поля з функцією $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C} \times \mathbb{T}^1; \mathbb{C})$.

6.6. Інверсне перше редуковане „небесне” рівняння Шабата. „Seed”-елемент $\tilde{l} \in \tilde{\mathcal{G}}^* = \widetilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{T}^1_{\mathbb{C}})^*$ у вигляді

$$\tilde{l} = (a_0 u_y^{-2} u_x^2 (\lambda + 1)^{-1} + a_1 u_x^2 + a_1 u_x^2 \lambda) dx,$$

де $u \in C^2(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, $x \in \mathbb{T}^1$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, і $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, генерує два незалежні функціонали Казиміра $\gamma^{(1)}$ і $\gamma^{(2)} \in \mathrm{I}(\tilde{\mathcal{G}}^*)$, градієнти яких мають такий асимптотичний розклад:

$$\nabla\gamma^{(1)}(l) \sim u_y u_x^{-1} - u_y u_x^{-1}\mu + O(\mu^2)$$

при $|\mu| \to 0$, $\mu := \lambda + 1$ і

$$\nabla\gamma^{(2)}(l) \sim u_x^{-1} + O(\lambda^{-2})$$

при $|\lambda| \to \infty$. Якщо покласти

$$\nabla h^{(y)}(\tilde{l}) := (\mu^{-1}\nabla\gamma^{(1)}(\tilde{l}))|_- = -\frac{\lambda}{\lambda+1}\frac{u_y}{u_x}\frac{\partial}{\partial x},$$
$$\nabla h^{(t)}(\tilde{l}) := (\lambda\nabla\gamma^{(2)}(\tilde{l}))|_+ = \frac{\lambda}{u_x}\frac{\partial}{\partial x},$$

то умова комутативності (6.9) векторних полів (6.10) приводить до „небесного” рівняння

$$u_{xy} + u_y u_{tx} - u_{ty} u_x = 0,$$

яке можна отримати в результаті одночасної заміни незалежних змінних $\mathbb{R} \ni x \to t \in \mathbb{R}$,

$\mathbb{R} \ni y \to \in \mathbb{R}$ і $\mathbb{R} \ni t \to y \in \mathbb{R}$ у першому редукованому „небесному” рівнянні Шабата. Відповідне зображення Лакса – Сато задано умовою сумісності для рівнянь першого порядку на векторні поля

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\lambda}{\lambda+1}\frac{u_y}{u_x}\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\lambda}{u_x}\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0,$$

де $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C} \times \mathbb{T}^n; \mathbb{C})$.

6.7. Перше рівняння Плєбанського та його узагальнення. „Seed”-елемент $\tilde{l} \in \tilde{\mathcal{G}}^* = \widetilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{C} \times \mathbb{T}^2)^*$ у вигляді

$$\tilde{l} = \lambda^{-1}(u_{yx_1}dx_1 + u_{yx_2}dx_2) + (u_{tx_1}dx_1 + u_{tx_2}dx_2) = \lambda^{-1}du_y + du_t, \qquad (6.11)$$

де $u \in C^2(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{T}^2$, $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ і d позначає повний диференціал, генерує два незалежні функціонали Казиміра $\gamma^{(1)}$ і $\gamma^{(2)} \in \mathrm{I}(\tilde{\mathcal{G}}^*)$, градієнти яких мають такий асимптотичний розклад:

$$\begin{gathered}\nabla\gamma^{(1)}(l) \sim (-u_{yx_2}, u_{yx_1},)^\top + O(\lambda),\\ \nabla\gamma^{(2)}(l) \sim (-u_{tx_2}, u_{tx_1})^\top + O(\lambda)\end{gathered} \qquad (6.12)$$

при $|\lambda| \to 0$. Умова комутативності (6.9) векторних полів (6.10), де

$$\nabla h^{(y)}(\tilde{l}) := (\lambda^{-1}\nabla\gamma^{(1)}(\tilde{l}))\big|_- = -\frac{u_{yx_2}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{u_{yx_1}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_2},$$
$$\nabla h^{(t)}(\tilde{l}) := (\lambda^{-1}\nabla\gamma^{(2)}(\tilde{l}))\big|_- = -\frac{u_{tx_2}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{u_{tx_1}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_2},$$

приводить до першого рівняння Плєбанського [5]

$$u_{yx_1}u_{tx_2} - u_{yx_2}u_{tx_1} = 1.$$

Його зображення Лакса – Сато приводить до умови сумісності диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{u_{yx_2}}{\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \frac{u_{yx_1}}{\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial x_2} = 0,$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{u_{tx_2}}{\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \frac{u_{tx_1}}{\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial x_2} = 0,$$

де $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C} \times \mathbb{T}^2; \mathbb{C})$.

Взявши до уваги той факт, що визначальна умова для інваріантів Казиміра симетрична й еквівалентна системі неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь першого порядку на ковекторну функцію $l = (l_1, l_2)^\top$, відповідний „seed”-елемент можна також вибрати в іншому вигляді. І навіть більше, форма (6.11) інваріантна щодо просторової розмірності тора $\mathbb{T}^n$, що дає можливість описати відповідні узагальнені конформні метричні рівняння довільної розмірності.

Зокрема, легко зауважити, що асимптотичні розклади (6.12) мають також місце для таких інваріантних „seed"-елементів: $\tilde{l} = \lambda^{-1} du_y + du_t$. Описану вище Лі-алгебраїчну схему можна узагальнити на будь-яку розмірність $n = 2k$, де $k \in \mathbb{N}$, і $n \geq 2$. В цьому випадку маємо $2k$ незалежних функціоналів Казиміра $\gamma^{(j)} \in \mathrm{I}(\tilde{\mathcal{G}}^*)$, де $\tilde{\mathcal{G}}^* = \widetilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{T}^{2k})^*$, $j = \overline{1, 2k}$, з такими асимптотичними розкладами їхніх градієнтів:

$$\nabla\gamma^{(1)}(l) \sim \Big(-u_{yx_2}, u_{yx_1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{2k-2}\Big)^\top + O(\lambda),$$

$$\nabla\gamma^{(2)}(l) \sim \Big(-u_{tx_2}, u_{tx_1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{2k-2}\Big)^\top + O(\lambda),$$

$$\nabla\gamma^{(3)}(l) \sim \Big(0, 0, -u_{yx_4}, u_{yx_3}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{2k-4}\Big)^\top + O(\lambda),$$

$$\nabla\gamma^{(4)}(l) \sim \Big(0, 0, -u_{tx_4}, u_{tx_3}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{2k-4}\Big)^\top + O(\lambda),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\nabla\gamma^{(2k-1)}(l) \sim \Big(\underbrace{0, \ldots, 0}_{2k-2}, -u_{yx_{2k}}, u_{yx_{2k-1}}\Big)^\top + O(\lambda),$$

$$\nabla\gamma^{(2k)}(l) \sim \Big(\underbrace{0, \ldots, 0}_{2k-2}, -u_{tx_{2k}}, u_{tx_{2k-1}}\Big)^\top + O(\lambda).$$

Якщо прийняти, що

$$\nabla h^{(y)}(\tilde{l}) := \Big(\lambda^{-1}\Big(\nabla\gamma^{(1)}(\tilde{l}) + \ldots + \nabla\gamma^{(2k-1)}(\tilde{l})\Big)\Big)\Big|_- =$$

$$= -\sum_{m=1}^{k}\left(\frac{u_{yx_{2m}}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_{2m-1}} - \frac{u_{yx_{2m-1}}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_{2m}}\right),$$

$$\nabla h^{(t)}(\tilde{l}) := \Big(\lambda^{-1}\Big(\nabla\gamma^{(2)}(\tilde{l}) + \ldots + \nabla\gamma^{(2k)}(\tilde{l})\Big)\Big)\Big|_- =$$

$$= -\sum_{m=1}^{k}\left(\frac{u_{tx_{2m}}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_{2m-1}} - \frac{u_{tx_{2m-1}}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_{2m}}\right),$$

то умова комутативності (6.9) векторних полів (6.10) приводить до таких багатовимірних аналогів першого „небесного" рівняння Плєбанського:

$$\sum_{m=1}^{k}(u_{yx_{2m-1}}u_{tx_{2m}} - u_{yx_{2m}}u_{tx_{2m-1}}) = 1.$$

6.8. Модифіковане „небесне" рівняння Плєбанського та його узагальнення. Для „seed"-елемента $\tilde{l} \in \tilde{\mathcal{G}}^* = \widetilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{T}^2)^*$ у вигляді

$$\begin{aligned}\tilde{l} &= (\lambda^{-1}u_{x_1y} + u_{x_1x_1} - u_{x_1x_2} + \lambda)dx_1 + \\ &+ (\lambda^{-1}u_{x_2y} + u_{x_1x_2} - u_{x_2x_2} + \lambda)dx_2 = \\ &= d(\lambda^{-1}u_y + u_{x_1} - u_{x_2} + \lambda x_1 + \lambda x_2),\end{aligned} \tag{6.13}$$

де $d\lambda = 0$, $u \in C^2(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{T}^2, \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, існують два незалежні функціонали Казиміра $\gamma^{(1)}$ і $\gamma^{(2)} \in \mathrm{I}(\tilde{\mathcal{G}}^*)$ з такими асимптотичними розкладами градієнтів:

$$\nabla\gamma^{(1)}(l) \sim (u_{yx_2}, -u_{yx_1})^\top + O(\lambda)$$

при $|\lambda| \to 0$ і

$$\nabla\gamma^{(2)}(l) \sim (0, -1)^\top + (-u_{x_2x_2}, u_{x_1x_2})^\top \lambda^{-1} + O(\lambda^{-2})$$

при $|\lambda| \to \infty$. У випадку, коли

$$\nabla h^{(y)}(\tilde{l}) := (\lambda^{-1}\nabla\gamma^{(1)}(\tilde{l}))|_- = \frac{u_{yx_2}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{u_{yx_1}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$\nabla h^{(t)}(\tilde{l}) := (\lambda\nabla\gamma^{(2)}(\tilde{l}))|_+ = -u_{x_2x_2}\frac{\partial}{\partial x_1} + (u_{x_1x_2} - \lambda)\frac{\partial}{\partial x_2},$$

умова комутативності (6.9) векторних полів (6.10) приводить до модифікованого „небесного” рівняння Плєбанського [5]

$$u_{yt} - u_{yx_1}u_{x_2x_2} + u_{yx_2}u_{x_1x_2} = 0 \tag{6.14}$$

із зображенням Лакса – Сато, заданим диференціальними рівняннями з частинними похідними першого порядку

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{u_{yx_2}}{\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \frac{u_{yx_1}}{\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial x_2} = 0,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} - u_{x_2x_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + (u_{x_1x_2} - \lambda)\frac{\partial\psi}{\partial x_2} = 0$$

для функцій $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2_{\mathbb{C}}; \mathbb{C})$.

Диференціально-геометрична форма „seed”-елемента (6.13) є також інваріантом щодо розмірності по відношенню до додаткових просторових змінних на торі $\mathbb{T}^n$, $n > 2$. Це приводить до природної проблеми знаходження відповідних багатовимірних узагальнень модифікованого „небесного” рівняння Плєбанського (6.14).

Якщо „seed”-елемент $\tilde{l} \in \tilde{\mathcal{G}}^* = \widetilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{T}^{2k})^*$ вибрано у вигляді (6.13), де $u \in C^2(\mathbb{T}^{2k} \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, то маємо такий асимптотичний розклад для градієнтів $2k \in \mathbb{N}$ незалежних функціоналів Казиміра $\gamma^{(j)} \in \mathrm{I}(\tilde{\mathcal{G}}^*)$, де $\tilde{\mathcal{G}}^* = \widetilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{T}^{2k})^*$, $j = \overline{1, 2k}$:

$$\nabla\gamma^{(1)}(l) \sim \Big(-u_{yx_2}, u_{yx_1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{2k-2}\Big)^\top + O(\lambda),$$

$$\nabla\gamma^{(3)}(l) \sim \Big(0, 0, -u_{yx_4}, u_{yx_3}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{2k-4}\Big)^\top + O(\lambda),$$

. . . .

$$\nabla\gamma^{(2k-1)}(l) \sim \Big(\underbrace{0,\ldots,0}_{2k-2}, -u_{yx_{2k}}, u_{yx_{2k-1}}\Big)^\top + O(\lambda)$$

при $|\lambda| \to 0$ і

$$\nabla\gamma^{(2)}(l) \sim \Big(0,-1,\underbrace{0,\ldots,0}_{2k-2}\Big)^\top + \Big(-u_{x_2x_2}, u_{x_1x_2}, \underbrace{0,\ldots,0}_{2k-2}\Big)^\top\lambda^{-1} + O(\lambda^{-2}),$$

$$\nabla\gamma^{(4)}(l) \sim \Big(0,0,-u_{x_4x_2}, u_{x_3x_2}, \underbrace{0,\ldots,0}_{2k-4}\Big)^\top\lambda^{-1} + O(\lambda^{-2}),$$

. . . .

$$\nabla\gamma^{(2k)}(l) \sim \Big(\underbrace{0,\ldots,0}_{2k-2}, -u_{x_{2k}x_2}, u_{x_{2k-1}x_2}\Big)^\top\lambda^{-1} + O(\lambda^{-2})$$

при $|\lambda| \to \infty$. У випадку, коли

$$\nabla h^{(y)}(\tilde{l}) := -(\lambda^{-1}\Big(\nabla\gamma^{(1)}(\tilde{l}) + \ldots + \nabla\gamma^{(2k-1)}(\tilde{l}))\Big)\Big|_- =$$

$$= \sum_{m=1}^{k}\left(\frac{u_{yx_{2m}}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_{2m-1}} - \frac{u_{yx_{2m-1}}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_{2m}}\right),$$

$$\nabla h^{(t)}(\tilde{l}) := \Big(\lambda\Big(\nabla\gamma^{(2)}(\tilde{l}) + \ldots + \nabla\gamma^{(2k)}(\tilde{l})\Big)\Big)\Big|_+ =$$

$$= -u_{x_2x_2}\frac{\partial}{\partial x_1} + (u_{x_1x_2} - \lambda)\frac{\partial}{\partial x_2} - \sum_{m=2}^{k}\left(u_{x_{2m}x_2}\frac{\partial}{\partial x_{2m-1}} - u_{x_{2m-1}x_2}\frac{\partial}{\partial x_{2m}}\right),$$

умова комутативності (6.9) векторних полів (6.10) приводить до таких багатовимірних аналогів модифікованого „небесного” рівняння Плєбанського:

$$u_{yt} - \sum_{m=1}^{k}(u_{yx_{2m}}u_{x_2x_{2m-1}} - u_{yx_{2m-1}}u_{x_2x_{2m}}) = 0.$$

6.9. „Небесне” рівняння Хусейна та його узагальнення. „Seed”-елемент $\tilde{l} \in \tilde{\mathcal{G}}^* = \widetilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{T}^2)^*$ у вигляді

$$\tilde{l} = \frac{d(u_y + iu_t)}{\lambda - i} + \frac{d(u_y - iu_t)}{\lambda + i} = \frac{2(\lambda du_y - du_t)}{\lambda^2 + 1}, \tag{6.15}$$

де $i^2 = -1,\ d\lambda = 0,\ u \in C^2(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R}),\ (x_1, x_2) \in \mathbb{T}^2,\ \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{-i; i\}$, генерує два незалежні функціонали Казиміра $\gamma^{(1)}$ і $\gamma^{(2)} \in \mathrm{I}(\tilde{\mathcal{G}}^*)$ з такими асимптотичними розкладами градієнтів:

$$\nabla\gamma^{(1)}(l) \sim \frac{1}{2}(-u_{yx_2} - iu_{tx_2}, u_{yx_1} + iu_{tx_1})^\top + O(\mu), \quad \mu := \lambda - i,$$

при $|\mu| \to 0$ і

$$\nabla\gamma^{(2)}(l) \sim \frac{1}{2}(-u_{yx_2} + iu_{tx_2}, u_{yx_1} - iu_{tx_1})^\top + O(\xi), \quad \xi := \lambda + i,$$

при $|\xi| \to 0$. У випадку, коли

$$\nabla h^{(y)}(\tilde{l}) := (\mu^{-1}\nabla\gamma^{(1)}(\tilde{l}) + \xi^{-1}\nabla\gamma^{(2)}(\tilde{l}))|_- =$$
$$= \frac{1}{2\mu}\left((-u_{yx_2} - iu_{tx_2})\frac{\partial}{\partial x_1} + (u_{yx_1} + iu_{tx_1})\frac{\partial}{\partial x_2}\right) +$$
$$+\frac{1}{2\xi}\left((-u_{yx_2} + iu_{tx_2})\frac{\partial}{\partial x_1} + (u_{yx_1} - iu_{tx_1})\frac{\partial}{\partial x_2}\right) =$$
$$= \frac{u_{tx_2} - \lambda u_{yx_2}}{\lambda^2+1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\lambda u_{yx_1} - u_{tx_1}}{\lambda^2+1}\frac{\partial}{\partial x_2},$$
$$\nabla h^{(t)}(\tilde{l}) := (-\mu^{-1}i\nabla\gamma^{(1)}(\tilde{l}) + \xi^{-1}i\nabla\gamma^{(2)}(\tilde{l}))|_- =$$
$$= \frac{1}{2\mu}\left((-u_{tx_2} + iu_{yx_2})\frac{\partial}{\partial x_1} + (u_{tx_1} - iu_{yx_1})\frac{\partial}{\partial x_2}\right) +$$
$$+\frac{1}{2\xi}\left(-(u_{tx_2} + iu_{yx_2})\frac{\partial}{\partial x_1} + (u_{tx_1} + iu_{yx_1})\frac{\partial}{\partial x_2}\right) =$$
$$= -\frac{u_{yx_2} + \lambda u_{tx_2}}{\lambda^2+1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{u_{yx_1} + \lambda u_{tx_1}}{\lambda^2+1}\frac{\partial}{\partial x_2},$$

умова комутативності (6.9) векторних полів (6.10) приводить до „небесного” рівняння Хусейна [5]

$$u_{yy} + u_{tt} + u_{yx_1}u_{tx_2} - u_{yx_2}u_{tx_1} = 0 \tag{6.16}$$

із зображенням Лакса – Сато, заданим диференціальними рівняннями з частинними похідними першого порядку

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{u_{tx_2} - \lambda u_{yx_2}}{\lambda^2+1}\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \frac{\lambda u_{yx_1} - u_{tx_1}}{\lambda^2+1}\frac{\partial\ \psi}{\partial x_2} = 0,$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{u_{yx_2} + \lambda u_{tx_2}}{\lambda^2+1}\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \frac{u_{yx_1} + \lambda u_{tx_1}}{\lambda^2+1}\frac{\partial\ \psi}{\partial x_2} = 0,$$

де $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2_{\mathbb{C}}; \mathbb{C})$.

Диференціально-геометрична форма „seed”-елемента (6.15) також інваріантна щодо розміру додаткових просторових змінних тора $\mathbb{T}^n$, $n > 2$, що відкриває проблему знаходження відповідних багатовимірних узагальнень „небесного” рівняння Хусейна (6.16).

Якщо „seed”-елемент $\tilde{l} \in \tilde{\mathcal{G}}^* = \widetilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{T}^{2k})^*$ вибрано у вигляді (6.15), де $u \in C^2(\mathbb{T}^{2k} \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, то отримуємо такі асимптотичні розклади для градієнтів $2k \in \mathbb{N}$ незалежних функціоналів Казиміра $\gamma^{(j)} \in \mathrm{I}(\tilde{\mathcal{G}}^*)$, де $\tilde{\mathcal{G}}^* = \widetilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{T}^{2k})^*$, $j = \overline{1, 2k}$:

$$\nabla\gamma^{(1)}(l) \sim \frac{1}{2}\Big(-u_{yx_2} - iu_{tx_2}, u_{yx_1} + iu_{tx_1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{2k-2}\Big)^\top + O(\mu),$$

$$\nabla\gamma^{(3)}(l) \sim \frac{1}{2}\Big(0, 0, -u_{yx_4} - iu_{tx_4}, u_{yx_3} + iu_{tx_3}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{2k-4}\Big)^\top + O(\mu),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\nabla\gamma^{(2k-1)}(l) \sim \frac{1}{2}\Big(\underbrace{0, \ldots, 0}_{2k-2}, -u_{yx_{2k}} - iu_{tx_{2k}}, u_{yx_{2k-1}} + iu_{tx_{2k-1}}\Big)^\top + O(\mu)$$

при $|\mu| \to 0$ і

$$\nabla\gamma^{(2)}(l) \sim \frac{1}{2}\Big(-u_{yx_2} + iu_{tx_2}, u_{yx_1} - iu_{tx_1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{2k-2}\Big)^\top + O(\xi),$$

$$\nabla\gamma^{(4)}(l) \sim \frac{1}{2}\Big(0, 0, -u_{yx_4} + iu_{tx_4}, u_{yx_3} - iu_{tx_3}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{2k-4}\Big)^\top + O(\xi),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\nabla\gamma^{(2k)}(l) \sim \frac{1}{2}\Big(\underbrace{0, \ldots, 0}_{2k-2}, -u_{yx_{2k}} + iu_{tx_{2k}}, u_{yx_{2k-1}} - iu_{tx_{2k-1}}\Big)^\top + O(\xi)$$

при $|\xi| \to 0$. У випадку, коли

$$\nabla h^{(y)}(\tilde{l}) := \sum_{m=1}^{k} (\mu^{-1}\nabla\gamma^{(2m-1)}(\tilde{l}) + \xi^{-1}\nabla\gamma^{(2m)}(\tilde{l}))\big|_- =$$

$$= \sum_{m=1}^{k} \left(\frac{u_{tx_{2m}} - \lambda u_{yx_{2m}}}{\lambda^2 + 1} \frac{\partial}{\partial x_{2m-1}} + \frac{\lambda u_{yx_{2m-1}} - u_{tx_{2m-1}}}{\lambda^2 + 1} \frac{\partial}{\partial x_{2m}} \right),$$

$$\nabla h^{(t)}(\tilde{l}) := \sum_{m=1}^{k} i(-\mu^{-1}\nabla\gamma^{(2m-1)}(\tilde{l}) + \xi^{-1}\nabla\gamma^{(2m)}(\tilde{l}))\big|_- =$$

$$= \sum_{m=1}^{k} \left(-\frac{u_{yx_{2m}} + \lambda u_{tx_{2m}}}{\lambda^2 + 1} \frac{\partial}{\partial x_{2m-1}} + \frac{u_{yx_{2m-1}} + \lambda u_{tx_{2m-1}}}{\lambda^2 + 1} \frac{\partial}{\partial x_{2m}} \right),$$

умова комутативності (6.9) векторних полів (6.10) приводить до багатовимірних аналогів „небесного” рівняння Хусейна

$$u_{yy} + u_{tt} + \sum_{m=1}^{k} (u_{yx_{2m-1}} u_{tx_{2m}} - u_{yx_{2m}} u_{x_2 x_{2m-1}}) = 0.$$

6.10. Загальне „небесне” рівняння Монжа та його узагальнення. „Seed”-елемент $\tilde{l} \in \tilde{\mathcal{G}}^* = \widetilde{\operatorname{diff}}(\mathbb{C} \times \mathbb{T}^4)^*$, взятий у вигляді

$$\tilde{l} = du_y + \lambda^{-1}(dx_1 + dx_2),$$

де $u \in C^2(\mathbb{T}^4 \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{T}^4$, $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, генерує чотири незалежні функціонали Казиміра $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$, $\gamma^{(3)}$ і $\gamma^{(4)} \in \mathrm{I}(\tilde{\mathcal{G}}^*)$, градієнти яких мають такі асимптотичні розклади:

$$\nabla\gamma^{(1)}(l) \sim (0,1,0,0)^\top +$$
$$+ (-u_{yx_2} - (\partial_{x_2} - \partial_{x_1})^{-1} u_{yx_2x_1}, (\partial_{x_2} - \partial_{x_1})^{-1} u_{yx_2x_1}, 0, 0)^\top \lambda + O(\lambda^2),$$
$$\nabla\gamma^{(2)}(l) \sim (1,0,0,0)^\top +$$
$$+ (\partial_{x_1} - \partial_{x_2})^{-1} u_{yx_1x_2}, -u_{yx_1} - (\partial_{x_1} - \partial_{x_2})^{-1} u_{yx_1x_2}, 0, 0)^\top \lambda + O(\lambda^2),$$
$$\nabla\gamma^{(3)}(l) \sim (0,0,-u_{yx_4}, u_{yx_3})^\top + O(\lambda^2),$$
$$\nabla\gamma^{(4)}(l) \sim (0,0,-u_{tx_4}, u_{tx_3})^\top + (u_{yx_3}u_{tx_4} - u_{yx_4}u_{tx_3}, 0,$$
$$u_{yx_4}u_{tx_1} - u_{yx_1}u_{tx_4}, u_{yx_1}u_{tx_3} - u_{yx_3}u_{tx_1})^\top \lambda + O(\lambda^2)$$

при $|\lambda| \to 0$. У випадку, коли

$$\nabla h^{(y)}(\tilde{l}) := (\lambda^{-1}(\nabla\gamma^{(1)}(\tilde{l}) + \nabla\gamma^{(3)}(\tilde{l})))|_- =$$
$$= 0\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{u_{yx_4}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{u_{yx_3}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_4},$$
$$\nabla h^{(t)}(\tilde{l}) := (\lambda^{-1}(-\nabla\gamma^{(2)}(\tilde{l}) + \nabla\gamma^{(4)}(\tilde{l})))|_- =$$
$$= -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_1} + 0\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{u_{tx_4}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{u_{tx_3}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_4},$$

умова комутативності (6.9) векторних полів (6.10) приводить до загального „небесного” рівняння Монжа [6]

$$u_{yx_1} + u_{tx_2} + u_{yx_3}u_{tx_4} - u_{yx_4}u_{tx_3} = 0$$

із зображенням Лакса – Сато, заданим диференціальними рівняннями з частинними похідними першого порядку

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial x_2} - \frac{u_{yx_4}}{\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial x_3} + \frac{u_{yx_3}}{\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial x_4} = 0,$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial x_1} - \frac{u_{tx_4}}{\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial x_3} + \frac{u_{tx_3}}{\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial x_4} = 0,$$

де $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C} \times \mathbb{T}^n; \mathbb{C})$ і $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Беручи до уваги той факт, що умова на інваріанти Казиміра еквівалентна системі однорідних лінійних диференціальних рівнянь на ковекторну функцію $l = (l_1, l_2, l_3, l_4)^\intercal$, відповідний „seed”-елемент можна вибрати в іншій формі. Наприклад, якщо вираз

$$\tilde{l} = du_t + \lambda^{-1}(dx_1 + dx_2)$$

розглянути як „seed”-елемент, то він генерує чотири незалежні функціонали Казиміра $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$, $\gamma^{(3)}$ і $\gamma^{(4)} \in \mathrm{I}(\tilde{\mathcal{G}}^*)$, градієнти яких мають такі асимптотичні розклади:

$$\nabla\gamma^{(1)}(l) \sim (0,1,0,0)^\top +$$
$$+ (-u_{tx_2} - (\partial_{x_2} - \partial_{x_1})^{-1} u_{tx_2x_1}, (\partial_{x_2} - \partial_{x_1})^{-1} u_{tx_2x_1}, 0, 0)^\top \lambda + O(\lambda^2),$$
$$\nabla\gamma^{(2)}(l) \sim (1,0,0,0)^\top +$$
$$+ ((\partial_{x_1} - \partial_{x_2})^{-1} u_{tx_1x_2}, -u_{tx_1} - (\partial_{x_1} - \partial_{x_2})^{-1} u_{tx_1x_2}, 0, 0)^\top \lambda + O(\lambda^2),$$
$$\nabla\gamma^{(3)}(l) \sim (0,0,-u_{tx_4}, u_{tx_3})^\top + (0, u_{tx_3}u_{yx_4} - u_{tx_4}u_{yx_3},$$
$$u_{tx_4}u_{yx_2} - u_{tx_2}u_{yx_4}, u_{tx_2}u_{yx_3} - u_{tx_3}u_{yx_2})^\top \lambda + O(\lambda^2),$$
$$\nabla\gamma^{(4)}(l) \sim (0,0,-u_{yx_4}, u_{yx_3})^\top + O(\lambda^2)$$

при $|\lambda| \to 0$. Якщо „seed”-елемент має вигляд

$$\tilde{l} = du_y + du_t + \lambda^{-1}(dx_1 + dx_2), \tag{6.17}$$

то асимптотичні розклади для градієнтів чотирьох незалежних функціоналів Казиміра $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$, $\gamma^{(3)}$ і $\gamma^{(4)} \in \mathrm{I}(\tilde{\mathcal{G}}^*)$ можна записати як

$$\nabla\gamma^{(1)}(l) \sim (0,1,0,0)^\top + (-(u_{yx_2} + u_{tx_2}) -$$
$$- (\partial_{x_2} - \partial_{x_1})^{-1}(u_{yx_2x_1} + u_{tx_2x_1}),$$
$$(\partial_{x_2} - \partial_{x_1})^{-1}(u_{yx_2x_1} + u_{tx_2x_1}), 0, 0)^\top \lambda + O(\lambda^2),$$
$$\nabla\gamma^{(2)}(l) \sim (1,0,0,0)^\top + ((\partial_{x_1} - \partial_{x_2})^{-1}(u_{yx_1x_2} + u_{tx_1x_2}),$$
$$-(u_{yx_1} + u_{tx_1}) - (\partial_{x_1} - \partial_{x_2})^{-1}(u_{yx_1x_2} + u_{tx_1x_2}), 0, 0)^\top \lambda + O(\lambda^2),$$
$$\nabla\gamma^{(3)}(l) \sim (0,0,-u_{yx_4}, u_{yx_3})^\top + (0, u_{tx_3}u_{yx_4} - u_{tx_4}u_{yx_3},$$
$$u_{tx_4}u_{yx_2} - u_{tx_2}u_{yx_4}, u_{tx_2}u_{yx_3} - u_{tx_3}u_{yx_2})^\top \lambda + O(\lambda^2),$$
$$\nabla\gamma^{(4)}(l) \sim (0,0,-u_{tx_4}, u_{tx_3})^\top + (u_{yx_3}u_{tx_4} - u_{yx_4}u_{tx_3}, 0,$$
$$u_{yx_4}u_{tx_1} - u_{yx_1}u_{tx_4}, u_{yx_1}u_{tx_3} - u_{yx_3}u_{tx_1})^\top \lambda + O(\lambda^2)$$

при $|\lambda| \to 0$.

Описана вище схема узагальнюється для всіх $n = 2k$, де $k \in \mathbb{N}$ і $n > 2$. У цьому випадку маємо $2k$ незалежних функціоналів Казиміра $\gamma^{(j)} \in \mathrm{I}(\tilde{\mathcal{G}}^*)$, де $\tilde{\mathcal{G}}^* = \widetilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{C} \times \mathbb{T}^{2k})^*$, $j = \overline{1, 2k}$, а асимптотичні розклади їхніх градієнтів задаються такими виразами:

$$\nabla\gamma^{(1)}(l) \sim (0,1,\underbrace{0,\ldots,0}_{2k-2})^\top + (-(u_{yx_2} + u_{tx_2}) -$$
$$- (\partial_{x_2} - \partial_{x_1})^{-1}(u_{yx_2x_1} + u_{tx_2x_1}), (\partial_{x_2} - \partial_{x_1})^{-1}(u_{yx_2x_1} + u_{tx_2x_1}), \underbrace{0,\ldots,0}_{2k-2})^\top \lambda + O(\lambda^2),$$
$$\nabla\gamma^{(2)}(l) \sim (1,0,\underbrace{0,\ldots,0}_{2k-2})^\top + ((\partial_{x_1} - \partial_{x_2})^{-1}(u_{yx_1x_2} + u_{tx_1x_2}),$$
$$-(u_{yx_1} + u_{tx_1}) - (\partial_{x_1} - \partial_{x_2})^{-1}(u_{yx_1x_2} + u_{tx_1x_2}), 0, 0)^\top \lambda + O(\lambda^2),$$

$$\nabla\gamma^{(3)}(l) \sim (0,0,-u_{yx_4},u_{yx_3},\underbrace{0,\ldots,0}_{2k-4})^\top + (0, u_{tx_3}u_{yx_4} - u_{tx_4}u_{yx_3},$$

$$u_{tx_4}u_{yx_2} - u_{tx_2}u_{yx_4}, u_{tx_2}u_{yx_3} - u_{tx_3}u_{yx_2}, \underbrace{0,\ldots,0}_{2k-4})^\top\lambda + O(\lambda^2),$$

$$\nabla\gamma^{(4)}(l) \sim (0,0,-u_{tx_4},u_{tx_3},\underbrace{0,\ldots,0}_{2k-4})^\top + (u_{yx_3}u_{tx_4} - u_{yx_4}u_{tx_3}, 0,$$

$$u_{yx_4}u_{tx_1} - u_{yx_1}u_{tx_4}, u_{yx_1}u_{tx_3} - u_{yx_3}u_{tx_1}, \underbrace{0,\ldots,0}_{2k-4})^\top\lambda + O(\lambda^2),$$

$$\nabla\gamma^{(2k-1)}(l) \sim (\underbrace{0,\ldots,0}_{2k-4},0,0,-u_{yx_{2k}},u_{yx_{2k-1}})^\top +$$

$$+ (\underbrace{0,\ldots,0}_{2k-4}, 0, u_{tx_{2k-1}}u_{yx_{2k}} - u_{tx_{2k}}u_{yx_{2k-1}},$$

$$u_{tx_{2k}}u_{yx_2} - u_{tx_2}u_{yx_{2k}}, u_{tx_2}u_{yx_{2k-1}} - u_{tx_{2k-1}}u_{yx_2})^\top\lambda + O(\lambda^2),$$

$$\nabla\gamma^{(2k)}(l) \sim (\underbrace{0,\ldots,0}_{2k-4},0,0,-u_{tx_{2k}},u_{tx_{2k-1}})^\top +$$

$$+ (\underbrace{0,\ldots,0}_{2k-4}, u_{yx_{2k-1}}u_{tx_{2k}} - u_{yx_{2k}}u_{tx_{2k-1}}, 0,$$

$$u_{yx_{2k}}u_{tx_1} - u_{yx_1}u_{tx_{2k}}, u_{yx_1}u_{tx_{2k-1}} - u_{yx_{2k-1}}u_{tx_1})^\top\lambda + O(\lambda^2),$$

якщо „seed”-елемент $\tilde{l} \in \tilde{\mathcal{G}}^*$ вибрано як (6.17). Якщо

$$\nabla h^{(y)}(\tilde{l}) := (\lambda^{-1}(\nabla\gamma^{(1)}(\tilde{l}) + \nabla\gamma^{(3)}(\tilde{l}) + \ldots + \nabla\gamma^{(2k-1)}(\tilde{l})))|_- =$$

$$= 0\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{u_{yx_4}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{u_{yx_3}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_4} + \ldots$$

$$\ldots - \frac{u_{yx_{2k}}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_{2k-1}} + \frac{u_{yx_{2k-1}}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_{2k}} =$$

$$= 0\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_2} - \sum_{j=2}^{k}\left(\frac{u_{yx_{2j}}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_{2j-1}} - \frac{u_{yx_{2j-1}}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_{2j}}\right),$$

$$\nabla h^{(t)}(\tilde{l}) := (\lambda^{-1}(-\nabla\gamma^{(2)}(\tilde{l}) + \nabla\gamma^{(4)}(\tilde{l}) + \ldots + \nabla\gamma^{(2k)}(\tilde{l})))|_- =$$

$$= -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_1} + 0\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{u_{tx_4}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{u_{tx_3}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_4} + \ldots$$

$$\ldots - \frac{u_{tx_{2k}}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_{2k-1}} + \frac{u_{tx_{2k-1}}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_{2k}} =$$

$$= -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_1} + 0\frac{\partial}{\partial x_2} - \sum_{j=2}^{k}\left(\frac{u_{tx_{2k}}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_{2k-1}} - \frac{u_{tx_{2k-1}}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_{2k}}\right),$$

то умова сумісності (6.9) векторних полів (6.10) приводить до таких багатовимірних аналогів загального рівняння Монжа:

$$u_{yx_1} + u_{tx_2} + \sum_{j=2}^{k} (u_{yx_{2j-1}} u_{tx_{2j}} - u_{yx_{2j}} u_{tx_{2j-1}}) = 0.$$

7. Супераналоги „небесного" рівняння Візема. Припустимо, що елемент $\tilde{l} \in \tilde{\mathcal{G}}^*$, де $\tilde{\mathcal{G}} := \tilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{T}^{1|N}) = \tilde{\mathrm{diff}}_+(\mathbb{T}^{1|N}) \oplus \tilde{\mathrm{diff}}\_(\mathbb{T}^{1|N})$ є алгеброю Лі петель суперконформних дифеоморфізмів групи $\tilde{\mathrm{Diff}}(\mathbb{T}^{1|N})$ векторних полів на $(1,1)|N$-вимірному суперторі $\mathbb{T}^{(1,1)|N} := \mathbb{C} \times \mathbb{T}^1 \times \Lambda_1^N$ (див. [10]), вкладеною в скінченновимірну алгебру Грассмана $\Lambda := \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ над $\mathbb{C}$, $\Lambda_0 \supset \mathbb{R}$, що приводить до таких асимптотичних розкладів для градієнтів інваріантів Казиміра $h^{(1)}, h^{(2)} \in \mathrm{I}(\tilde{\mathcal{G}}^*)$:

$$\nabla h^{(1)}(l) \sim w_y + O(\lambda) \tag{7.1}$$

при $|\lambda| \to 0$ і

$$\nabla h^{(2)}(l) \sim 1 - w_x \lambda^{-1} + O(\lambda^{-2}) \tag{7.2}$$

при $|\lambda| \to \infty$. Тоді умова сумісності потоків Гамільтона

$$\begin{aligned} d\tilde{l}/dy &= ad^*_{\nabla h_-^{(y)}(\tilde{l})} \tilde{l}, \quad \nabla h_-^{(y)}(l) = -(\lambda^{-1} \nabla h^1(l))_- = -w_y \lambda^{-1}, \\ d\tilde{l}/dt &= -ad^*_{\nabla h_+^{(t)}(\tilde{l})} \tilde{l}, \quad \nabla h_+^{(t)}(l) = -(\lambda \nabla h^{(2)}(l))_+ = -\lambda + w_x, \end{aligned} \tag{7.3}$$

приводить до рівнянь „небесного" типу

$$w_{yt} = w_x w_{yx} - w_y w_{xx} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} (D_{\vartheta_i} w_x)(D_{\vartheta_i} w_y), \tag{7.4}$$

де $w \in C^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^{(1,1)|N}; \Lambda_0)$ і $D_{\vartheta_i} := \partial/\partial\vartheta_i + \vartheta_i \partial/\partial x$, $i = \overline{1,N}$, — суперпохідні по відношенню до антикомутативних змінних $\vartheta_i \in \Lambda_1$, $i = \overline{1,N}$.

Це рівняння можна розглядати як суперузагальнення „небесного" рівняння Візема [11, 12, 30] для довільного $N \in \mathbb{N}$. Умова сумісності для диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку

$$\psi_y + \frac{1}{\lambda}\left(w_y \psi_x + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} (D_{\vartheta_i} w_y)(D_{\vartheta_i} \psi) \right) = 0,$$

$$\psi_t + (-\lambda + w_x)\psi_x + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} (D_{\vartheta_i} w_x)(D_{\vartheta_i} \psi) = 0,$$

де $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^{(1,1)|N}; \Lambda_0)$ і $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, приводить до відповідного зображення Лакса – Сато рівняння „небесного" типу (7.4).

І навіть більше, після нескладних обчислень отримуємо з рівняння на інваріант Казиміра відповідний „seed"-елемент $\tilde{l} := l dx \in \tilde{\mathcal{G}}^*$, який можна записати у такій формі для довільного $N \in \mathbb{N}$:

$$l = Ca^{-\frac{4-N}{2}}, \quad a := \nabla h(l).$$

Тут скалярна функція $C = C(x;\vartheta)$ задовольняє лінійне однорідне диференціальне рівняння $C_x = \langle DC, Q\rangle$, $Q = (Q_1,\ldots,Q_N)$, $Q_i = \dfrac{(-1)^N}{2}(D_{\vartheta_i}\ln a)$, у суперпросторі $\mathbb{R}^{2^{N-1}|2^{N-1}} \simeq \simeq \Lambda_0^{2^{N-1}} \times \Lambda_1^{2^{N-1}}$. І навіть більше, $C \in C^\infty(\mathbb{T}^{(1,1)|N};\Lambda_1)$, якщо N — непарне натуральне число, і $C \in C^\infty(\mathbb{T}^{(1,1)|N};\Lambda_0)$, якщо N — парне ціле число. У випадку $N = 1$ маємо

$$l = C_1(\partial_x^{-1} D_{\theta_1} a^{-\frac{1}{2}})a^{-\frac{3}{2}},$$

де $C_1 \in \mathbb{R}$ — деяка дійсна стала.

Якщо $N = 1$ і $C_1 = 1$, то відповідний „seed”-елемент $\tilde{l} \in \tilde{\mathcal{G}}^*$, пов'язаний з асимптотичними розкладами (7.1) і (7.2), можна зредукувати до

$$\tilde{l} = [\lambda^{-1}(\partial_x^{-1} D_{\theta_1} w_y^{-\frac{1}{2}})w_y^{-\frac{3}{2}} + \xi_x/2 + \theta_1(2u_x + \lambda)]dx,$$

де $w := u + \theta_1\xi$, $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1;\Lambda_0)$ і $\xi \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1;\Lambda_1)$.

8. Гамільтонові потоки, асоційовані з гідродинамічними системами Чаплигіна. Розглянемо [1, 17, 23] гідродинамічну систему Чаплигіна

$$\begin{aligned} u_t &= -uu_x - kv_xv^{-3}, \\ v_t &= -(uv)_x, \end{aligned} \tag{8.1}$$

де $k \in \mathbb{R}$ — сталий параметр, $(u,v) \in M \subset C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z};\mathbb{R}^2)$ — 2π-періодичні динамічні змінні на функціональному многовиді M щодо еволюційного параметра $t \in \mathbb{R}$. Щоб описати геометричну структуру системи (8.1), визначимо алгебру Лі петель $\tilde{\mathcal{G}} := \widetilde{\operatorname{diff}}(\mathbb{T}^1)$ на многовиді $\mathbb{C} \times \mathbb{T}^1$ і виберемо „seed”-елемент $\tilde{l} \in \tilde{\mathcal{G}}^*$ у вигляді

$$\tilde{l} = \left[\left(\frac{1}{8}\alpha_x + uu_x\right)\lambda + \frac{1}{2}u_x\lambda^3\right]dx + \left[\frac{3}{8}(\alpha + 4u^2) + \frac{5}{2}u\lambda^2 + \lambda^4\right]d\lambda,$$

де позначено $\alpha := kv^{-2} + u^2$, і знайдемо асимптотичні розклади для деяких функціоналів Казиміра $h^{(y)}, h^{(t)}$ і $h^{(s)} \in \mathrm{I}(\tilde{\mathcal{G}}^*)$:

$$\nabla h^{(t)}(l) := \nabla h^{(2)}(l), \quad \nabla h^{(y)}(l) := \nabla h^{(4)}(l), \quad \nabla h^{(s)}(l) := \nabla h^{(6)}(l),$$

де

$$\nabla h^{(2)}(l) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}\lambda^2 + \begin{pmatrix} 0 \\ u_x \end{pmatrix}\lambda^1 + \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}\lambda^9 + O(\lambda^{-1}),$$

$$\nabla h^{(4)}(l) = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix}\lambda^4 + \begin{pmatrix} 0 \\ 4u_x \end{pmatrix}\lambda^3 + \begin{pmatrix} -4u \\ 0 \end{pmatrix}\lambda^2 + $$
$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_x \end{pmatrix}\lambda^1 + \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}\lambda^0 + O(\lambda^{-1})$$

і

$$\nabla h^{(6)}(l) = \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}\lambda^6 + \begin{pmatrix}0\\u_x\end{pmatrix}\lambda^5 + \begin{pmatrix}-3u\\0\end{pmatrix}\lambda^4 +$$

$$+\begin{pmatrix}0\\\alpha_x/4+uu_x\end{pmatrix}\lambda^3 + \begin{pmatrix}-\alpha/4-1/2u^2\\0\end{pmatrix}\lambda^2 +$$

$$+\begin{pmatrix}0\\-(u\alpha)_x/8\end{pmatrix}\lambda^1 + \begin{pmatrix}u\alpha/8\\0\end{pmatrix}\lambda^0 + O(\lambda^{-1})$$

при $\lambda \to \infty$. Відповідні генератори Лакса – Сато векторних полів задаються виразами

$$\nabla h_+^{(t)}(l) := (\,\nabla h^{(2)}(l))|_+ = \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}\lambda^2 + \begin{pmatrix}0\\u_x\end{pmatrix}\lambda^1 + \begin{pmatrix}u\\0\end{pmatrix}\lambda^0,$$

$$\nabla h_+^{(y)}(l) := (\nabla h^{(4)}(l))|_+ = \tag{8.2}$$

$$= \begin{pmatrix}-8\\0\end{pmatrix}\lambda^4 + \begin{pmatrix}0\\4u_x\end{pmatrix}\lambda^3 + \begin{pmatrix}-4u\\0\end{pmatrix}\lambda^2 + \begin{pmatrix}0\\\alpha_x\end{pmatrix}\lambda^1 + \begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix}\lambda^0$$

і

$$\nabla h_+^{(s)}(l) := (\nabla h^{(6)}(l))|_+ = \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}\lambda^6 + \begin{pmatrix}0\\u_x\end{pmatrix}\lambda^5 +$$

$$+\begin{pmatrix}-3u\\0\end{pmatrix}\lambda^4 + \begin{pmatrix}0\\\alpha_x/4+uu_x\end{pmatrix}\lambda^3 +$$

$$+\begin{pmatrix}-\alpha/4-1/2u^2\\0\end{pmatrix}\lambda^2 + \begin{pmatrix}0\\-(u\alpha)_x/8\end{pmatrix}\lambda^1 + \begin{pmatrix}u\alpha/8\\0\end{pmatrix}\lambda^0 \tag{8.3}$$

при $\lambda \to \infty$. Використовуючи вирази (8.2) і (8.3), можна отримати такі еволюційні потоки:

$$\partial\tilde{l}/\partial t = -ad^*_{\nabla h_+^{(t)}(\tilde{l})}\tilde{l} \quad \sim \quad \left.\begin{aligned} u_t &= -(u^2 - kv^{-2})_x \\ v_t &= -(uv)_x \end{aligned}\right\} \tag{8.4}$$

щодо еволюційного параметра $t \in \mathbb{R}$, які еквівалентні гідродинамічній системі (8.1),

$$\partial\tilde{l}/\partial y = -ad^*_{\nabla h_+^{(y)}(\tilde{l})}\tilde{l} \quad \sim \quad \left.\begin{aligned} u_y &= -[uv(u^2 + kv^{-2})]_x \\ v_y &= -[(u^2 + kv^{-2})v]_x \end{aligned}\right\} \tag{8.5}$$

щодо еволюційного параметра $y \in \mathbb{R}$ і

$$\partial\tilde{l}/\partial s = -ad^*_{\nabla h_+^{(s)}(\tilde{l})}\tilde{l} \quad \sim \quad \left.\begin{aligned} u_s &= -\big(-3\alpha^2 + 4u^4\big)_x/12 \\ v_s &= -[(u^2 + kv^{-2})uv]_x/3 \end{aligned}\right\} \tag{8.6}$$

щодо еволюційного параметра $s \in \mathbb{R}$. Всі ці потоки є комутуючі

$$[\partial/\partial t + \nabla h_+^{(t)}(l), \partial/\partial y + \nabla h_+^{(y)}(l)] = 0,$$

$$[\partial/\partial t + \nabla h_+^{(t)}(l), \partial/\partial s + \nabla h_+^{(s)}(l)] = 0,$$

$$[\partial/\partial s + \nabla h_+^{(s)}(l), \partial/\partial y + \nabla h_+^{(y)}(l)] = 0$$

одне з одним векторні поля типу Лакса – Сато на многовиді $\mathbb{C} \times \mathbb{T}^1$ для всіх параметрів t, y і $s \in \mathbb{R}$ і приводять до трьох нових сумісних систем інтегровних „небесних" бездисперсійних диференціальних рівнянь. Отриманий результат можна сформулювати у вигляді такої теореми.

Теорема 8.1. *Гідродинамічна система Чаплигіна* (8.4) *еквівалентна повністю інтегровній системі Гамільтона* (8.6) *на спряженому просторі $\tilde{\mathcal{G}}^*$ до алгебри Лі петель $\tilde{\mathcal{G}} \simeq \widetilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{T}^1)$ векторних полів на многовиді $\mathbb{C} \times \mathbb{T}^1$. Пов'язані функціонали Казиміра на $\tilde{\mathcal{G}}^*$ генерують нескінченну ієрархію комутуючих одне з одним додаткових гамільтонових систем типу* (8.5) *і* (8.6) *та векторних полів типу Лакса – Сато на $\mathbb{C} \times \mathbb{T}^1$, а це приводить до нових дисперсійних „небесних" рівнянь.*

Як показано в [3], гідродинамічна система Чаплигіна (8.4) тісно пов'язана з класом повністю інтегровних рівнянь типу Монжа, геометрична структура яких була проаналізована в [6] за допомогою іншого підходу — за допомогою властивостей вкладення многовиду Грассмана загальних диференціальних рівнянь, визначених на джет-підмноговидах. Останнє зводить проблему знаходження зв'язку між різними геометричними підходами до опису повністю інтегровних бездисперсійних диференціальних систем.

Насамкінець зазначимо, що Лі-алгебраїчну схему Овсієнка [26, 27] можна узагальнити, якщо розглянути дещо ширший клас інтегровних „небесних" рівнянь, записаних у вигляді узгоджених гамільтонових потоків на напівпростому добутку алгебри Лі $\tilde{\mathcal{G}}$ голоморфних векторних полів на торі $\mathbb{C} \times \mathbb{T}^n$ із її регулярним спряженим простором $\tilde{\mathcal{G}}^*$, який доповнений коциклом Маурера – Картана. Саме ця конструкція є предметом розгляду у другій частині цієї статті.

Література

1. M. Arik, F. Neyzi, Y. Nutku, P. J. Olver, J. Verosky, *Multi-Hamiltonian structure of the Born – Infeld equation*, J. Math. Phys., **30** (1988).
2. N. N. Bogoliubov, Yu. A. Mitropolski, A. M. Samoilenko, *Accelerated convergence method in non-linear mechanics* (in Russian), Naukova Dumka, Kyiv (1969).
3. J. C. Brunelli, M. Gürses, K. Zheltukhin, *On the integrability of a class of Monge – Ampère equations*, arXiv:hep-th/9906233v1 29 Jun 1999.
4. A. Das, *Integrable models*, World Sci. (1989).
5. B. Doubrov, E. V. Ferapontov, *On the integrability of symplectic Monge – Ampère equations*, J. Geom. Phys., **60**, № 10, 1604 – 1616 (2010); arXiv:0910.3407v2 [math.DG] 13 Apr 2010.
6. B. Doubrov, E. V. Ferapontov, B. Kruglikov, V. S. Novikov, *On a class of integrable systems of Monge – Ampère type*, arXiv:1701.02270v1 [nlin.SI] 9 Jan 2017.
7. P. G. Drazin, R. S. Johnson, *Solitons: an introduction*, Cambridge Univ. Press (1989).
8. E. Ferapontov, B. S. Kruglikov, *Dispersionless integrable systems in 3D and Einstein – Weyl geometry*, J. Different. Geom., **97**, 215 – 254 (2014).
9. E. V. Ferapontov, J. Moss, *Linearly degenerate PDEs and quadratic line complexes*, arXiv:1204.2777v1 [math.DG] 12 Apr 2012.
10. O. E. Hentosh, Ya. A. Prykarpatsky, *The Lax – Sato integrable heavenly equations on functional supermanifolds and their Lie-algebraic structure*, European J. Math. (2018).

11. M. Manas, E. Medina, L. Martinez-Alonso, *On the Whitham hierarchy: dressing scheme, string equations and additional symmetries*, J. Phys. A: Math. and Gen., **39**, 2349 – 2381 (2006).
12. O. I. Morozov, *A two-component generalization of the integrable rd-Dym equation*, SIGMA, **8**, Article 051 (2012).
13. L. P. Nizhnik, *The inverse scattering problems for the hyperbolic equations and their applications to non-linear integrable equations*, Rep. Math. Phys., **26**, № 2, 261 – 283 (1988).
14. L. P. Nizhnik, *Inverse scattering problem for he wave equation and its application*, Parameter Identification and Inverse Problems in Hydrology, Geology and Ecology, Kluwer Acad. Publ. (1996), p. 233 – 238.
15. L. P. Nizhnik, M. D. Pochynaiko, *The integration of a spatially two-dimensional Schrödinger equation by the inverse problem method*, Func. Anal. and Appl., **16**, № 1, 80 – 82 (1982) (in Russian).
16. S. P. Novikov, S. V. Manakov, L. P. Pitaevskii, V. E. Zakharov, *Theory of solitons. The inverse scattering method*, Springer (1984).
17. P. J. Olver, Y. Nutku, *Hamiltonian structures for systems of hyperbolic conservation laws*, J. Math. Phys., **29** (1988).
18. D. Blackmore, A. K. Prykarpatsky, Y. A. Prykarpatsky, A. M. Samoilenko, *Theory of multidimensional Delsarte – Lions transmutation operators. I*, Ukr. Math. J., **70**, № 12, 1913 – 1952 (2019).
19. D. Blackmore, A. K. Prykarpatsky, Y. A. Prykarpatsky, A. M. Samoilenko, *Theory of multidimensional Delsarte – Lions transmutation operators. II*, Ukr. Math. J., **71**, № 2, 345 – 361 (2019).
20. B. Szablikowski, *Hierarchies of Manakov – Santini type by means of Rota – Baxter and other identities*, SIGMA, **12**, Article 022 (2016).
21. M. B. Sheftel, D. Yazıcı, *Bi-Hamiltonian representation, symmetries and integrals of mixed heavenly and Husain systems*, arXiv:0904.3981v4 [math-ph] 4 May 2010.
22. M. B. Sheftel, D. Yazıcı, *Evolutionary Hirota type (2+1)-dimensional equations: Lax pairs, recursion operators and bi-Hamiltonian structures*, SIGMA, **14**, Article 017 (2018); arXiv:1712.01549v1 [math-ph] 5 Dec 2017.
23. L. A. Takhtajan, L. D. Faddeev, *Hamiltonian approach in soliton theory*, Springer, Berlin, Heidelberg (1987).
24. П. П. Кулиш, *Аналог уравнения Кортевега – де Фриза для суперконформной алгебры*, Зап. науч. сем. ЛОМИ, **155**, 142 – 148 (1986).
25. В. Г. Михалев, *О гамильтоновом формализме иерархий типа Кортевега – де Фриза*, Функц. анализ и его прил., **26**, № 2, 79 – 82 (1992).
26. V. Ovsienko, C. Roger, *Looped cotangent Virasoro algebra and non-linear integrable systems in dimension* $2 + 1$, Commun. Math. Phys., **273**, № 2, 357 – 378 (2007).
27. V. Ovsienko, *Bi-Hamiltonian nature of the equation* $u_{tx} = u_{xy}u_y - u_{yy}u_x$, Adv. Pure and Appl. Math., **1**, № 1, 7 – 10 (2008); arXiv:0802.1818v1 (2008).
28. A. Sergyeyev, B. M. Szablikowski, *Central extensions of cotangent universal hierarchy:* $(2 + 1)$*-dimensional bi-Hamiltonian systems*, Phys. Lett. A, **372**, № 47, 7016 – 7023 (2008).
29. A. K. Prykarpatski, O. Ye. Hentosh, Ya. A. Prykarpatsky, *The differential-geometric and algebraic aspects of the Lax – Sato theory*, Mathematics, **5**, № 4, MDPI, Basel, Switzerland (2017).
30. O. Ye. Hentosh, Ya. A. Prykarpatsky, D. Blackmore, A. K. Prykarpatski, *Dispersionless completely integrable heavenly type Hamiltonian flows and their differential-geometric structure*, Symmetry, Integrability and Geom.: Methods and Appl., **15**, Article 079 (2019); https: doi.org/10.3842/SIGMA.2019.079.
31. O. Ye. Hentosh, Ya. A. Prykarpatsky, D. Blackmore, A. K. Prykarpatski, *Lie-algebraic structure of Lax – Sato integrable heavenly equations and the Lagrange – d'Alembert principle*, **120**, Article 208 (2017); https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2017.06.003.
32. J. F. Plebański, *Some solutions of complex Einstein equations*, J. Math. Phys., **16**, № 12, 2395 – 2402 (1975).
33. S. V. Manakov, P. M. Santini, *Inverse scattering problem for vector fields and the Cauchy problem for the heavenly equation*, Phys. Lett. A, **359**, № 6, 613 – 619 (2006).
34. L. V. Bogdanov, V. S. Dryuma, S. V. Manakov, *Dunajski generalization of the second heavenly equation: dressing method and the hierarchy*, J. Phys. A: Math. Theor., **40**, № 48, 14383 – 14393 (2007).
35. M. Dunajski, *Anti-self-dual four-manifolds with a parallel real spinor*, Proc. Roy. Soc. A, **458**, 1205 – 1222 (2002).
36. M. Dunajski, L. J. Mason, P. Tod, *Einstein – Weyl geometry, the dKP equation and twistor theory*, J. Geom. Phys., **37**, № 1-2, 63 – 93 (2001).
37. M. P. Pavlov, *Integrable hydrodynamic chains*, J. Math. Phys., **44**, № 9, 4134 – 4156 (2003).

38. W. K. Schief, *Self-dual Einstein spaces via a permutability theorem for the Tzitzeica equation*, Phys. Lett. A, **223**, № 1-2, 55 – 62 (1996).
39. W. K. Schief, *Self-dual Einstein spaces and a discrete Tzitzeica equation. A permutability theorem link*, Symmetries and Integrability of Difference Equations, London Math. Soc., Lect. Notes Ser., **255**, 137 – 148 (1999).
40. K. Takasaki, T. Takebe, $\mathrm{SDiff}(2)$ *Toda equation – hierarchy, tau function and symmetries*, Lett. Math. Phys., **23**, № 3, 205 – 214 (1991).
41. K. Takasaki, T. Takebe, *Integrable hierarchies and dispersionless limit*, Rev. Math. Phys., **7**, № 5, P. 743 – 808 (1995).
42. А. Г. Рейман, М. А. Семенов-Тян-Шанский, *Интегрируемые системы: теоретико-групповой подход*, Ин-т компьютер. исслед., Москва, Ижевск (2003).
43. M. Blaszak, *Classical R-matrices on Poisson algebras and related dispersionless systems*, Phys. Lett. A, **297**, № 3-4, 191 – 195 (2002).
44. M. Blaszak, B. M. Szablikowski, *Classical R-matrix theory of dispersionless systems: II. $(2+1)$ dimension theory*, J. Phys. A: Math. and Gen., **35**, № 48, 10345 – 10364 (2002).
45. D. Blackmore, A. K. Prykarpatsky, V. Hr. Samoylenko, *Nonlinear dynamical systems of mathematical physics: spectral and symplectic integrability analysis*, World Sci., Hackensack (2011).
46. A. Alekseev, A. Z. Malkin, *Symplectic structure of the moduli space of flat connection on a Riemann surface*, Comm. Math. Phys., **169**, № 1, 99 – 119 (1995).
47. A. Pressley, G. Segal, *Loop groups*, Clarendon Press, London (1988).
48. M. Audin, *Lectures on gauge theory and integrable systems*, Gauge Theory and Symplectic Geometry, Kluwer (1997), p. 1 – 48.
49. O. Hentosh, Ya. Prykarpatsky, *The Lax – Sato integrable heavenly equations on functional supermanifolds and their Lie-algebraic structure*, European J. Math. (2019); https://doi.org/10.1007/s40879-019-00329-4.
50. I. A. B. Strachan, B. M. Szablikowski, *Novikov algebras and a classification of multicomponent Camassa – Holm equations*, Stud. Appl. Math., **133**, 84 – 117 (2014).
51. O. D. Artemovych, A. A. Balinsky, D. Blackmore, A. K. Prykarpatski, *Reduced pre-Lie algebraic structures, the weak and weakly deformed Balinsky – Novikov type symmetry algebras and related Hamiltonian operators*, Symmetry, **10**, Article 601 (2018).
52. O. D. Artemovych, D. Blackmore, A. K. Prykarpatski, *Examples of Lie and Balinsky – Novikov algebras related to Hamiltonian operators*, Top. Algebra and Appl., **6**, № 1, 43 – 52 (2018).
53. O. D. Artemovych, D. Blackmore, A. K. Prykarpatski, *Poisson brackets, Novikov – Leibniz structures and integrable Riemann hydrodynamic systems*, J. Nonlinear Math. Phys., **24**, № 1, 41 – 72 (2017).
54. D. Blackmore, Y. Prykarpatsky, J. Golenia, A. Prykarpatski, *Hidden symmetries of Lax integrable nonlinear systems*, Appl. Math., **4**, 95 – 116 (2013).
55. М. А. Семенов-Тян-Шанский, *Что такое классическая r-матрица?*, Функц. анализ и его прил., **17**, № 4, 17 – 33 (1983).
56. R. Abraham, J. Marsden, *Foundations of mechanics*, 2nd ed., Addison-Wesley Publ. Co., Inc., Redwood City, CA (1978).
57. V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Grad. Texts Math., vol. 60, Springer, New York (1978).
58. V. I. Arnold, B. A. Khesin, *Topological methods in hydrodynamics*, Appl. Math. Sci., vol. 125, Springer-Verlag, New York (1998).
59. T. Kambe, *Geometric theory of fluid flows and dynamical systems*, Fluid Dyn. Res., **30**, 331 – 378 (2002).
60. J. Marsden, T. Ratiu, A. Weinstein, *Reduction and Hamiltoninan structures on duals of semidirect product Lie algebras*, Contemp. Math., **28**, 55 – 100 (1984).
61. D. Holm, J. Marsden, T. Ratiu, A. Weinstein, *Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria*, Phys. Rep., **123**, № 1-2, 1 – 116 (1985).
62. V. I. Arnold, *Sur la geometrie differentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications a l'hydrodynamique des fluides parfaits*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **16**, № 1, 319 – 361 (1966).
63. D. Holm, B. Kupershmidt, *Poisson structures of superfluids*, Phys. Lett. A, **91**, 425 – 430 (1982).
64. E. A. Kuznetsov, A. V. Mikhailov, *On the topological meaning of canonical Clebsch variables*, Phys. Lett. A, **77**, № 1, 37 – 38 (1980).

65. B. A. Kupershmidt, T. Ratiu, *Canonical maps between semidirect products with applications to elasticity and superfluids*, Commun. Math. Phys., **90**, 235 – 250 (1983).
66. A. Weinstein, *Sophus Lie and symplectic geometry*, Expo. Math., **1**, 95 – 96 (1983).
67. A. Weinstein, *The local structure of Poisson manifolds*, J. Different. Geom., **18**, № 3, 523 – 557 (1983).
68. J. Marsden, A. Weinstein, *Reduction of symplectic manifolds with symmetry*, Rep. Math. Phys., **5**, № 1, 121 – 130 (1974).
69. Л. В. Богданов, *Интерполирующие дифференциальные редукции многомерных интегрируемых иерархий*, Теор. и мат. физика, **167**, № 3, 705 – 713 (2011).
70. L. V. Bogdanov, B. G. Konopelchenko, *On the heavenly equation and its reductions*, J. Phys. A: Math. and Gen., **39**, 11793 – 11802 (2006).
71. L. V. Bogdanov, M. V. Pavlov, *Linearly degenerate hierarchies of quasiclassical SDYM type*, J. Math. Phys., **58**, № 9 (2017).
72. Л. Мартинес Алонсо, А. Б. Шабат, *Гидродинамические редукции и решения универсальной иерархии*, Теор. и мат. физика, **140**, № 2, 216 – 229 (2004).

Одержано 04.03.21