

## Об остаточных напряжениях при крутке

А. Ю. Ишлинский

1°. Задача об отыскании остаточных напряжений в круглом пруте при кручении за предел упругости — элементарна, если считать, что прут имеет бесконечно большую длину и его поверхность свободна от напряжений. В этом случае, который рассматривался многими авторами, сечения, нормальные к оси прута, остаются плоскими и не искажаются в плане, т. е.

$$\varepsilon_r = 0, \quad \varepsilon_\theta = 0, \quad \gamma_{r\theta} = 0. \quad (1)$$

Здесь и в дальнейшем мы будем пользоваться цилиндрической системой координат  $r\theta z$ , ось  $z$  которой является одновременно и осью прута. Так как при кручении прута сечения остаются на неизменном расстоянии друг от друга и лишь поворачиваются вокруг оси прута, то

$$\varepsilon_z = 0, \quad \gamma_{rz} = 0. \quad (2)$$

Таким образом, единственной, не равной нулю компонентой деформации оказывается  $\gamma_{z\theta}$ , выражение для которой согласно известной формуле сопротивления материалов имеет вид

$$\gamma_{z\theta} = \vartheta \cdot r, \quad (3)$$

где  $\vartheta$  так называемый погонный угол крутки.

При кручении прута за предел упругости напряжение  $\tau_{z\theta}$  определяется в зависимости от деформации  $\gamma_{z\theta}$  по диаграмме (рис. 1)

$$\tau = \tau(\gamma). \quad (4)$$

Последняя строится, исходя из экспериментально устанавливаемой зависимости

$$\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i). \quad (5)$$

В данном случае [2]

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \tau_{z\theta} \sqrt{3}, \\ \varepsilon &= \frac{1}{\sqrt{3}} \gamma_{z\theta}. \end{aligned} \quad (6)$$

Диаграмма (4) может быть получена и непосредственно, а именно при кручении за предел упругости полых тонкостенных труб.

Крутящий момент, соответствующий данной крутке, находится по формуле

$$M_{кр} = 2\pi \int_0^a \tau_{z\theta} r^2 dr. \quad (7)$$

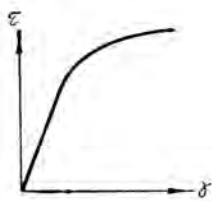


Рис. 1.

Считая здесь в соответствии с (4)  $\tau_{z_0}$  функцией  $\gamma_{z_0}$  и производя согласно (3) замену переменной интегрирования  $r$  на  $\gamma_{z_0}$ , получим

$$M_{кр} = \frac{2\pi}{\vartheta^3} \int_0^{\gamma_a} \tau(\gamma) \gamma^3 d\gamma, \quad (8)$$

где для краткости записи переменная интегрирования обозначена через  $\gamma$ , а верхний предел  $\gamma_a$  представляет собой значение  $\gamma_{z_0}$  при  $r = a$ . Так как [3]

$$\gamma_a = \vartheta \cdot a, \quad (9)$$

то (8) может быть представлено в виде

$$M_{кр} = 2\pi a^3 \Phi(\gamma_a), \quad (10)$$

где функция

$$\Phi(\gamma_a) = \frac{1}{\gamma_a^3} \int_0^{\gamma_a} \tau(\gamma) \gamma^3 d\gamma \quad (11)$$

может быть построена для данной диаграммы  $\tau = \tau(\gamma)$  раз навсегда. В случае крутки в пределах упругости

$$\tau(\gamma) = G\gamma, \quad (12)$$

и формула (10) при учете соотношения (9) приводится к известному виду

$$M_{кр} = GI_p \vartheta, \quad (13)$$

при этом, как обычно,

$$I_p = \frac{\pi a^4}{2}, \quad (14)$$

а  $G$  — означает модуль сдвига.

При крутке за предел упругости согласно (10) по заданному крутящему моменту  $M_{кр}$  можно определять угол сдвига  $\gamma_a$  и далее, используя (9), найти погонный угол крутки  $\vartheta$ .

При снятии крутящего момента происходит так называемая упругая разгрузка, подчиняющаяся закону

$$\tau_{z_0} - \tau_{z_0}^1 = G(\gamma_{z_0} - \gamma_{z_0}^1). \quad (15)$$

Здесь  $\tau_{z_0}$  и  $\gamma_{z_0}$  напряжение и деформация, которые имели место при действии крутящего момента  $M_{кр}$ ,  $\tau_{z_0}^1$  и  $\gamma_{z_0}^1$  остаточные напряжение и деформация. Если скручивающий момент снят полностью, то

$$\int_0^a \tau_{z_0}^1 2\pi r^2 dr = 0. \quad (16)$$

Заметим, что в соответствии с (3)

$$\gamma_{z_0}^1 = \vartheta_1 r, \quad (17)$$

где  $\vartheta_1$  — остаточный погонный угол крутки.

Интегрируя обе части равенства (15) по  $r$  в пределах от  $r = 0$  до  $r = a$ , предварительно умножив их на  $2\pi r^2$ , и используя соотношения (7), (16), (3), (17) и (14), получим

$$M_{кр} = GI_p (\vartheta - \vartheta_1). \quad (18)$$

Отсюда имеем формулу для остаточной крутки

$$\vartheta_1 = \vartheta - \frac{M_{кр}}{GI_p}. \quad (19)$$

Зная  $\vartheta_1$ , можно найти, согласно (15), (3), (17) и (18), закон изменения остаточных напряжений  $\tau_{z\theta}^1$  по сечению прута. Имеем

$$\tau_{z\theta}^1 = \tau_{z\theta} - \frac{M_{кр}}{I_p} r. \quad (20)$$

Все остальные компоненты напряжений равны нулю как при действии крутящего момента, так и после его снятия, ибо соответствующие им компоненты деформаций (1) и (2) остаются без изменения.

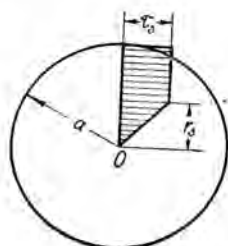


Рис. 2.

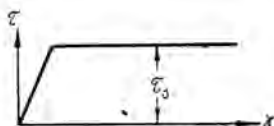


Рис. 3.

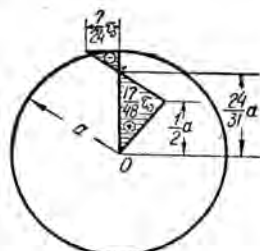


Рис. 4.

На рис. 2 показана эпюра напряжений  $\tau_{z\theta}$  в случае прута из материала, лишённого упрочнения. Диаграмма для такого материала приведена на рис. 3.

Можно показать, что в этом случае крутящий момент  $M_{кр}$  связан с углом погонной крутки соотношением

$$M_{кр} = 2\pi r_s \left( \frac{a^3}{3} - \frac{\tau_s^3}{12 G^3 \vartheta^3} \right), \quad (21)$$

где  $\tau_s$  — предел текучести материала.

Пластическая деформация возникает в зоне

$$r > r_s, \quad (22)$$

где  $r_s$  определяется из условия

$$G\vartheta r_s = \tau_s. \quad (23)$$

Остаточная погонная крутка находится по формуле (19).

Пример 1. Если крутящий момент равен

$$M_{кр} = \frac{31}{48} \pi a^3 \tau_s,$$

то  $\vartheta = \frac{2\tau_s}{aG}$  и зона пластической деформации начинается на расстоянии

$$r_s = \frac{1}{2} a$$

от оси прута.

Эпюра остаточных напряжений  $\tau_{z\theta}^1$  показана на рис. 4. Напряжения  $\tau_{z\theta}^1$  достигают по модулю максимума в двух местах: на расстоянии  $r = \frac{a}{2}$  от оси прута, где

$$\tau_{z\theta}^1 \Big|_{r=\frac{a}{2}} = \frac{17}{48} \tau_s,$$

и у боковой поверхности прута, где

$$\tau_{z\theta}^1 \Big|_{r=a} = -\frac{7}{24} \tau_a.$$

Угол крутки  $\vartheta$  за предел упругости в рассматриваемом примере равен

$$\vartheta = \frac{48}{31} \frac{M_{кр}}{GI_p},$$

а угол остаточной крутки определяется формулой

$$\vartheta_1 = \frac{17}{48} \vartheta = \frac{17}{31} \frac{M_{кр}}{GI_p} = \frac{17}{24} \frac{\tau_a}{aG}.$$

2°. Мы рассмотрим более сложную задачу об отыскании остаточных деформаций и напряжений в круглом полубесконечном пруте и в пруте конечных размеров.

При этом будем предполагать, что полубесконечный прут, а также прут конечных размеров образуются из бесконечно длинного прута (скрученного за предел упругости и далее разгруженного) посредством нормальных к оси плоских разрезов, не сопровождающихся заметной дополнительной пластической деформацией.

Вблизи разрезов закон распределения остаточных напряжений существенно отличается от соответствующего закона в случае бесконечно длинного прута, так как на торцевых сечениях напряжения  $\tau_{z\theta}$  обращаются в нуль. Кроме того, появляются остаточные напряжения  $\tau_{r\theta}$ , которые в бесконечно длинном пруте отсутствовали. В наличии этих напряжений нетрудно убедиться, если рассмотреть равновесие части прута (рис. 5), ограниченного торцом, каким-либо другим нормальным сечением и цилиндрической поверхностью  $r = r_1 < a$ . По сечению не являющемуся торцом, действуют остаточные напряжения  $\tau_{z\theta}$ , создающие момент относительно оси  $z$  (этот момент равен нулю лишь при  $r_1 = a$ ). С другой стороны, напряжения  $\tau_{z\theta}$  на торце отсутствуют. Следовательно, равновесие рассматриваемой части возможно лишь при наличии напряжений  $\tau_{r\theta}$ , действующих по цилиндрической поверхности  $r = r_1$  и создающих противоположный момент вокруг оси  $z$ .

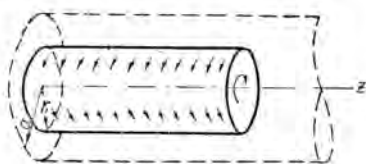


Рис. 5.

Остаточные напряжения  $\tau_{r\theta}$  обуславливают искажение сечений в их плоскости, так как соответствующая им компонента деформации  $\gamma_{r\theta}$  будет теперь отлична от нуля. Это означает, что радиусы сечений, состоящие из материальных частиц, искривятся.

Вследствие этого в волокнах, расположенных вблизи оси прута, как будет показано ниже, уменьшается крутка по сравнению с бесконечно длинным прутым. Наоборот, в волокнах, расположенных ближе к боковой поверхности, крутка увеличивается.

Любопытно отметить, что если разрезы сделаны весьма близко друг к другу, то остаточная крутка внутренних волокон, не претерпевших пластических деформаций, будет равна нулю. Крутка волокон, которые имели деформацию за предел упругости, будет определяться только величиной пластической деформации. Напряжение  $\tau_{r\theta}$  в этом случае отсутствует.

Обозначим через  $u(r, z)$  остаточное перемещение  $u_0^0$ , отсчитываемое от исходного состояния прута до его деформации за предел упругости. Перемещения  $u_r^0$  и  $u_z^0$  в нашем случае равны нулю.

Отличные от нуля остаточные деформации  $\gamma_{z\theta}^0$  и  $\gamma_{r\theta}^0$  выражаются через  $u(r, z)$  формулами [1]

$$\begin{aligned}\gamma_{z\theta}^0 &= \frac{\partial u_0^0}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^0}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \gamma_{r\theta}^0 &= \frac{\partial u_0^0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^0}{\partial \theta} - \frac{u_0^0}{r} = \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}.\end{aligned}\quad (24)$$

В соответствии с законом упругой разгрузки

$$\begin{aligned}\tau_{z\theta} - \tau_{z\theta}^0 &= G(\gamma_{z\theta} - \gamma_{z\theta}^0), \\ \tau_{r\theta} - \tau_{r\theta}^0 &= G(\gamma_{r\theta} - \gamma_{r\theta}^0).\end{aligned}\quad (25)$$

Здесь, аналогично (15)  $\tau_{z\theta}$ ,  $\tau_{r\theta}$ ,  $\gamma_{z\theta}$  и  $\gamma_{r\theta}$  — напряжения и деформации, которые имели место при кручении за предел упругости бесконечно длинного прута, заданным крутящим моментом  $M_{кр}$ ; через  $\tau_{z\theta}^0$ ,  $\tau_{r\theta}^0$ ,  $\gamma_{z\theta}^0$ ,  $\gamma_{r\theta}^0$  обозначены остаточные напряжения и деформации в полубесконечном или конечном куске прута, полученного из бесконечного прута после снятия момента  $M_{кр}$  и последующих разрезов. В (25) следует положить

$$\begin{aligned}\tau_{r\theta} &= 0, \quad \gamma_{r\theta} = 0, \\ \tau_{z\theta} &= \tau(\gamma_{z\theta}) = \tau(\vartheta_r) = \tau_{z\theta}(r), \quad \gamma_{z\theta} = \vartheta_r,\end{aligned}\quad (26)$$

где величину погонной крутки  $\vartheta$  (до разгрузки прута) и функцию  $\tau_{z\theta}(r)$  можно определить, пользуясь формулами и соотношениями (8), (9), (3) и (4).

Из (25), используя (26), получаем теперь

$$\begin{aligned}\tau_{z\theta} &= \tau_{z\theta}(r) - G\vartheta_r + G\gamma_{z\theta}^0, \\ \tau_{r\theta} &= G\gamma_{r\theta}^0.\end{aligned}\quad (27)$$

Заменяя здесь остаточные деформации  $\gamma_{z\theta}^0$  и  $\gamma_{r\theta}^0$  их выражениями согласно (24), имеем

$$\begin{aligned}\tau_{z\theta} &= \tau_{z\theta}(r) - G\vartheta_r + G \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \tau_{r\theta} &= G \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right).\end{aligned}\quad (28)$$

Напряжения  $\tau_{z\theta}^0$  и  $\tau_{r\theta}^0$  должны удовлетворять уравнению равновесия

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0.\quad (29)$$

Подставляя (28) в (29), получим после очевидных упрощений дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0\quad (30)$$

для отыскания функции  $u(r, z)$ .

3°. Мы будем искать решение (30) в виде

$$u = \vartheta^* r z + \sum \left( A_k \operatorname{ch} \frac{\alpha_k z}{a} + B_k \operatorname{sh} \frac{\alpha_k z}{a} \right) J_1 \left( \frac{\alpha_k r}{a} \right) \quad (31)$$

для куска прута конечных размеров и в виде

$$u = \vartheta^* r z + \sum C_k e^{-\frac{\alpha_k z}{a}} J_1 \left( \frac{\alpha_k r}{a} \right) \quad (32)$$

для полубесконечного прута.

Формулы (31) и (32) легко устанавливаются при интегрировании уравнения (30) посредством метода разделения переменных. При этом учитывается, что перемещение  $u(r, z)$  обращается в нуль на оси прута (т. е. при  $r=0$ ) и, кроме того, отбрасывается слагаемое, соответствующее повороту прута без деформации. При непосредственной проверке формул (31) и (32) подстановкой в уравнение (30) следует учесть, что

$$J_1''(\lambda x) + \frac{1}{x} J_1'(\lambda x) + \left( \lambda^2 - \frac{1}{x^2} \right) J_1(\lambda x) = 0 \quad (33)$$

в соответствии с известными дифференциальными равенствами в теории бесселевых функций.

Выражения (28) для остаточных напряжений прута конечной длины принимают теперь, после использования формулы (31), вид

$$\tau_{r\theta}^0 = \tau_{r\theta}(r) - G \vartheta r + G \vartheta^* r + G \sum \left( A_k \operatorname{sh} \frac{\alpha_k z}{a} + B_k \operatorname{ch} \frac{\alpha_k z}{a} \right) \frac{\alpha_k}{a} J_1 \left( \frac{\alpha_k r}{a} \right), \quad (34)$$

$$\tau_{r0}^0 = G \sum \left( A_k \operatorname{ch} \frac{\alpha_k z}{a} + B_k \operatorname{sh} \frac{\alpha_k z}{a} \right) \left[ \frac{\alpha_k}{a} J_1' \left( \frac{\alpha_k r}{a} \right) - \frac{1}{r} J_1 \left( \frac{\alpha_k r}{a} \right) \right]. \quad (35)$$

Ниже будет показано [см. (48)], что  $\vartheta^* = \vartheta_1$ . Если, кроме того, использовать известное соотношение теории бесселевых функций

$$\lambda x J_n'(\lambda x) = n J_n(\lambda x) - \lambda x J_{n+1}(\lambda x), \quad (36)$$

положив в нем  $n=1$ ,  $\lambda = \frac{\alpha_k}{a}$ ,  $x=r$ , то формулы (34) приведутся к виду

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}^0 &= \tau_{r\theta}(r) - G(\vartheta - \vartheta_1)r + \frac{G}{a} \sum \alpha_k \left( A_k \operatorname{sh} \frac{\alpha_k z}{a} + B_k \operatorname{ch} \frac{\alpha_k z}{a} \right) J_1 \left( \frac{\alpha_k r}{a} \right), \\ \tau_{r0}^0 &= -\frac{G}{a} \sum \alpha_k \left( A_k \operatorname{ch} \frac{\alpha_k z}{a} + B_k \operatorname{sh} \frac{\alpha_k z}{a} \right) J_2 \left( \frac{\alpha_k r}{a} \right). \end{aligned} \quad (37)$$

Соответствующие формулы для полубесконечного прута получаются, если в (28) подставить (32) и сделать аналогичные выкладки

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}^0 &= \tau_{r\theta}(r) - G(\vartheta - \vartheta_1)r + \frac{G}{a} \sum \alpha_k C_k e^{-\frac{\alpha_k z}{a}} J_1 \left( \frac{\alpha_k r}{a} \right), \\ \tau_{r0}^0 &= -\frac{G}{a} \sum \alpha_k C_k e^{-\frac{\alpha_k z}{a}} J_2 \left( \frac{\alpha_k r}{a} \right). \end{aligned} \quad (38)$$

На боковой поверхности  $r = a$  остаточное напряжение  $\tau_{r\theta}^0$  отсутствует. Это приводит к трансцендентному уравнению

$$J_2(\alpha_k) = 0 \quad (39)$$

для отыскания количеств  $\alpha_k$ .

Первые пять отличных от нуля корней уравнения (39) суть [3]

$$\alpha_1 = 5,136, \quad \alpha_2 = 8,417, \quad \alpha_3 = 11,620, \quad \alpha_4 = 14,796, \quad \alpha_5 = 17,960. \quad (40)$$

Для определения коэффициентов  $A_k$  и  $B_k$  следует воспользоваться условием обращения в нуль остаточных напряжений  $\tau_{z\theta}^0$  на торцах прута конечной длины. Примем

$$z_1 = 0, \quad z_2 = l \quad (41)$$

координатами центров этих торцов. На основании формулы (34) и условий на торцах получим

$$0 = \tau_{z\theta}(r) - G\vartheta r + G\vartheta^* r + G \sum \frac{\alpha_k}{a} B_k J_1\left(\frac{\alpha_k r}{a}\right), \quad (42)$$

$$0 = \tau_{z\theta}(r) - G\vartheta r + G\vartheta^* r + G \sum \frac{\alpha_k}{a} \left( A_k \operatorname{sh} \frac{\alpha_k l}{a} B_k \operatorname{ch} \frac{\alpha_k l}{a} \right) J_1\left(\frac{\alpha_k r}{a}\right). \quad (43)$$

Умножим правую часть соотношения (42) или соотношения (43) на  $2\pi r^2$  и, далее, проинтегрируем в пределах от  $r = 0$  до  $r = a$ . Используя при  $n = 2$  формулу теории бесселевых функций

$$\int x^n J_{n-1}(\lambda x) dx = \frac{1}{\lambda} x^n J_n(\lambda x) \quad (44)$$

и учитывая равенство (39), имеем

$$\int_0^a r^2 J_1\left(\frac{\alpha_k}{a} r\right) dr = \frac{a}{\alpha_k} r^2 J_2\left(\frac{\alpha_k}{a} r\right) \Big|_0^a = 0. \quad (45)$$

Таким образом, получаем

$$2\pi \int_0^a \tau_{z\theta}(r) \cdot r^2 dr - G\vartheta \frac{\pi a^4}{2} + G\vartheta^* \frac{\pi a^4}{2} = 0, \quad (46)$$

откуда, вводя обозначения (7) и (14), имеем

$$\vartheta^* = \vartheta - \frac{M_{кр}}{GI_p}. \quad (47)$$

Сравнение этой формулы с формулой (19) дает равенство

$$\vartheta^* = \vartheta_1. \quad (48)$$

Последнее означает, что член  $\vartheta^* r z$  в формуле (31) определяет остаточные перемещения бесконечно длинного прута до разреза его по сечениям (41).

В теории бесселевых функций известны формулы

$$(\lambda^2 - \mu^2) \int_0^x x J_n(\lambda x) J_n(\mu x) dx = x [\mu J_n(\lambda x) J_n'(\mu x) - \lambda J_n(\mu x) J_n'(\lambda x)], \quad (49)$$

$$\int_0^x x [J_n(\lambda x)]^2 dx = \frac{x^2}{2} \left\{ [J_n'(\lambda x)]^2 + \left(1 - \frac{n^2}{\lambda^2 x^2}\right) [J_n(\lambda x)]^2 \right\}. \quad (50)$$



Исключая из этих формул производные от бесселевых функций  $J_n(\lambda x)$  и  $J_n(\mu x)$ , посредством формулы (36) приходим к соотношениям

$$(\lambda^2 - \mu^2) \int_0^x x J_n(\lambda x) J_n(\mu x) dx = x [\lambda J_{n+1}(\lambda x) J_n(\mu x) - \mu J_{n+1}(\mu x) J_n(\lambda x)], \quad (51)$$

$$\int_0^x x [J_n(\lambda x)]^2 dx = \frac{x^2}{2} \left\{ [J_{n+1}(\lambda x)]^2 - 2 \frac{n}{\lambda} J_n(\lambda x) J_{n+1}(\lambda x) + [J_n(\lambda x)]^2 \right\}. \quad (52)$$

Заменяя в этих соотношениях переменную интегрирования  $x$  на  $r$ , принимая верхний предел интегрирования равным  $a$  и, кроме того, считая

$$\lambda = \frac{\alpha_i}{a}, \quad \mu = \frac{\alpha_k}{a}, \quad n = 1$$

и учитывая (39), получим формулы

$$\int_0^a r J_1\left(\frac{\alpha_i r}{a}\right) J_1\left(\frac{\alpha_k r}{a}\right) dr = 0, \quad (53)$$

$$\int_0^a r \left[ J_1\left(\frac{\alpha_i r}{a}\right) \right]^2 dr = \frac{a^2}{2} [J_1(\alpha_i)]^2. \quad (54)$$

Умножим теперь правые части соотношений (42) и (43) на

$$r J_1\left(\frac{\alpha_i r}{a}\right)$$

и проинтегрируем их в пределах от  $r = 0$  до  $r = a$ . Приняв во внимание формулы (53) и (54), а также (45), имеем

$$0 = \int_0^a \tau_{z0}(r) J_1\left(\frac{\alpha_i r}{a}\right) r dr + G \frac{\alpha_i}{a} B_i \frac{a^2}{2} [J_1(\alpha_i)]^2. \quad (55)$$

$$0 = \int_0^a \tau_{z0}(r) J_1\left(\frac{\alpha_i r}{a}\right) r dr + G \frac{\alpha_i}{a} \left( A_i \operatorname{sh} \frac{\alpha_i l}{a} + B_i \operatorname{ch} \frac{\alpha_i l}{a} \right) \frac{a^2}{2} [J_1(\alpha_i)]^2. \quad (56)$$

Решая уравнения (55) и (56) относительно  $A_i$  и  $B_i$  и меняя индекс  $i$  на  $k$ , получим

$$A_k = \frac{2 \operatorname{th} \frac{\alpha_k l}{a}}{G \alpha_k a J_1^2(\alpha_k)} \int_0^a \tau_{z0} J_1\left(\frac{\alpha_k r}{a}\right) r dr, \quad (57)$$

$$B_k = - \frac{2}{G \alpha_k a J_1^2(\alpha_k)} \int_0^a \tau_{z0}(r) J_1\left(\frac{\alpha_k r}{a}\right) r dr. \quad (58)$$

Таким образом, задача об отыскании функции  $u(r, z)$  свелась к отысканию определенных интегралов, входящих в состав формул (57) и (58).



4°. Величина поворота какой-либо элементарной площадки сечения прута выражается формулой

$$\omega = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right). \quad (59)$$

Подставляя сюда выражение  $u(r, z)$  согласно формуле (31) и используя (считая  $n = 1$ ) формулу теории бесселевых функций

$$\lambda x J_n'(\lambda x) + n J_n(\lambda x) = \lambda x J_{n-1}(\lambda x), \quad (60)$$

получим для  $\omega$  выражение

$$\omega = \vartheta_1 z + \frac{1}{2} \sum \left( A_k \operatorname{ch} \frac{\alpha_k z}{a} + B_k \operatorname{sh} \frac{\alpha_k z}{a} \right) \frac{\alpha_k}{a} J_0 \left( \frac{\alpha_k r}{a} \right). \quad (61)$$

В частности, для сечения  $z = 0$  имеем в центре прута  $r = 0$

$$\omega = \frac{1}{2} \sum \frac{\alpha_k}{a} A_k, \quad (62)$$

а у боковой поверхности, т. е. при  $r = a$

$$\omega = \frac{1}{2} \sum \frac{\alpha_k}{a} A_k J_0(\alpha_k). \quad (63)$$

В случае полубесконечного прута нетрудно получить следующую формулу:

$$u = \vartheta_1 r z + \sum C_k e^{-\frac{\alpha_k z}{a}} J_1 \left( \frac{\alpha_k r}{a} \right), \quad (64)$$

причем

$$C_k = - \frac{2}{G \alpha_k a J_1'(\alpha_k)} \int_0^a \tau_{\theta z}(r) J_1 \left( \frac{\alpha_k r}{a} \right) r dr \quad (65)$$

и

$$\omega = \vartheta_1 z + \frac{1}{2} \sum \frac{\alpha_k}{a} C_k e^{-\frac{\alpha_k z}{a}} J_0 \left( \frac{\alpha_k r}{a} \right). \quad (66)$$

5°. Для случая идеально пластического материала функция  $\tau_{\theta}(r)$  (см. пример 1) имеет вид

$$\begin{aligned} \tau_{\theta}(r) &= G \vartheta r \quad \text{при } r < r_s \text{ и} \\ \tau_{\theta}(r) &= \tau_s \quad \text{при } r > r_s, \end{aligned} \quad (67)$$

причем

$$G \vartheta r_s = \tau_s. \quad (23)$$

Определение постоянных  $A_k$ ,  $B_k$  или  $C_k$  требует знания величин интегралов

$$\int_0^a \tau_{\theta}(r) J_1 \left( \frac{\alpha_k r}{a} \right) r dr, \quad (68)$$

каждый из которых разбивается на два, именно

$$\int_0^{r_s} G \vartheta r J_1 \left( \frac{\alpha_k r}{a} \right) r dr \quad \text{и} \quad \int_{r_s}^a \tau_s J_1 \left( \frac{\alpha_k r}{a} \right) r dr. \quad (69)$$

Первый интеграл согласно формуле (44) равен

$$G\vartheta \frac{\alpha r_s^2}{\alpha_k} J_2 \left( \frac{\alpha_k r_s}{a} \right). \quad (70)$$

Второй интеграл, интегрируя по частям и используя соотношение, которое следует из (36), при  $n = 0$

$$J_0' \left( \frac{\alpha_k r}{a} \right) = -J_1 \left( \frac{\alpha_k r}{a} \right) \quad (71)$$

можно привести к виду

$$r_s \frac{a}{\alpha_k} \left[ -\alpha J_0(\alpha_k) + r_s J_0 \left( \frac{\alpha_k r_s}{a} \right) \right] + r_s \frac{a}{\alpha_k} \int_{r_s}^a J_0 \left( \frac{\alpha_k r}{a} \right) dr. \quad (72)$$

Таким образом, учитывая, кроме того (67), получим, что

$$\int_0^a r_{z\theta}(r) J_1 \left( \frac{\alpha_k r}{a} \right) r dr = r_s \frac{\alpha r_s}{\alpha_k} \left[ J_1 \left( \frac{\alpha_k r_s}{a} \right) + J_0 \left( \frac{\alpha_k r_s}{a} \right) \right] - \frac{r_s \alpha^2}{\alpha_k} J_0(\alpha_k) + r_s \frac{\alpha^2}{\alpha_k^2} \left[ J^*(\alpha_k) - J^* \left( \frac{\alpha_k r_s}{a} \right) \right]. \quad (73)$$

Здесь для интеграла от функции  $J_0(z)$  введено обозначение

$$J^*(z) = \int_0^z J_0(z) dz. \quad (74)$$

Согласно известной рекуррентной формуле теории бesselевых функций

$$J_{n+1}(z) + J_{n-1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z). \quad (75)$$

Используя эту формулу при  $n = 1$ , получим окончательно

$$\int_0^a r_{z\theta}(r) J_1 \left( \frac{\alpha_k r}{a} \right) r dr = \frac{r_s \alpha^2}{\alpha_k^2} \left[ 2J_1 \left( \frac{\alpha_k r_s}{a} \right) - \alpha_k J_0(\alpha_k) + J^*(\alpha_k) - J^* \left( \frac{\alpha_k r_s}{a} \right) \right]. \quad (76)$$

Посредством формулы (76) коэффициенты  $A_k$ ,  $B_k$  и  $C_k$  можно представить, согласно их выражениям (57), (58) и (65), в виде

$$C_k = B_k = -A_k \coth \frac{\alpha_k l}{2a} = -\frac{2r_s \alpha}{G \alpha_k^2 J_1^2(\alpha_k)} \left[ 2J_1 \left( \frac{\alpha_k r_s}{a} \right) - \alpha_k J_0(\alpha_k) + J^*(\alpha_k) - J^* \left( \frac{\alpha_k r_s}{a} \right) \right]. \quad (77)$$

Дальнейшие расчеты согласно формулам (32) или (64) сводятся к простым вычислениям.

**Пример 2.** Определим, какие остаточные деформации и напряжения окажутся в пруте, рассмотренном в примере 1, если его разрезать на две полубесконечные части. Имеем согласно данным примера 1

$$r_s = \frac{1}{2} a$$

и, следовательно, в соответствии с (77)

$$C_k = -\frac{2r_s a}{G} \frac{1}{a_k^3 J_1^2(\alpha_k)} \left[ 2J_1\left(\frac{\alpha_k}{2}\right) - \alpha_k J_0(\alpha_k) + J^*(\alpha_k) - J^*\left(\frac{\alpha_k}{2}\right) \right].$$

Пользуясь таблицами бесселевых функций [3, 4], получаем, используя (40), следующие значения первых четырех коэффициентов:

$$C_1 = -\frac{2r_s a}{G} 0,0556, \quad C_2 = \frac{2r_s a}{G} 0,0116,$$

$$C_3 = \frac{2r_s a}{G} 0,0008, \quad C_4 = \frac{2r_s a}{G} 0,0004.$$

Заметим, что значения функции  $J^*(x)$  при  $x > 1,00$  не табулированы и их приходится вычислять [4] по формуле

$$\begin{aligned} J^*(x) &= \int_0^x J_0(x) dx = \frac{\pi x}{2} [J_0(x) H_0'(x) + J_1(x) H_0(x)] = \\ &= \frac{\pi x}{2} \left\{ J_0(x) \left[ \frac{2}{\pi} - H_1(x) \right] + J_1(x) H_0(x) \right\} \end{aligned}$$

или посредством численного интегрирования функции  $J_0(x)$ .

На основании (64) имеем для нашего примера формулу для перемещений

$$\begin{aligned} u &= \vartheta_1 r z - \frac{2r_s a}{G} \left[ 0,0556 e^{-5,136 \frac{z}{a}} J_1\left(5,136 \frac{r}{a}\right) - 0,0116 e^{-8,417 \frac{z}{a}} J_1\left(8,417 \frac{r}{a}\right) - \right. \\ &\quad \left. - 0,0008 e^{-11,620 \frac{z}{a}} J_1\left(11,620 \frac{r}{a}\right) - 0,0004 e^{-14,796 \frac{z}{a}} J_1\left(14,796 \frac{r}{a}\right) \right] \end{aligned}$$

согласно примеру 1

$$\vartheta_1 = \frac{17}{24} \frac{r_s}{aG} = \frac{17}{48} \vartheta.$$

Заметим, что в нашем примере  $r_s = \frac{a}{2}$  и, следовательно,

$$r_s = G \vartheta r_s = G \frac{a}{2} \vartheta,$$

где  $\vartheta$  угол погонной крутки при первоначальном деформировании за предел упругости.

Удерживая только два члена в разложении по бесселевым функциям, окончательно имеем

$$\begin{aligned} u &= a^2 \vartheta \left[ 0,3512 \frac{r z}{a^2} - 0,0556 J_1\left(5,136 \frac{r}{a}\right) e^{-5,136 \frac{z}{a}} + \right. \\ &\quad \left. + 0,0116 J_1\left(8,417 \frac{r}{a}\right) \cdot e^{-8,417 \frac{z}{a}} \right]. \end{aligned}$$

Поворот элементов прута определяется формулой (66), которая для нашего примера имеет вид

$$\omega(rz) = a\vartheta \left[ 0,3542 \frac{z}{a} - 0,1428 J_0 \left( 5,136 \frac{r}{a} \right) e^{-5,136 \frac{z}{a}} + \right. \\ \left. + 0,0488 J_0 \left( 8,417 \frac{r}{a} \right) e^{-8,417 \frac{z}{a}} + \dots \right].$$

Для сечения  $z=0$  имеем при  $r=0$  и при  $r=a$

$$\omega(0, 0) = -0,0940 a\vartheta,$$

$$\omega(0, a) = 0,0220 a\vartheta.$$

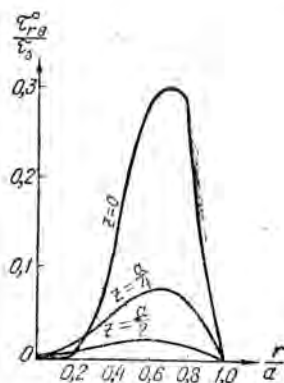


Рис. 6.

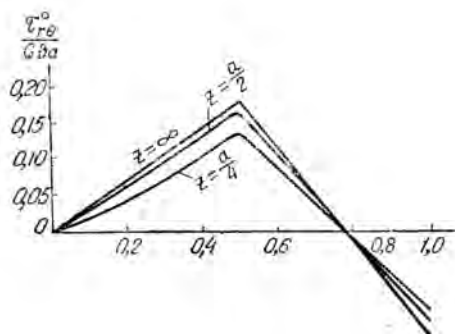


Рис. 7.

Определим, наконец, остаточные напряжения в элементах сечений  $z=0, \frac{a}{2}, a$ . Для этого следует воспользоваться формулами (38), которые в нашем примере приводятся к виду

$$\tau_{z0}^* = \tau_{z0}(r) - \frac{31}{48} G\vartheta r + G\vartheta a \left[ -0,2856 e^{-5,136 \frac{z}{a}} J_1 \left( 5,136 \frac{r}{a} \right) + \right. \\ \left. + 0,0976 J_1 \left( 8,417 \frac{r}{a} \right) e^{-8,417 \frac{z}{a}} + \dots \right],$$

$$\tau_{r0}^* = -G\vartheta a \left[ -0,2856 e^{-5,136 \frac{z}{a}} J_2 \left( 5,136 \frac{r}{a} \right) + \right. \\ \left. + 0,0976 J_2 \left( 8,417 \frac{r}{a} \right) e^{-8,417 \frac{z}{a}} + \dots \right],$$

где функция  $\tau_{z0}(r)$  в соответствии с примером I определяется формулами

$$\tau_{z0}(r) = G\vartheta r \quad \text{при } 0 \leq r \leq \frac{a}{2}$$

$$\tau_{z0}(r) = G\vartheta \frac{a}{2} = \text{const} \quad \text{при } a \geq r \geq \frac{a}{2}.$$

Таблицы значений  $\tau_{r0}^*$  и  $\tau_{z0}^*$  приводятся ниже; см. также графики (рис. 6 и 7).

Таблица значений  $\frac{\tau_{r\theta}^0}{\tau_x}$ 

$z \backslash \frac{r}{a}$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0	0	0,0012	0,116	0,276	0,250	0
$\frac{a}{4}$	0	0,0120	0,0463	0,0765	0,0604	0
$\frac{a}{2}$	0	0,0044	0,0146	0,0212	0,0156	0
$a$	0	0,0004	0,0012	0,0016	0,0011	0

Таблица значений  $\frac{\tau_{z\theta}^0}{G\theta a}$ 

$z \backslash \frac{r}{a}$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\frac{a}{4}$	0	0,0426	0,0986	0,0841	-0,0092	-0,116
$\frac{a}{2}$	0	0,0619	0,129	0,105	-0,0143	-0,138
$a$	0	0,0701	0,141	0,112	-0,0165	-0,145
$\infty$	0	0,0708	0,142	0,113	-0,0167	-0,146

Как видно из графиков, а также таблиц, остаточные напряжения в сечениях, расположенных на расстоянии радиуса от края прута, почти не отличаются от соответствующих напряжений в бесконечно длинном пруте.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ляв, Математическая теория упругости, Объедин. научно-техн. из-во НКТП СССР, М.—Л., 1935.
2. А. А. Ильюшин, Теория пластичности, ОТГИЗ, М.—Л., 1948.
3. Е. Янке и Ф. Эмде, Таблицы функций с формулами и кривыми, ОГИЗ, М.—Л., 1948.
4. Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, ч. I и II, Из-во иностр. литер., М., 1949.

Получена 28 февраля 1952 г.

Киев