О существовании собственных значений интегральных уравнений, ядра которых являются целой рациональной функцией параметра

Б. М. Гагаев

За последнее время появился ряд работ, посвященных изучению линейных интегральных уравнений, ядра которых являются функцией параметра, т. е. уравнений вида

$$\varphi(x)=\int_a^b L(x, y, \lambda)\varphi(y)\,dy+f(x), \tag{1}$$

где $\varphi(x)$ — искомая функция.

Вопрос о нахождении необходимых и достаточных условий существования собственных значений был изучен лишь для частного вида этих уравнений. Так, Д. Ф. Харазов [1] доказал, что уравнение вида

$$\varphi(x)=\int_a^b \sum_{s=0}^{2}\lambda^s G_s(x, y)\varphi(y)\,dy,$$

если $G_s(x, y)$ $(s=0, 1, 2, \ldots)$ попарно ортогональны, т. е. удовлетворяют условию

$$\int_a^b G_r(x, z)\,G_s(z, y)\,dz=0 \qquad (r\neq s) \text{ и } a\leqslant x, y\leqslant b,$$

тогда и только тогда имеет λ_0 собственным значением, если хотя бы для одного числа $s\,(s=1, 2)\,\lambda_0^s$ является собственным значением ядра $G_s(x, y)$.

Нетрудно найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы уравнение (1) с ядром, являющимся целой рациональной функцией параметра λ, имело собственные значения. Эти условия являются обобщением известного условия Лалеско [2], для того чтобы уравнение

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b G(x, y)\varphi(y)\,dy+f(x) \tag{2}$$

не имело собственных значений. Условие Лалеско, как известно, состоит в следующем: чтобы уравнение (2) не имело собственных значений, необходимо и достаточно равенство нулю всех следов ядра $G(x, y)$, начиная с третьего.

Рассмотрим уравнение (1) при условии, что $L(x, y, \lambda)$ — целая рациональная функция параметра λ. Предположим, что ядро $L(x, y, \lambda)$ удовлетворяет условиям: 1) при x, y, лежащих в квадрате

$$D\begin{Bmatrix} a \leqslant x \leqslant b \\ a \leqslant y \leqslant b \end{Bmatrix},$$

непрерывно относительно переменных x, y или же имеет разрывы, допускаемые в теории линейных интегральных уравнений;

2) для тех же значений x, y и λ, лежащего в любой замкнутой ограниченной области B, лежащей в комплексной плоскости, ядро ограничено.

Как показал З. И. Халилов [3], при этих условиях на уравнение (1) можно распространить теорию Фредгольма; резольвента уравнения, как и в случае Фредгольма, имеет вид

$$R(x, y, \lambda) = \frac{D\begin{pmatrix} x \\ y, \ \lambda \end{pmatrix}}{D(\lambda)},$$

где $D\begin{pmatrix} x \\ y, \lambda \end{pmatrix}$ и $D(\lambda)$ целые функции, аналогичные функциям Фредгольма. Отличие состоит в том, что в случае уравнения (1) $D(\lambda)$ может тождественно равняться нулю. В этом случае уравнение не имеет решения ни при какой функции $f(x)$, ни при каком значении λ.

З. И. Халилов [3] показал, что для $D(\lambda)$ мажорантой является ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} [M(\lambda)]^n (b-a)^n \cdot \frac{n^{\frac{n}{2}}}{n!}, \tag{3}$$

где $M(\lambda)$ удовлетворяет условию, что при x, y, лежащих в квадрате D,

$$|L(x, y, \lambda)| \leqslant M(\lambda).$$

Очевидно, за $M(\lambda)$ можно взять целую рациональную функцию λ той же степени, что $L(x, y, \lambda)$. Отсюда сразу следует, что ряд (3) является целой функцией относительно $M(\lambda)$, род которой не более 2. Следовательно, если $L(x, y, \lambda)$ многочлен относительно λ степени m, род $D(\lambda)$ не более $2m$.

Если $D(\lambda)$ ни при каких значениях не обращается в нуль, то

$$D(\lambda) = e^{\sum\limits_{s=0}^{2m} a_s \lambda^s},$$

а потому

$$\ln D(\lambda) = \sum_{s=0}^{2m} a_s \lambda^s.$$

Но так же, как в случае Фредгольма,

$$\frac{d^n \ln D(\lambda)}{d\lambda^n} = -\frac{d^n}{d\lambda^n} \int_a^b R(x, x, \lambda)\, dx \qquad (n > 0)$$

и, следовательно,

$$\ln D(\lambda) = \ln D(0) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n A_n}{n},$$

где A_n получаются из коэфициентов разложения резольвенты $R(x, y, \lambda)$ при λ^n аналогично, как в случае Фредгольма, а именно: если

$$R(x, y, \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} L^{(m)}(x, y, \lambda),$$

то

$$A_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\sum_{m=1}^{\infty}\int_a^b L^{(m)}(x, x, \lambda)\, dx\right]_{\lambda=0},$$

где

$$L^{(m)}(x, y, \lambda) = \int_a^b L(x, z, \lambda)\, L^{(m-1)}(z, y, \lambda)\, dz.$$

Отличие от случая Фредгольма состоит в том, что для уравнения Фредгольма A_n всегда имеют конечные значения, а в случае же уравнения (1) A_n могут обращаться в бесконечность. В последнем случае $D(\lambda)$ тождественно обращается в нуль или $\lambda = 0$ является собственным значением. Отсюда получаем теорему.

Теорема 1. *Если $D(\lambda)$ не равно тождественно нулю, то для того, чтобы ядро $L(x, y, \lambda)$, являющееся многочленом степени m относительно λ, не имело собственных значений, необходимо и достаточно, чтобы при $\lambda = 0$ все производные по λ выражения*

$$\int_a^b R(x, x, \lambda)\, dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} L^{(n)}(x, x, \lambda)\, dx,$$

начиная с $2m+1$, были равны нулю.

Если

$$L(x, y) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i G_i(xy)$$

и все $G_i(xy)$ симметрические функции, то нетрудно видеть, что

$$A_n = \sum_{r=n}^{\infty} \frac{r!}{(r-n)!} \sum_{s_1+2s_2+\ldots ms_m=n} \frac{1}{s_m!\, s_{(m-1)}! \ldots s_1!} \times$$

$$\times \overbrace{\int_a^b \cdots \int}\, G_0^{(r-n)}(x, z_1)\, G_1^{(s_1)}(z, z_2) \ldots G_m^{(s_m)}(z_m, x)\, dz_1 \ldots dz_m\, dx.$$

Если бы оказалось, что ряды, определяющие A_n, расходятся, то $D(\lambda)$ было бы тождественно равно нулю или же $D(0)$ было бы равно нулю.

Легко проверить, имеет ли место последний случай. Действительно, при $\lambda = 0$ ядро $L(x, y, \lambda)$ обращается в $G_0(x, y)$, имеющее в этом случае собственным значением $\lambda = 1$.

Если ядра $G_i(x, y)$ не симметрические, то выражения для A_n будут иметь более сложный вид, но получить их также легко. Из теоремы 1 легко получить достаточные условия для существования собственных значений.

Теорема 2. *Если все ядра $G_i(x, y) > 0$ при $a \leqslant x, y \leqslant b$, то ядро $L(x, y, \lambda)$ имеет по крайней мере одно собственное значение или для него $D(\lambda)$ тождественно равно нулю.*

Действительно, в этом случае ни один из коэфициентов A_n не может равняться нулю.

На основании теоремы 1 легко также доказать следующую теорему, доказанную З. И. Халиловым [4].

Теорема 3. *Если $G_0(x, y)$ и $G_1(x, y)$ симметрические ядра и ядро $G_0(x, y)$ определенно положительно, то ядро $L(x, y, \lambda) = G_0(x, y) + \lambda G_1(x, y)$ имеет по крайней мере одно собственное значение или для него $D(\lambda)$ тождественно равно нулю.*

Действительно, в этом случае

$$A_{2n} = \int_a^b G_1^{(2n)}(x, x)\,dx + \int_a^b \int_a^b \sum_{r=2n+1}^{\infty} \frac{r!}{(2n)!\,(r-2n)!} G_0^{(r-2n)}(x, z)\, G_1^{(2n)}(z, x)\, dz\, dx.$$

Все ядра $G_0^{(r-2n)}(x, y)$ также определенно положительные, следовательно, вследствие симметричности $G_1(x, y)$

$$\int_a^b \int_a^b G_0^{(r-2n)}(x, z)\, G_1^{(2n)}(z, x)\, dx\, dx =$$

$$= \int_a^b \int_a^b \int_a^b G_0^{(r-2n)}(x, z)\, G_1^{(n)}(z, y)\, G_1^{(n)}(y, x)\, dy\, dz\, dx =$$

$$= \int_a^b \int_a^b \int_a^b G_0^{(r-2n)}(x, z)\, G_1^{(n)}(z, y)\, G_1^{(n)}(x, y)\, dz\, dx\, dy > 0.$$

Так же

$$\int_a^b G_1^{(2n)}(x, x)\, dx > 0,$$

а потому при всех n A_{2n} имеют конечные значения, отличные от нуля, или стремятся к бесконечности, что и доказывает теорему.

Можно доказать и ряд других достаточных условий существования собственных значений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Ф. Харазов, Некоторые свойства собственных функций и резольвенты интегральных уравнений с рациональными относительно параметра ядрами, Сообщения Академии наук Грузинской ССР, т. VIII, № 4, 1947.

2. T. Lalesck o, Introduction à lai théorie des équations intégrales, 1912, стр. 31—32.

3. З. И. Халилов, Об одном общем методе решения задач о собственных значениях теории колебания двумерной упругой системы, Труды сектора математики Академии наук Азербайджанской ССР, 1946.

4. З. И. Халилов, Об интегральном уравнении Фредгольма с ядром, линейным относительно параметра, Труды сектора математики Академии наук Азербайджанской ССР, т. II, 1946.

Поступила 25 мая 1951 г.

Казань