DOI: 10.37863/umzh.v73i8.6627

УДК 517.53

М. В. Заболоцький, Т. М. Заболоцький (Львів. нац. ун-т ім. І. Франка)

ПРО ОДНУ ВЛАСТИВІСТЬ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕВАНЛІННИ

We prove the existience of entire functions f of an arbitrary lower order $\lambda \geq 0$ and the order $\rho = \lambda + 1$ such that

$$\varlimsup_{r\to+\infty} T(r+1, f)/T(r, f) > 1.$$

Obtained results show that the condition $\rho - \lambda < 1$ of Valiron's theorem can not be improved.

Доведено існування цілих функцій f довільного нижнього порядку $\lambda \geq 0$ і порядку $\rho = \lambda + 1$, для яких

$$\varlimsup_{r\to+\infty} T(r+1, f)/T(r, f) > 1.$$

Отримані результати свідчать про непокращуваність умови $\rho - \lambda < 1$ однієї теореми Валірона.

1. Вступ. Нехай α — визначена невід'ємна на $[0, +\infty)$ функція. Число

$$\rho[\alpha] = \rho = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln^+ \alpha(r)}{\ln r} \tag{1}$$

називається порядком функції α. Якщо в (1) замінити верхню границю на нижню, то отримаємо нижній порядок $\lambda[\alpha]$. За умови $0 < \rho < +\infty$ число

$$\sigma[f] = \sigma = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\alpha(r)}{r^\rho}$$

називається величиною типу α. Кажемо, що функція α має мінімальний тип, якщо $\sigma = 0$, нормальний, якщо $0 < \sigma < +\infty$, і максимальний, якщо $\sigma = +\infty$.

Нехай $f = f_1/f_2$ — мероморфна в $\mathbb{C}$ (далі мероморфна) функція, f_1 і f_2 — цілі функції, $T(r, f)$ — неванліннова характеристика f (див., наприклад, [1, с. 24–27]). Порядок, нижній порядок, тип і величину типу мероморфної функції f визначаємо як відповідні величини функції $T(r, f)$.

У цій статті розглядається одна властивість неванліннової характеристики $T(r, f)$.

Теорема A [2, с. 271]. *Нехай f — мероморфна функція порядку ρ і нижнього порядку λ. Якщо $\rho - \lambda < 1$, то*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{T(r+1, f)}{T(r, f)} = 1. \tag{2}$$

Виникає природне питання: наскільки умова $\rho - \lambda < 1$ в теоремі A є непокращуваною і чи не можна її замінити на $\rho - \lambda \leq 1$?

Із міркувань [1, с. 208, 209] випливає істинність такого твердження.

Теорема Б. *Нехай* f *— мероморфна функція*, $\gamma \geq 0$. *Якщо*:

а) $T(r, f)/r^{\gamma} \to +\infty$ *і* $T(r, f) = O(r^{\gamma+1})$, $r \to +\infty$,

або

б) $\underline{\lim}_{r \to +\infty}(r, f)/r^{\gamma} > 0$ *і* $T(r, f) = o(r^{\gamma+1})$, $r \to +\infty$,

то виконується (2).

Легко бачити, що за умов теореми Б нижній порядок f може дорівнювати γ, порядок — $\gamma + 1$, а її тип є нормальним (див. п. а)) або мінімальним (див. п. б)), тобто твердження теореми А правильне за умови $\rho[f] - \lambda[f] = 1$. З іншого боку, в даній статті буде показано, що (2) може не виконуватись за умови $\rho - \lambda = 1$ навіть для цілих функцій.

2. Основні результати та допоміжне твердження. Сформулюємо дві теореми, які показують непокращуваність умови теореми А, а отже, і теореми Б.

Теорема 1. *Існує ціла функція* f *довільного нижнього порядку* $\lambda > 0$, *порядку* $\rho = \lambda + 1$ *і нормального типу*, *для якої не виконується* (2).

Теорема 2. *Існує ціла функція* f, $\lambda[f] = 0$, $\rho[f] = 1$, *для якої не виконується* (2).

***Зауваження* 1.** З умов а) теореми Б випливає, що функція f з теореми 1 повинна задовольняти співвідношення $\underline{\lim}_{r \to +\infty} T(r, f)/r^{\lambda} < +\infty$, а функція f з теореми 2 — мати максимальний тип.

***Зауваження* 2.** В [1, с. 201, 202] розглянуто приклад мероморфної функції f максимального типу першого порядку, для якої, як неважко показати, не виконується умова (2).

При побудові прикладів функцій f ми істотно використовуємо такий результат.

Теорема В [3]. *Нехай* Φ *— неспадна опукла відносно логарифма на* $[1, +\infty)$ *функція*, $\Phi(r)/\ln r \to +\infty$, $r \to +\infty$. *Тоді існує ціла функція* f *така, що*

$$T(r, f) \sim \Phi(r), \quad r \to +\infty.$$

3. Доведення теореми 1. Завдяки теоремі В, щоб показати непокращуваність умови $\rho - \lambda <$ < 1 в теоремі А, достатньо побудувати неспадну опуклу відносно логарифма на $[1, +\infty)$ функцію ϕ таку, що $\rho[\phi] - \lambda[\phi] = 1$ і $\underline{\lim}_{r \to +\infty} \phi(r+1)/\phi(r) > 1$.

1. Розглянемо спочатку випадок $\lambda > 1$. Нехай (r_n) — така послідовність додатних чисел, що $r_1 = \lambda + 1$, $r_{n+1}/r_n^{\lambda/(\lambda-1)} > 2$. Покладемо $r_0^* = 1$ і для $n \in \mathbb{N}$

$$\phi(r) \begin{cases} r^{\lambda}, & \text{якщо} \quad r_{n-1}^* \leq r \leq r_n, \\ r_n^{\lambda}(r - r_n + 1), & \text{якщо} \quad r_n \leq r \leq r_n^*, \end{cases}$$

де $r_n^* \in \left[(r_n^{\lambda}/\lambda)^{1/(\lambda-1)}, r_n^{\lambda/(\lambda-1)}\right]$ така, що

$$\phi(r_n^*) = (r_n^*)^{\lambda}, \tag{3}$$

$$\phi(r) > r^{\lambda}, \quad r \in (r_n, r_n^*), \tag{4}$$

$$\phi(r_n) < \lambda(r_n^*)^{\lambda-1}. \tag{5}$$

Покажемо існування такої точки r_n^*. Для функції

$$g(r) = r^{\lambda} - r_n^{\lambda}(r - r_n + 1), \quad r \geq r_n,$$

маємо $g'(r) = \lambda r^{\lambda-1} - r_n^\lambda = 0$ при $r = \tilde{r}_n = \left(\dfrac{r_n^\lambda}{\lambda}\right)^{1/\lambda-1}$, $g'(r) < 0$ на $(r_n, \tilde{r}_n)$, $g'(r) > 0$ на $(\tilde{r}_n, +\infty)$.

Оскільки $g(r_n) = 0$, $g(r_n^{\lambda/(\lambda-1)}) = r_n^{\lambda+1} - r_n^\lambda > 0$, то існує $r_n^* \in (\tilde{r}_n, r_n^{\lambda/(\lambda-1)})$ така, що $g(r_n^*) = 0$, $g(r) < 0$ на (r_n, r_n^*), $g'(r_n^*) > 0$, тобто виконуються умови (3) – (5).

Враховуючи, що

$$\begin{aligned} &r\phi'(r) = \lambda r^\lambda \quad \text{зростає на} \quad [r_{n-1}^*, r_n],\\ &r\phi'(r) = r r_n^\lambda \quad \text{зростає на} \quad [r_n, r_n^*],\\ &r_n\phi'(r_n - 0) = \lambda r_n^\lambda \le r_n^{\lambda+1} = r_n\phi'(r_n + 0),\\ &r_n^*\phi'(r_n^* - 0) = r_n^* r_n^\lambda \le \lambda(r_n^*)^\lambda = r_n^*\phi'(r_n^* + 0) \quad (\text{див. (5)}), \end{aligned}$$

отримуємо опуклість відносно логарифма на $[1, +\infty)$ функції ϕ.

Оскільки для функції $G(r) = r^{\lambda+1} - \phi(r)$ маємо $G(r_n) = r_n^{\lambda+1} - r_n^\lambda > 0$, $G'(r) = (\lambda + 1)r^\lambda - r_n^\lambda > 0$ для $r \in [r_n, r_n^*]$, то $\phi(r) \le r^{\lambda+1}$ для $r \in [r_n, r_n^*]$.

З вигляду функції ϕ та (4) отримуємо, що $r^\lambda \le \phi(r) \le r^{\lambda+1}$, $r \in [1, +\infty)$, тобто порядок ϕ не перевищує $\lambda + 1$, а нижній порядок не менший за λ. Позаяк

$$\begin{aligned} &\rho[\phi] = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\phi(r)}{\ln r} \ge \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\phi(2r_n)}{\ln(2r_n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(r_n^{\lambda+1} + r_n^\lambda)}{\ln(r_n)} = \lambda + 1,\\ &\lambda[\phi] = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln\phi(r)}{\ln r} \le \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\phi(r_n)}{\ln r_n} = \lambda, \end{aligned}$$

маємо $\rho[\phi] = \lambda + 1$, $\lambda[\phi] = \lambda$ і

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\phi(r+1)}{\phi(r)} \ge \lim_{n\to+\infty} \frac{\phi(r_n+1)}{\phi(r_n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2r_n^\lambda}{r_n^\lambda} = 2,$$

що і потрібно було показати.

2. У випадку $0 < \lambda \le 1$ послідовність додатних чисел вибираємо так, щоб $r_1 = (4/\lambda)^{2/\lambda}$, $r_{n+1}/r_n^{8/\lambda} > 2$. Приймемо $r_0^* = 1$, $\hat{r}_n = r_n^2\sqrt{r_n}$ і для $n \in \mathbb{N}$

$$\phi(r) = \begin{cases} r^\lambda, & \text{якщо} \quad r_{n-1}^* \le r \le r_n,\\ \phi(r_n)(r - r_n + 1), & \text{якщо} \quad r_n \le r \le \hat{r}_n,\\ \phi(\hat{r}_n)\left(\left(r - \dfrac{\lambda\hat{r}_n}{2}\right)^{\lambda/2} + 1 - \left(\hat{r}_n - \dfrac{\lambda\hat{r}_n}{2}\right)^{\lambda/2}\right), & \text{якщо} \quad \hat{r}_n \le r \le r_n^*, \end{cases}$$

де $r_n^* \in (\hat{r}_n, r_n^{8/\lambda})$ така, що

$$\phi(r_n^*) = (r_n^*)^\lambda, \tag{6}$$

$$\phi(r) > r^\lambda, \quad r \in (\hat{r}_n, r_n^*), \tag{7}$$

$$\phi(\hat{r}_n)\frac{1}{2\left(r_n^* - \dfrac{\lambda\hat{r}_n}{2}\right)^{1-\lambda/2}} < (r_n^*)^{\lambda-1}. \tag{8}$$

Покажемо існування точки r_n^*. Для функції

$$g(r) = r^\lambda - \phi(r) = r^\lambda - \phi(\hat{r}_n)\left(\left(r - \frac{\lambda\hat{r}_n}{2}\right)^{\lambda/2} + 1 - \left(\hat{r}_n - \frac{\lambda\hat{r}_n}{2}\right)^{\lambda/2}\right), \quad r \geq \hat{r}_n,$$

маємо $g'(r) = \dfrac{\lambda}{r^{1-\lambda}}\left(1 - \dfrac{\phi(\hat{r}_n)/2}{r^{\lambda/2}}\left(1 - \dfrac{\lambda\hat{r}_n}{2r}\right)^{\lambda/2-1}\right) = \dfrac{\lambda}{r^{1-\lambda}}\alpha(r)$, де $\alpha(r)$ зростає до 1 при $r \to +\infty$,

$$\alpha(\hat{r}_n) = 1 - \frac{r_n^{5/2+\lambda}\left(1 - \dfrac{r_n - 1}{r_n^2\sqrt{r_n}}\right)}{2\left(1 - \dfrac{\lambda}{2}\right)^{1-\lambda/2} r_n^{5\lambda/4}} < 1 - \frac{r_n^{5/2-\lambda/4}}{4} < 0,$$

$$\alpha\left(r_n^{2+5/\lambda}\right) > 1 - \frac{r_n^{5/2+\lambda}2^{1-\lambda/2}}{2r_n^{\lambda/2(2+5/\lambda)}} = 1 - \frac{1}{2^{\lambda/2}} > 0.$$

Отже, існує $\tilde{r}_n \in \left(\hat{r}_n, r_n^{2+5/\lambda}\right)$ таке, що $g'(\tilde{r}_n) = 0$, $g'(r) < 0$ на $(\hat{r}_n, \tilde{r}_n)$, $g'(r) > 0$ для $r > \tilde{r}_n$.

Оскільки

$$g(\hat{r}_n) = (\hat{r}_n)^\lambda - \phi(\hat{r}_n) = (\hat{r}_n)^\lambda - r_n^\lambda\hat{r}_n\left(1 - \frac{r_n - 1}{r_n^2\sqrt{r_n}}\right) < \hat{r}_n\left(\frac{1}{(\hat{r}_n)^{1-\lambda}} - \frac{r_n^\lambda}{2}\right) < 0,$$

$$g(r_n^{8/\lambda}) > r_n^8 - \phi(\hat{r}_n)r_n^4\left(1 - \frac{\lambda\hat{r}_n}{2r_n^{8/\lambda}}\right)^{\lambda/2} > r_n^8 - r_n^{\lambda+6.5}\left(1 - \frac{r_n - 1}{r_n^2\sqrt{r_n}}\right) > 0,$$

то існує $r_n^* \in (\tilde{r}_n, r_n^{8/\lambda})$ таке, що $g(r_n^*) = 0$, $g(r) < 0$ на $(\hat{r}_n, r_n^*)$, $g'(r_n^*) > 0$, тобто виконуються умови (6) – (8).

Враховуючи, що

$$\begin{aligned}
&r\phi'(r) = \lambda r^\lambda \quad \text{зростає на} \quad [r_{n-1}^*, r_n],\\
&r\phi'(r) = r r_n^\lambda \quad \text{зростає на} \quad [r_n, \hat{r}_n],\\
&r_n\phi'(r_n - 0) = \lambda r_n^\lambda \leq r_n^{\lambda+1} = r_n\phi'(r_n + 0),\\
&r\phi'(r) = \frac{\lambda}{2}\phi(\hat{r}_n)\frac{r}{\left(r - \dfrac{\lambda\hat{r}_n}{2}\right)^{1-\lambda/2}} \quad \text{зростає на} \quad [\hat{r}_n, r_n^*],
\end{aligned}$$

оскільки

$$\left(\frac{r}{\left(r-\dfrac{\lambda\hat{r}_n}{2}\right)^{1-\lambda/2}}\right)' = \frac{\frac{\lambda}{2}(r-\hat{r}_n)}{\left(r-\dfrac{\lambda\hat{r}_n}{2}\right)^{2-\lambda/2}} \geq 0;$$

$$\hat{r}_n\phi'(\hat{r}_n-0) = \hat{r}_n r_n^\lambda \leq \hat{r}_n\frac{\lambda}{2}r_n^\lambda(\hat{r}_n-r_n+1)\frac{1}{\left(\hat{r}_n-\dfrac{\lambda\hat{r}_n}{2}\right)^{1-\lambda/2}} = \hat{r}_n\phi'(\hat{r}_n+0),$$

оскільки

$$\frac{\lambda}{2}\frac{(\hat{r}_n)^{\lambda/2}\left(1-\dfrac{r_n-1}{r_n^2\sqrt{r_n}}\right)}{(1-\lambda/2)^{1-\lambda/2}} \geq \frac{\lambda}{4}(\hat{r}_n)^{\lambda/2} > 1,$$

і

$$r_n^*\phi'(r_n^*-0) = r_n^*\frac{\phi(\hat{r}_n)\lambda}{2\left(r_n^*-\dfrac{\lambda\hat{r}_n}{2}\right)^{1-\lambda/2}} \leq (r_n^*)^\lambda\lambda = r_n^*\phi'(r_n^*+0) \quad \text{(див. (8))},$$

отримуємо опуклість відносно логарифма на $[1,+\infty)$ функції ϕ.

Для функції $G(r) = r^{\lambda+1}-\phi(r)$ маємо $G(r_n) = r_n^{\lambda+1}-r_n^\lambda > 0$, $G'(r) = (\lambda+1)r^\lambda - r_n^\lambda > 0$ на $[r_n,\hat{r}_n]$, $G'(r) = (\lambda+1)r^\lambda - \dfrac{\lambda\phi(\hat{r}_n)}{2\left(r-\dfrac{\lambda\hat{r}_n}{2}\right)^{1-\lambda/2}} \geq G'(\hat{r}_n) = (\lambda+1)(\hat{r}_n)^\lambda -$

$$-\frac{\lambda}{2}r_n^\lambda\frac{\hat{r}_n\left(1-\dfrac{r_n-1}{\hat{r}_n}\right)}{(\hat{r}_n-\frac{\lambda}{2}\hat{r}_n)^{1-\lambda/2}} > (\lambda+1)(\hat{r}_n)^\lambda - \lambda(\hat{r}_n)^{\lambda/2}r_n^\lambda = (\lambda+1)r_n^{5\lambda/2} - \lambda r_n^{9\lambda/4} > 0 \text{ на } [\hat{r}_n, r_n^*].$$

Отже, $G(r) > 0$, тобто $\phi(r) < r^{\lambda+1}$ при $r \in [r_n, r_n^*]$. З вигляду функції ϕ та (7) отримуємо

$$r^\lambda \leq \phi(r) \leq r^{\lambda+1},\ r \in [1,+\infty). \tag{9}$$

Далі,

$$\rho[\phi] = \overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\ln\phi(r)}{\ln r} \geq \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\phi(2r_n)}{\ln(2r_n)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(r_n^{\lambda+1}-r_n^\lambda)}{\ln(r_n)} = \lambda+1,$$

$$\lambda[\phi] = \underline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\ln\phi(r)}{\ln r} \leq \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\phi(r_n)}{\ln r_n} = \lambda.$$

Враховуючи (9), маємо $\rho[\phi] = \lambda+1$, $\lambda[\phi] = \lambda$. Нарешті,

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\phi(r+1)/\phi(r) \geq \lim_{n\to+\infty}\phi(r_n+1)/\phi(r_n) = 2 > 1,$$

що повністю доводить теорему 1.

4. Доведення теореми 2. Завдяки результату роботи [3], як і при доведенні теореми 1, нам достатньо побудувати неспадну опуклу відносно логарифма на $[1,+\infty)$ функцію ϕ таку, що $\lambda[\phi] = 0$, $\rho[\phi] = 1$, $\phi(r) \neq O(r)$ при $r \to +\infty$ і $\overline{\lim}_{r\to+\infty}\phi(r+1)/\phi(r) > 1$. Нехай (r_n) — послідовність таких додатних чисел, що $r_1 = e^2$, $r_{n+1}/r_n^{2r_n\ln r_n} > 2$, $\hat{r}_n = 2r_n - 1$. Покладемо $r_0^* = 1$ і для $n \in \mathbb{N}$

$$\phi(r) = \begin{cases} \ln^2 r, & \text{якщо } r^*_{n-1} \le r \le r_n, \\ \phi(r_n)(r - r_n + 1), & \text{якщо } r_n \le r \le \hat{r}_n, \\ \phi(\hat{r}_n)(1 + 2\ln(r/\hat{r}_n)), & \text{якщо } \hat{r}_n \le r \le r^*_n, \end{cases}$$

де $r^*_n \in \left(r_n^{r_n \ln r_n}, r_n^{2r_n \ln r_n}\right)$ така, що

$$\phi(r^*_n) = \ln^2 r^*_n, \tag{10}$$

$$\phi(r) > \ln^2 r, \quad r \in (\hat{r}_n, r^*_n), \tag{11}$$

$$\phi(\hat{r}_n) < \ln r^*_n. \tag{12}$$

Покажемо існування такої точки r^*_n. Для функції

$$g(r) = \ln^2 r - \phi(r) = \ln^2 r - r_n \ln^2 r_n(1 + 2\ln(r/\hat{r}_n), \quad r \ge \hat{r}_n,$$

маємо

$$rg'(r) = 2\ln r - 2r_n \ln^2 r_n = 0 \quad \text{при} \quad r = \tilde{r}_n = r_n^{r_n \ln r_n},$$

$$g'(r) < 0 \quad \text{на} \quad (\hat{r}_n, \tilde{r}_n),$$

$$g'(r) > 0 \quad \text{на} \quad (\tilde{r}_n, +\infty).$$

Оскільки $g(\hat{r}_n) = \ln^2 \hat{r}_n - r_n \ln^2 r_n < 0$, $g(r_n^{2r_n \ln r_n}) = r_n \ln^2 r_n(2\ln \hat{r}_n - 1) > 0$, то існує точка $r^*_n \in (\tilde{r}_n, \tilde{r}_n^2)$ така, що $g(r^*_n) = 0$, $g(r) < 0$ на $(\hat{r}_n, r^*_n)$, $g'(r^*_n) > 0$, тобто виконуються умови (10)–(12).

Далі,

$$r\phi'(r) = \begin{cases} 2\ln r & \text{на} \quad [r^*_{n-1}, r_n], \\ r\ln^2 r_n & \text{на} \quad [r_n, \hat{r}_n], \\ 2\phi(\hat{r}_n) & \text{на} \quad [\hat{r}_n, r^*_n], \end{cases}$$

$$r_n\phi'(r_n - 0) = 2\ln r_n \le r_n \ln^2 r_n = r_n\phi'(r_n + 0),$$

$$\hat{r}_n\phi'(\hat{r}_n - 0) = \hat{r}_n \ln^2 r_n \le 2r_n \ln^2 r_n = \hat{r}_n\phi'(\hat{r}_n + 0),$$

$$r^*_n\phi'(r^*_n - 0) = 2\phi(\hat{r}_n) \le 2\ln r^*_n = r^*_n\phi'(r^*_n + 0) \quad \text{(див. (12))}.$$

Звідси видно, що ϕ — опукла відносно логарифма на $[1, +\infty)$ функція.

Покажемо, що

$$\ln^2 r \le \phi(r) \le 2r\ln^2 r, \quad r \in [1, +\infty). \tag{13}$$

Для функції $G(r) = 2r\ln^2 r - \phi(r)$ маємо $G(r_n) > 0$, $G'(r) = 2\ln^2 r + 4\ln r - \ln^2 r_n > 0$ на $[r_n, \hat{r}_n]$, $G'(r) = 2\ln^2 r + 4\ln r - 2\phi(\hat{r}_n)/r \ge G'(\hat{r}_n) > 0$ на $[\hat{r}_n, r^*_n]$, а отже, $G(r) > 0$, тобто $\phi(r) < 2r\ln^2 r$ на $[r_n, r^*_n]$.

З вигляду ϕ та (11) отримуємо (13), а отже, $\lambda[\phi] = 0$, $\rho[\phi] \le 1$. Оскільки

$$\rho[\phi] \ge \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln \phi(\hat{r}_n)}{\ln \hat{r}_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(r_n \ln^2 r_n)}{\ln(2r_n - 1)} = 1,$$

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\phi(r+1)}{\phi(r)} \geq \lim_{n\to+\infty}\frac{\phi(r_n+1)}{\phi(r_n)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2\ln^2 r_n}{\ln^2 r_n} = 2,$$

то $\rho[\phi] = 1$.

Теорему 2 доведено.

Література

1. А. А. Гольдберг, И. В. Островский, *Распределение значений мероморфных функций*, Москва, Наука (1970).
2. R. Nevanlinna, *Analytic function*, Springer-Verlag, New York (1970).
3. J. Clunie, *On integral functions having prescribed asymptotic growth*, Can. J. Math., **17**, № 3, 396 – 404 (1965).

Одержано 16.03.21