# Нормальные ряды как решения линейных диференциальных уравнений в случае кратных корней характеристического уравнения

К. Я. Латышева

Имеем линейное диференциальное уравнение порядка $n$ и целого положительного ранга $p$

$$\frac{d^n y}{dx^n}+\sum_{i=1}^{n} P_i(x)\frac{d^{n-i}y}{dx^{n-i}}=0, \tag{1}$$

коэфициенты которого раскладываются в сходящиеся или асимптотические ряды по убывающим степеням независимого переменного

$$P_i(x)=x^{\beta_i}\sum_{s=0}^{\infty} P_{is}x^{-s}$$

$(1\leqslant i\leqslant n;\ \ P_{i0}\neq 0)$. Как известно [1], [2], ранг уравнения (1) положителен тогда, когда $x=\infty$ является иррегулярной особой точкой уравнения (1).

Для таких уравнений могут существовать формальные решения в виде нормальных рядов Томе

$$y\sim e^{Q(x)}x^r\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{-i}, \tag{2}$$

где функция

$$Q(x)=\sum_{s=1}^{q}\frac{\alpha_{q-s}x^s}{s} \tag{3}$$

— многочлен, целая степень $q$ которого подчиняется неравенству [5]

$$1+\min\frac{\beta_n-\beta_s}{n-s}\leqslant q\leqslant 1+k=p \tag{4}$$

$(0\leqslant s\leqslant n-1)$, где $k=\max\frac{\beta_i-\beta_0}{i}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ — подранг [2] уравнения (1); ряды $\sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i x^{-i}$ расходятся.

Коэфициент $\alpha_0$ при наивысшей степени $x$ функции $Q(x)$ определяется из характеристического уравнения [4]

$$\sum_{i=0}^{n}\tau_i\alpha_0^{n-i}=0, \tag{5}$$

коэфициенты которого равны

$$\tau_i=\begin{cases} P_{i0}, & \text{если } \dfrac{\beta_i}{k}=i;\\ 0, & \text{если } \dfrac{\beta_i}{k}\neq i.\end{cases}$$

Когда корни уравнения (5) все различны, то каждому значению $\alpha_0^{(\nu)}$ корня $\alpha_0$ соответствуют определенная функция $Q_\nu(x)$ и определенный ряд (2), отличные от других подобных функций и рядов, вследствие чего уравнение (1) имеет $n$ различных решений вида (2).

Для случая, когда среди корней характеристического уравнения имеются равные, Фабри [6] и Пуанкаре [1] ввели новый вид формальных решений, а именно: поднормальные ряды вида

$$e^{Q\left(x^{\frac{1}{\mu}}\right)} x^r \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{-\frac{i}{\mu}}, \tag{6}$$

где $\mu$ — некоторое целое число $\geqslant 2$, а $Q\left(x^{\frac{1}{\mu}}\right)$ — многочлен некоторой целой степени от $x^{\frac{1}{\mu}}$.

Подобные решения более точного вида дали Лав [7] — для диференциальных уравнений второго и третьего порядков и любого ранга — и В. В. Хорошилов [8] — для уравнений второго порядка и ранга, равного единице.

В данной статье рассматривается вопрос, когда в случае кратных корней характеристического уравнения для диференциальных уравнений (1) любого порядка и любого ранга не существует решений вида (6), а имеются решения только в виде нормальных рядов Томе [вида (2) или более общих — с логарифмическими членами]; даны условия, при выполнении которых ряды (2) сходятся для достаточно больших значений независимого переменного, и формальные решения вида (2) превращаются в настоящие, так называемые нормальные решения.

## § 1. Необходимые и достаточные условия существования решений вида (2) в случае кратных корней характеристического уравнения (5)

Применим к уравнению (1) преобразование

$$y = e^{Q(x)} u, \tag{7}$$

в котором функция $Q(x)$, определяемая равенством (3), имеет неопределенными коэфициенты $\alpha_{q-s}$ $(1 \leqslant s \leqslant q)$ и вполне определенную степень, равную рангу $p$ уравнения (1); последнее предположение законно в силу неравенств (4).

Диференциальное уравнение относительно неизвестной функции $u$ имеет вид

$$\frac{d^n u}{dx^n} + \sum_{i=1}^{n} T_i(x) \frac{d^{n-i} u}{dx^{n-i}} = 0, \tag{8}$$

причем в силу характера коэфициентов $P_i(x)$ уравнения (1) и характера функции $Q(x)$ коэфициенты уравнения (8) могут быть представлены в виде

$$T_i(x) = x^{ki}\left(b_{i0} + \frac{b_{i1}}{x} + \dots\right),$$

где, при неопределенных $\alpha_{p-s}$ $(1 \leqslant s \leqslant p)$, величины $b_{i0} \neq 0$.

В нашей работе [3] была доказана следующая диференциальная зависимость между коэфициентами $b_{n-j,\,i}$:

$$\frac{\partial b_{n-j,\,i}}{\partial \alpha_s} = b_{n-j-1,\,i-s} \tag{9}$$

($s = 0, 1, \ldots, i$; $0 \leqslant j \leqslant n$; $i \geqslant 0$) и были даны первые приближения характера зависимостей выражений $b_{n-j,\,i}$ от $\alpha_{p-s}$, а именно:

$$b_{n0} = \sum_{i=0}^{n} \tau_i \alpha_0^{n-i} = 0 \qquad (\tau_0 = 1) \tag{10}$$

(при тех же значениях $\tau$, как в формуле (3));

$$b_{nj} \equiv \alpha_j \frac{\partial b_{n0}}{\partial \alpha_0} + \psi_j(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k). \tag{11}$$

Известно [1, 2, 7, 5], что для существования формальных решений вида (2) уравнения (1) необходимо должны удовлетворяться равенства:

$$b_{nj} = 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots, k). \tag{12}$$

Для исследования возможности существования равенств (12) найдем соотношения, выражающие более точно зависимость $b_{n-j,\,i}$ ($0 \leqslant j \leqslant n$; $i \geqslant 0$) от $\alpha_{p-s}$ ($1 \leqslant s \leqslant p$).

В силу равенств (9) мы имеем

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial b_{n-j-1,\,i-s}}{\partial \alpha_\tau} &= b_{n-j-2,\,i-s-\tau} \\ \frac{\partial b_{n-j-1,\,i-\tau}}{\partial \alpha_s} &= b_{n-j-2,\,i-s-\tau} \end{aligned}\right. \qquad \begin{pmatrix} i - s - \tau \geqslant 0 \\ j + 2 \leqslant n - 1 \end{pmatrix};$$

следовательно, сумма

$$\sum_{s=0}^{i} b_{n-j-1,\,i-s}\, d\alpha_s = d b_{n-j,\,i}$$

представляет вполне интегрируемую форму Пфаффа, вследствие чего

$$\begin{aligned} b_{n-j,\,i} = \int\limits_{\alpha_0^{(1)}}^{\alpha_0} b_{n-j-1,\,i}\, d\alpha_0 + \int\limits_{\alpha_1^{(1)}}^{\alpha_1} b_{n-j-1,\,i-1}\, d\alpha_1 + \ldots + \\ + \int\limits_{\alpha_{i-1}^{(1)}}^{\alpha_{i-1}} b_{n-j-1,\,1}\, d\alpha_{i-1} + \int\limits_{\alpha_i^{(1)}}^{\alpha_i} b_{n-j-1,\,0}\, d\alpha_i, \end{aligned} \tag{13}$$

причем в подинтегральной функции каждого интеграла

$$\int\limits_{\alpha_s^{(1)}}^{\alpha_s} b_{n-j-1,\,i-s}\, d\alpha_s \qquad (1 \leqslant s \leqslant i)$$

переменные $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}$ заменены некоторыми постоянными $\alpha_0^{(1)}$, $\alpha_1^{(1)}, \ldots, \alpha_{s-1}^{(1)}$, в качестве которых в дальнейшем будем брать корни уравнений, определяющих значения $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}$.

В том случае, когда уравнение (10) имеет различные корни $a_0^{(i)}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, производная

$$\left(\frac{\partial b_{n0}}{\partial a_0}\right)_1 \neq 0,$$

и в силу равенств (11) из уравнений (12) для каждого значения $a_0^{(i)}$ определяем соответствующие ему $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Условия (10) и (12) являются не только необходимыми, но и достаточными условиями существования $n$ формальных решений вида (2).

Действительно, показатель $r$ решения

$$x^r \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{-i} \tag{14}$$

в окрестности $x = \infty$ диференциального уравнения (8) находится из определяющего уравнения $\varphi_0(r) = 0$, где $\varphi_0(r)$ — коэфициент при наивысшей степени характеристической функции

$$\begin{aligned} X(x, r) &= \sum_{i=0}^{n} T_i(x)\, [r]_{n-i}\, x^{r-n+i} = \\ &= \sum_{i=0}^{n} [r]_{n-i}\, x^{r-n+i+ki} \left(b_{i0} + \frac{b_{i1}}{x} + \ldots\right), \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$[r]_{n-i} = r(r-1)\ldots(r-n+i+1).$$

В силу уравнений (10) и (12) функция $\varphi_0(r)$ имеет вид

$$\varphi_0(r) = r b_{n-1,0} + b_{n,\, k+1}.$$

Так как выражения $b_{n-1,\,0}$ и $b_{n,\,k+1}$ зависят от значений величин

$$a_0^{(i)},\ a_1^{(i)}, \ldots,\ a_k^{(i)}, \tag{16}$$

то уравнение $\varphi_0(r) = 0$ определяет для каждой системы значений величин (16) соответствующее значение $r_i$, и мы получаем $n$ рядов Томе

$$y_i \sim e^{Q_i(x)}\, x^{r_i} \sum_{\tau=0}^{\infty} c_{i\tau}\, x^{-\tau} \tag{17}$$

с различными коэфициентами у многочленов $Q_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и различными значениями $r_i$; значения $c_i$ рядов (17) находим из соответствующих рекуррентных уравнений

$$\begin{aligned} &c_1\varphi_0(r_i - 1) + c_0\varphi_1(r_i) = 0, \\ &c_2\varphi_0(r_i - 2) + c_1\varphi_1(r_i - 1) + c_0\varphi_2(r_i) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

где, как легко видеть из (15), принимая во внимание (10) и (12), функции $\varphi$ имеют вид

$$\begin{aligned} &\varphi_i(r) = b_{n-1,\,i}\, r + b_{n,\,k+1+i} \qquad (i = 0, 1, \ldots, k); \\ &\varphi_{k+1+i}(r) = b_{n-2,\,i}\, r(r-1) + b_{n-1,\,k+1+i}\, r + b_{n,\,2k+i+2} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (i = 0, 1, \ldots, k). \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Обратимся теперь к интересующему нас случаю, когда характеристическое уравнение имеет кратные корни, и найдем условия, при которых уравнение (1) имеет $n$ формальных решений вида (17) либо решений с логарифмическими членами.

Пусть характеристическое уравнение (10) имеет один $l_0 (\geqslant 2)$-кратный корень $\alpha_0^{(1)}$ и $(n - l_0)$ — простых[1]. Для каждого из простых корней уравнения (10) обеспечивается формальное решение вида (17); следовательно, остается проследить, можем ли мы получить еще $l_0$ формальных решений, соответствующих $l_0$-кратному значению $\alpha_0^{(1)}$.

Существование различных функций $Q_i(x)$ и, следовательно, различных рядов (17), соответствующих $l_0$-кратному корню $\alpha_0^{(1)}$ уравнения (10), возможно лишь в том случае, если все $Q_i(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant l_0)$ отличны хотя бы одним слагаемым.

В том случае, когда все $Q_i(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant l_0)$ — одинаковы, для существования $l_0$ формальных решений вида (17) или решений с логарифмическими членами в силу (7) надо, чтобы определяющее уравнение было степени $l_0$ относительно показателя решения в окрестности $x = \infty$.

Для исследования возможности подобных случаев рассмотрим влияние существования $l_0$-кратного корня $\alpha_0^{(1)}$ уравнения (10) на значения $b_{n-j,i}$ $(j = 0, 1, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots)$.

В силу (9) имеем следующие равенства:

$$b_{n-j,0} = \frac{\partial^j b_{n0}}{\partial \alpha_0^j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

откуда, обозначая значения $b_{n-j,i}$ при $\alpha_0 = \alpha_0^{(1)}$ большими буквами $B_{n-j,i}^{(0)}$ с индексом (0) вверху $(i, j = 0, 1, \ldots)$, получаем

$$B_{n-j,0}^{(0)} = 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots, l_0 - 1); \tag{18}$$

$$B_{n-l_0-i,0}^{(0)} \neq 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n - l_0). \tag{19}$$

Подставляя значения (18) и (19) в (13), находим

$$B_{n-j,i}^{(0)} = \int\limits_{\alpha_1^{(1)}}^{\alpha_1} B_{n-j-1,i-1}^{(0)}\, d\alpha_1 + \ldots + \int\limits_{\alpha_{i-1}^{(1)}}^{\alpha_{i-1}} B_{n-i-1,1}^{(0)}\, d\alpha_1 + \varphi_{n-j,i}(\alpha_0^{(1)}) \tag{20}$$

$$(j \leqslant l - 2;\ i \geqslant 1);$$

$$B_{n-l_0+1-j,i}^{(0)} = \int\limits_{\alpha_1^{(1)}}^{\alpha_1} B_{n-l_0-j,i-1}\, d\alpha_1 + \ldots + \int\limits_{\alpha_i^{(1)}}^{\alpha_i} B_{n-l_0-j,0}\, d\alpha_i + \varphi_{n-l_0+1-j,i}(\alpha_0^{(1)}) \tag{21}$$

$$(j = 0, 1, \ldots).$$

Из (20), в частности, имеем

$$B_{n-j+1,1}^{(0)} = \varphi_{n-j+1,1}(\alpha_0^{(1)}) \tag{22}$$

[1] Только для ясности мы предполагаем, что $n - l_0$ значений $\alpha_0$ — простые корни уравнения (5); они могут быть также кратными в предположении, что для них обеспечивается существование $n - l_0$ формальных решений.

$(1 \leqslant j \leqslant l_0 - 1)$, а из (21) получаем

$$B^{(0)}_{n-l_0+1-j,\,1} = \int\limits_{\alpha_1^{(1)}}^{\alpha_1} B^{(0)}_{n-l_0-j,\,0}\, d\alpha_1 + \varphi_{n-l_0+1-j,\,1}(\alpha_0^{(1)}) \qquad (j=0,\,1,\ldots).$$

Вследствие существования $l_0$-кратного корня $\alpha_0^{(1)}$ уравнения (10) в $l_0$ функциях $Q_\iota(x)$, если существуют соответствующие им нормальные ряды Томе, коэфициент при наивысшей степени $x$ один и тот же. Поищем условия и величину $\nu$, при которых определяющее $\alpha_1$ уравнение $B^{(0)}_{n\nu} = 0$ имеет степень, равную $l_0$.

Рассмотрим для этого в силу (12) значения величин $B^{(0)}_{ni}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

По (22) тождество $B^{(0)}_{n1} = 0$ возможно лишь тогда, когда постоянная $\varphi_{n1}(\alpha_0^{(1)})$ равна нулю; в противном случае мы не имеем уравнения для определения $\alpha_1$, и диференциальное уравнение (1) не имеет решений вида (17), соответствующих $l_0$-кратному корню $\alpha_0^{(1)}$ уравнения (10).

Для определения величины $B^{(0)}_{n2}$ выпишем полностью выражение для $B^{(0)}_{n-j+1,\,2}$:

$$B^{(0)}_{n-j+1,\,2} = \int\limits_{\alpha_1^{(1)}}^{\alpha_1} B^{(0)}_{n-j,\,1}\, d\alpha_1 + \int\limits_{\alpha_2^{(1)}}^{\alpha_2} B_{n-j,\,0}\, d\alpha_2 + \varphi_{n-j+1,\,2}(\alpha_0^{(1)}). \tag{23}$$

Замечая, что вследствие соотношений (22) величины $B^{(0)}_{n-j+1,1}$ равны постоянным, равным или не равным нулю, заключаем следующее:

1. Если по (18)

$$B^{(0)}_{n-1,\,0} \equiv 0 \ (1 \leqslant l_0 - 1), \text{ а по (22) } B^{(0)}_{n-1,\,1} \neq 0,$$

то в силу (23) уравнение $B^{(0)}_{n2} = 0$ будет первой степени относительно $\alpha_1$.

2. Если $B^{(0)}_{n-1,\,0} \equiv 0$, $B^{(0)}_{n-1,\,1} \equiv 0$, то по (23) $B^{(0)}_{n,\,2} = \varphi_{n,\,2}(\alpha_0^{(1)})$.

а) Если $\varphi_{n,\,2}(\alpha_0^{(1)}) \neq 0$, мы не только не сможем определить $\alpha_1$ из уравнения $B^{(0)}_{n2} = 0$, но и диференциальное уравнение (1) не будет иметь решений вида (17).

б) Если $\varphi_{n,\,2}(\alpha_0^{(1)}) = 0$, то $B^{(0)}_{n,\,2} = 0$ тождественно.

Обращаемся к величине $B^{(0)}_{n3}$.

Заметим предварительно, что, если по (18) $B^{(0)}_{n-j,\,0} = 0$ $(j=0,\,1,\,2)$, а по (22) $B^{(0)}_{n-j,\,1} = 0$ $(j=0,\,1)$ и $B^{(0)}_{n,\,2} = 0$, то выражение

$$B^{(0)}_{n-1,\,2} = \int\limits_{\alpha_1^{(1)}}^{\alpha_1} B^{(0)}_{n-2,\,1}\, d\alpha_1 + \varphi_{n-1,\,2}(\alpha_0^{(1)})$$

может быть первой или нулевой степени относительно $\alpha_1$ в зависимости от того, равно ли по (22) $B_{n-2,\,1}$ постоянной (не равной нулю) или нулю.

В силу (20) и предыдущих соображений мы получаем следующее выражение для $B^{(0)}_{n3}$:

$$B^{(0)}_{n3} = \int\limits_{\alpha_1^{(1)}}^{\alpha_1} B^{(0)}_{n-1,\,2}\, d\alpha_1 + \varphi_{n3}(\alpha_0^{(1)}).$$

Отсюда следует:

1) если

$$B^{(0)}_{n-j,\,0}\equiv 0 \qquad (j=0,\,1,\,2),$$

$$B^{(0)}_{n-j,\,1}\equiv 0 \qquad (j=0,\,1),$$

$$B^{(0)}_{n2}\equiv 0, \qquad B^{(0)}_{n-2,\,1} \text{ равно постоянной, не равной } 0,$$

то уравнение $B^{(0)}_{n3}=0$ — второй степени относительно $\alpha_1$;

2) если

$$B^{(0)}_{n-j,\,0}\equiv 0 \qquad (j=0,\,1,\,2),$$

$$B^{(0)}_{n-j,\,1}\equiv 0 \qquad (j=0,\,1,\,2),$$

$$B^{(0)}_{n,\,2}\equiv 0, \quad B^{(0)}_{n-1,\,2} \text{ — равно постоянной, не равной } 0,$$

то уравнение $B^{(0)}_{n3}=0$ — первой степени относительно $\alpha_1$;

3) если

$$B^{(0)}_{n-j,\,0}\equiv 0 \qquad (j=0,\,1,\,2),$$

$$B^{(0)}_{n-j,\,1}\equiv 0 \qquad (j=0,\,1,\,2),$$

$$B^{(0)}_{n-j,\,2}=0 \qquad (j=0,\,1),$$

$$B^{(0)}_{n,\,3} \qquad \text{равно постоянной, не равной нулю,}$$

то диференциальное уравнение (1) не имеет решений вида (17).

Для того чтобы найти уравнение, определяющее $\alpha_1$, степени $l_0$, заметим, что при $B^{(0)}_{n3}=0$ формула (20) имеет смысл только тогда, когда в ней положено $j=4\leqslant l_0-2$, причем при $0\leqslant j+i\leqslant 3$ тождественно удовлетворяются

$$B^{(0)}_{n-j,\,i}=0.$$

В этом случае уравнение $B^{(0)}_{n4}=0$ будет не более третьей степени относительно неизвестной $\alpha_1$.

Продолжая процесс, мы придем к тому случаю, когда все

$$B^{(0)}_{n-j,\,i}=0 \qquad (0\leqslant i+j\leqslant l_0-1),$$

но когда $B^{(0)}_{n-l_0,\,0}\neq 0$; в этом случае, используя формулу (21) для $B^{(0)}_{n-l_0+i,\,i}$ $(i=1,\,2,\ldots,\,l_0)$, получаем, что уравнение

$$B^{(0)}_{n,\,l}=0$$

имеет $\alpha_1$ корнем степени точно $l_0$.

Для определения кратности корня $\alpha_1$ найдем $\dfrac{\partial B^{(0)}_{nl_0}}{\partial \alpha_1}$.

Обозначим $B^{(0)}_{n-j,\,l_0+i}$ при вставленных в них значениях $\alpha^{(1)}_i$ через $B^{(1)}_{n-j,\,l_0+i}$, тогда из (13) для $B^{(1)}_{n-j,\,l_0+i}$ получим выражение

$$B^{(1)}_{n-j,\,l_0+i}=\int\limits_{\alpha^{(1)}_2}^{\alpha_2} B^{(1)}_{n-j-1,\,l_0+i-2}\,d\alpha_2+\ldots+\int\limits_{\alpha^{(1)}_{l_0+i}}^{\alpha_{l_0+i}} B^{(1)}_{n-j-1,\,0}\,d\alpha_{l_0+i}+ \tag{24}$$

$$+\varphi_{n-j,\,l_0+i}(\alpha^{(1)}_0,\,\alpha^{(1)}_1) \qquad \begin{pmatrix} j=0,\,1,\ldots,\,l_0-2\\ j+i=1,\,2,\ldots \end{pmatrix}.$$

Вследствие того, что

$$B^{(1)}_{n-j,\, l_0-j-i}=0 \tag{25}$$

($j=0, 1, \ldots, \leqslant l_0-1$; $i=1, 2, \ldots, l_0-j$), от равенства (24) останется

$$B^{(1)}_{n-j,\, l_0+i}=\int\limits_{\alpha_2^{(1)}}^{\alpha_2} B^{(1)}_{n-j-1,\, l_0+i-2}\, d\alpha_2+\ldots+\int\limits_{\alpha_{i+j+2}^{(1)}}^{\alpha_{i+j+2}} B^{(1)}_{n-j-1,\, l_0-j-2}\, d\alpha_{i+j+2}+ \tag{26}$$
$$+\varphi_{n-j,\, l_0+i}(\alpha_0^{(1)}, \alpha_1^{(1)})$$

($j+i=1, 2, \ldots$; $0\leqslant j\leqslant l_0-2$). В частности, в силу (25) из (26) получаем

$$B^{(1)}_{n,\, l_0+1}=\int\limits_{\alpha_2^{(1)}}^{\alpha_2} B^{(1)}_{n-1,\, l_0-1}\, d\alpha_2+\varphi_{n,\, l_0+1}(\alpha_0^{(1)}, \alpha_1^{(1)}); \tag{27}$$

$$B^{(1)}_{n,\, l_0+2}=\int\limits_{\alpha_2^{(1)}}^{\alpha_2} B^{(1)}_{n-1,\, l_0}\, d\alpha_2+\int\limits_{\alpha_3^{(1)}}^{\alpha_3} B^{(1)}_{n-1,\, l_0-1}\, d\alpha_3+\varphi_{n,\, l_0+2}(\alpha_0^{(1)}, \alpha_1^{(1)})$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Если уравнение $B^{(1)}_{n,\, l_0}=0$ относительно $\alpha_1$ имеет простые корни, то

$$B^{(1)}_{n-1,\, l_0-1}=\left\{\frac{\partial b_{nl}}{\partial \alpha_1}\right\}_{\alpha_0^{(1)},\ \alpha_1^{(1)}}\neq 0,$$

и из уравнения (27) мы узнаем последовательно $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k$.

Пусть теперь $\alpha_1$ — корень уравнения $B^{(1)}_{n,\, l_0}=0$ кратности $l_1\leqslant l_0$. Применяя аналогичные предыдущим рассуждения, получаем новые условия кроме (25), необходимые для того, чтобы получить уравнение, определяющее $\alpha_2$, степени $l_1$, а именно:

$$B^{(1)}_{n-j,\, l_0+l_1-2j-i}=0 \qquad \begin{pmatrix} j=0, 1, \ldots, l_1-1 \\ i=1, 2, \ldots, l_1-j \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Если все условия (25) и (28) выполняются при подставленных в них найденных значениях $\alpha_0^{(1)}, \alpha_1^{(1)}$ и уравнение

$$B^{(1)}_{n,\, l_0+l_1}=0$$

относительно $\alpha_2$ имеет корень $\alpha_2^{(1)}$ кратности $l_2\leqslant l_1$, то для нахождения уравнения степени $l_2$, определяющего $\alpha_3$, необходимо, чтобы, кроме тождеств (25) и (26), удовлетворялись еще следующие условия:

$$B^{(2)}_{n-j,\, l_0+l_1+l_2-3j-i}=0\,[1] \qquad \begin{pmatrix} j=0, 1, \ldots, l_2-1 \\ i=1, 2, \ldots, l_2-i \end{pmatrix} \tag{29}$$

и т. д.

[1] Как здесь, так и в дальнейшем обозначаем величину $b^{(i)}_{j,\, s}$ при подстановке в нее значений $\alpha_0^{(1)}, \alpha_1^{(1)}, \ldots, \alpha_i^{(1)}$ через $B^{(i)}_{j,\, s}$.

## § 2. Уравнение для определения показателя решения

Предположим, что мы нашли значение $\alpha_0^{(1)}$ кратности $l_0$, значение $\alpha_1^{(1)}$ кратности $l_1, \ldots$, значение $\alpha_{k-1}^{(1)}$ кратности $l_{k-1}$; отметим, что

$$n \geqslant l_0 \geqslant l_1 \geqslant \ldots \geqslant l_{k-1} \geqslant 2.$$

Запишем тождества (12), (25), (28), (29) и следующие за ними, обусловливающие возможность нахождения $\alpha_k$ кратности $l_k$, в виде одной формулы

$$B^{(\nu-1)}_{n-i,\, l_0+l_1+\ldots+l_{\nu-1}-j-\nu i-1} = 0 \qquad \begin{pmatrix} \nu=1, 2, \ldots, k \\ j=0, 1, \ldots, l_{\nu-1}-1-i \\ i=1, 2, \ldots, l_{\nu-1}-1 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Вследствие $l_k (\geqslant 2)$-кратности корня $\alpha_k^{(1)}$ уравнения $B^{(k)}_{n,\, l_0+l_1+\ldots+l_{k-1}} = 0$ к тождествам (30) прибавятся еще новые

$$B^{(k)}_{n-j,\, l_0+l_1+\ldots+l_{k-1}-jk} = 0 \qquad (j=0, 1, \ldots, l_k-1). \tag{30*}$$

Заметим, что $B^{(k)}_{n-l_k,\, l_0+\ldots+l_{k-1}-kl_k} \neq 0$.

Найдем теперь условия, позволяющие определить показатель решения вида (2).

Для этого исследуем влияние тождеств (30) и (30*) на характеристическую функцию уравнения (8). Положив для удобства $l_0 + l_1 + \ldots + l_{k-1} = \tau$ в силу (30) и (30*) имеем

$$T_n(x) = x^{kn-\tau-1}\left(B^{(k)}_{n,\, \tau+1} + \frac{B^{(k)}_{n,\, \tau+2}}{x} + \ldots\right),$$

$$T_{n-1}(x) = x^{kn-\tau-1}\left(B^{(k)}_{n-1,\, \tau-k+1} + \frac{B^{(k)}_{n-1,\, \tau-k+2}}{x} + \ldots\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$T_{n-l_k+1}(x) = x^{kn-\tau-1}\left(B^{(k)}_{n-l_k+1,\, \tau-(l_k-1)k+1} + \frac{B^{(k)}_{n-l_k+1,\, \tau-(l_k-1)k+2}}{x} + \ldots\right),$$

$$T_{n-l_k}(x) = x^{kn-\tau}\left(B^{(k)}_{n-l_k,\, \tau-kl_k} + \frac{B^{(k)}_{n-l_k,\, \tau-kl_k+1}}{x} + \ldots\right),$$

$$T_{n-l_k-1}(x) = x^{kn-\tau-j}\left(B^{(k)}_{n-l_k-1,\, \tau-k(l_k+1)-j} + \frac{B^{(k)}_{n-l_k-1,\, \tau-(l_k+1)k-j+1}}{x} + \ldots\right).$$

Если $\tau-k(l_k+1)=0$, то $j=0$; если $\tau-(l_k+1)k-j<0$, то соответствующие $B^{(k)}_{n-l_k-1,\, \tau-(l_k+1)k-j} = 0$.

Составим произведения $T_{n-j}(x)\,[r]_j\, x^{r-j}$, где $[r]_j = r(r-1)\ldots(r-j+1)$, и сложим их; тогда характеристическая функция имеет вид

$$x^{-r}X(x, r) = x^{kn-\tau-1}\left(B^{(k)}_{n,\, \tau+1} + \frac{B^{(k)}_{n,\, \tau+2}}{x} + \ldots\right) +$$

$$+ x^{kn-\tau-2}[r]_1\left(B^{(k)}_{n-1,\, \tau-k+1} + \frac{B^{(k)}_{n-1,\, \tau-k+2}}{x} + \ldots\right) +$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots +$$

$$+ x^{kn-\tau-l_k+1}[r]_{l_k-2}(B^{(k)}_{n-l_k+2,\ \tau-(l_k-2)k+1}+\ldots)+$$

$$+ x^{kn-\tau-l_k}[r]_{l_k-1}(B^{(k)}_{n-l_k+1,\ \tau-(l_k-1)k+1}+\ldots)+$$

$$+ x^{kn-\tau-l_k}[r]_{l_k}(B^{(k)}_{n-l_k,\ \tau-l_k k}+\ldots)+$$

$$+ x^{kn-\tau-l_k-1}[r]_{l_k+1}(B^{(k)}_{n-l_k-1,\ \tau-(l_k+1)k}+\ldots)+$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Степени выражений в каждой строке идут в убывающем порядке. Для того чтобы наивысшая степень характеристической функции равнялась $kn-\tau-l_k$, т. е. чтобы определяющее $r$ уравнение было степени $l_k$, достаточно, чтобы, кроме тождеств (30*), порожденных $l_k$-кратностью значения $\alpha_k$, удовлетворялись еще следующие тождества:

$$B^{(k)}_{n-i,\ \tau-ki+j}=0 \qquad \begin{pmatrix} j=1, 2, \ldots, l_k-1-i \\ i=0, 1, \ldots, l_k-2 \end{pmatrix}.$$

Тогда характеристическая функция примет вид

$$X(x, r)=x^{kn-\tau-l_k}\left\{\left(B^{(k)}_{n,\ \tau+l_k}+\frac{B^{(k)}_{n,\ \tau+l_k-1}}{x}+\ldots\right)+\right.$$

$$+[r]_1\left(B^{(k)}_{n-1,\ \tau-k+l_k-1}+\frac{1}{x}B^{(k)}_{n-1,\ \tau-k+l_k}+\ldots\right)+$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$+[r]_{l_k}\left(B^{(k)}_{n-l_k,\ \tau-l_k k}+\frac{1}{x}B^{(k)}_{n-l_k,\ \tau-kl_k+1}+\ldots\right)+$$

$$+[r]_{l_k+1}\left(\frac{1}{x}B^{(k)}_{n-l_k-1,\ \tau-(l_k+1)k}+\ldots\right)+$$

$$\left.+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right\},$$

откуда получаем, что определяющее $r$ уравнение имеет вид

$$[r]_{l_k}B^{(k)}_{n-l_k,\ \tau-kl_k}+\ldots+[r]_1 B^{(k)}_{n-1,\ \tau-k+l_k-1}+B^{(k)}_{n,\ \tau+l_k}=0. \tag{31}$$

Из уравнения (31) мы определяем $l_k$ равных или не равных значений $r$. Следовательно, согласно классической теории, диференциальное уравнение (8) имеет решения вида (14) или вида

$$\sum_{i=1}^{\mu} x^{r_i}\psi_i(x)\ln^{i-1}x,$$

где $r_1\geqslant r_2\geqslant\ldots\geqslant r_{l_k}$;

$$\psi_i(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_{i\nu}x^{-\nu};\quad \psi_1(x)\neq 0.$$

Подытоживая, мы получаем следующие результаты:

Теорема А. 1) *Если уравнение* $b_{n0}=0$ *имеет* $l_0$-*кратный корень* $\alpha_0^{(1)}$, *а* $n-l_0$ — *простых* [1];

2) *выражения* $B^{(0)}_{n-j,\ l_0-j-i}$ $(j=0, 1, \ldots, l_0-1;\ i=1, 2, \ldots, l_0-j)$ *тождественно равны нулю*;

[1]. См. сноску на стр. 128.

3) *уравнение относительно* $\alpha_1$ $B^{(0)}_{n, l_0}=0$ *имеет один* $l_1$*-кратный корень* $\alpha_1^{(1)}$ *и* $l_0-l_1\,(\geqslant 0)$ — *простых;*

4) *выражения* $B^{(1)}_{n-j,\, l_0+l_1-2j-i}$ $(j=0,\ 1,\ldots,\ l_1-1;\ i=1,\ 2,\ldots,\ l_1-j)$ *тождественно равны нулю;*

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$2\nu+1)$ *уравнение* $B^{(\nu-1)}_{n, l_0+\ldots+l_{\nu-1}}=0$ $(\nu\leqslant k-1)$ *имеет один* $l_\nu$*-кратный корень* $\alpha_\nu^{(1)}$, а $l_{\nu-1}-l_\nu\geqslant 0$ — *простых;*

$2\nu+2)$ *выражения* $B^{(\nu)}_{n-j,\, l_0+l_1+\ldots+l_\nu-(\nu+1)\,j-i}$ $(j=0,\ 1,\ldots,\ l_\nu-1;$ $i=1,\ 2,\ldots,l_\nu-j)$ *тождественно равны нулю;*

$2\nu+3)$ *корни уравнения* $B^{(\nu)}_{n, l_0+\ldots+l_\nu}=0$ (*при* $\nu\leqslant k-1$) *относительно* $\alpha_{\nu+1}$ *все простые,* —

*то данному* $l_0$*-кратному корню характеристического уравнения соответствует* $l_0$ *формальных решений в виде нормальных рядов Томе* (17), *где многочлены* $Q_i(x)$ *имеют не только одну и ту же степень, но и ряд одинаковых коэфициентов при наивысших степенях* $x$, т. е.

$$Q_i(x)=\frac{\alpha_0 x^p}{p}+\ldots+\frac{\alpha_\nu x^{p-\nu}}{p-\nu}+\frac{\alpha_{\nu+1}^{(i)}\,x^{p-\nu-1}}{p-\nu-1}+\ldots+\alpha_k^{(i)}\,x \qquad (i=1,\ 2,\ldots,\ l_0).$$

Теорема Б. *Если первые* $2\nu+2$ *условий теоремы А выполняются при* $\nu=0,\ 1,\ldots,\ k$, *а условие* $2k+3$ *заменяется следующим:*

$2k+3)$ *уравнение* $B^{(k-1)}_{n, l_0+\ldots+l_{k-1}}=0$ *имеет* $l_k$ $(\geqslant 2)$*-кратный корень* $\alpha_k^{(1)}$,

*то данному* $l_0$*-кратному корню* $\alpha_0^{(1)}$ *характеристического уравнения соответствуют* $l_0-l_k$ *формальных решений вида* (17), *функции* $Q_i(x)$ *у которых отличаются хотя бы одним слагаемым*[1]; *остальные* $l_k$ *решений имеют вид:*

$$e^{Q(x)}\sum_{i=1}^{\mu} x^{r_i}\,\psi_i(x)\ln^{i-1}x \qquad (\mu\leqslant l_k), \tag{32}$$

где $r_1\geqslant r_2\geqslant\ldots\geqslant r_{l_k}$, многочлен $Q(x)$ — один и тот же для всех $l_k$ решений, а функции

$$\psi_i(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{i\nu}\,x^{-\nu},\quad \psi_1(x)\not\equiv 0.$$

## § 3. Нормальные решения

Предположим, что

$$l_0=l_1=\ldots=l_s=n, \tag{33}$$

где $n$ — порядок диференциального уравнения (1); $l_{s+i}<n$ $(i=1,$ $2,\ldots,\ k-s)$.

Рассмотрим два случая:

1) $s\leqslant k-1$,

2) $s=k$.

---

[1] См. теорему А.

В первом случае выполнение всех условий теоремы Б приводит к тому, что коэфициенты $T_{n-j}(x)$ уравнения (8) имеют вид

$$T_{n-j}(x) = x^{[k-(s+1)](n-j)} \left[ B^{(k)}_{n-j,\,(s+1)(n-j)} + \frac{1}{x} B^{(k)}_{n-j,\,(s+1)(n-j)+1} + \dots \right]$$

$(j=0, 1, \dots, n-1)$, где не все $B^{(k)}_{n-j,\,(s+1)(n-j)}$ $(0 \leqslant j \leqslant n-1)$ равны нулю.

Отсюда, принимая во внимание [2] зависимость между рангом линейного диференциального уравнения и наивысшими показателями коэфициентов $T_{n-i}(x)$ этого уравнения, заключаем, что, если кратности корней $\alpha_0^{(1)}, \alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_k^{(1)}$ соответствующих уравнений удовлетворяют условиям (33), то преобразование (7), примененное к уравнению (1), уменьшает его ранг на $(s+1)$ единиц.

Во втором случае $(s=k)$ при выполнении условий теоремы Б, в силу предыдущих рассуждений, ранг преобразованного при помощи (7) уравнения (1) понижается на $k+1$ единиц, т. е. ранг уравнения (8) станет равным нулю; следовательно, для него точка $x=\infty$ является особой регулярной точкой, и все ряды вида (14), входящие в (32), которыми можно представить решения уравнения (1), сходятся. Выразим этот результат в виде следующей теоремы:

*Если все уравнения* $B^{(\nu)}_{n,\,\nu l} = 0$ $(\nu = 0, 1, \dots, k)$ *относительно неизвестных* $\alpha_\nu$ $(\nu = 0, 1, \dots, k)$ *имеют корни кратности, равной порядку данного диференциального уравнения, и все выражения*

$$B^{(\nu)}_{n-j,\,\nu(l-j)-i-1} \qquad \begin{pmatrix} \nu=0, 1, \dots, k \\ j=0, 1, \dots, l \\ i=0, 1, \dots, l-1-j \end{pmatrix}$$

*тождественно обращаются в нуль, то данное диференциальное уравнение имеет $n$ нормальных решений вида*

$$e^{Q(x)} \sum_{i=1}^{\mu} x^{r_i} \psi_i(x) \ln^{i-1} x, \tag{34}$$

где в зависимости от значений $r_i$ функции [1]

$$\psi_i(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{i\nu} x^{-\nu}$$

при $i \neq 1$ могут быть равными нулю, $\psi_1(x) \neq 0$, а функция $Q(x)$ — одна и та же для всех $n$ нормальных решений (34).

---

ЛИТЕРАТУРА


1. A. Poincaré, Sur les intégrales irrégulierès des equations linéaires, Acta math., 8, 1886.

2. Л. Я. Латишева, Алгорифм знаходження асимптотичних розв'язків лінійних диференціальних рівнянь для досить великих значень аргумента, Наукові записки КДУ, Математичний збірник № 3, 1949.

3. К. Я. Латишева, Про асимптотичні розв'язки лінійних диференціальних рівнянь у випадку подвійного кореня характеристичного рівняння, Доповіді АН УРСР № 1, 1951.


[1] Согласно классической теории.

4. К. Я. Латишева, Про новий вигляд регулярних розв'язків лінійних диференціальних рівнянь, Наукові записки КДУ, Математичний збірник № 4, 1950.

5. Э. Камке, Справочник по обыкновенным диференциальным уравнениям, 1950.

6. Fabry, Thesè—Faculté des Sciences, Paris, 1885.

7. C. E. Love, On the Asymptotic Solutions of Linear Differential Equations, American Journal of Mathematics, vol. 36, № 2 (1914), 151—166.

8. В. В. Хорошилов, О решениях систем линейных диференциальных уравнений с иррегулярной особой точкой. — Пр. матем. и мех., т. XV, в. 1, 1951.

Получена 17 января 1952 г.
Киев