Задача о малых колебаниях открытого сосуда с жидкостью под действием упругой силы

Н. Н. Моисеев

Данная задача является простейшим примером движения твердого тела, имеющего полости, частично заполненные жидкостью. В настоящее время практика выдвигает ряд подобных задач. К ним относятся некоторые задачи, связанные с великими стройками коммунизма: например, проблема поведения наливных речных барж во время сильного волнения на водохранилищах.

1. Постановка задачи и исходные уравнения

Будем изучать движение прямоугольного сосуда массы m_2, заполненного идеальной и несжимаемой жидкостью массы m_1. В покоящемся состоянии жидкость имеет глубину h.

Обозначим через x рабочее поджатие пружины, через Mk^2 характеристику возвращающей силы, а через $M = m_1 + m_2$ массу сосуда с жидкостью.

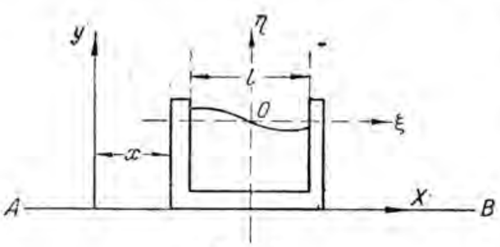

Рис. 1.

Свяжем с движущимся сосудом подвижную систему координат $\xi O \eta$ так, чтобы ось $O\xi$ была направлена вдоль свободной поверхности жидкости в том случае, если жидкость покоится; ось $O\eta$ направлена вертикально вверх.

Уравнение движения системы сосуд—жидкость в проекции на ось $O\xi$ мы можем принять в виде [1]

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + \varrho \int_{\tau} \frac{d\bar{v}_{\xi}}{dt}\, d\tau = -Mk^2 x, \tag{1}$$

где через $\bar{v}$ мы обозначили скорость жидкости относительно сосуда.

Интеграл в уравнении (1) распространен на весь объем, занимаемый жидкостью.

Движение жидкости относительно сосуда происходит под действием объемных сил, не зависящих от координат частиц жидкости и их скоростей. Эти силы имеют потенциал

$$U = -\ddot{x}\xi - g\eta. \tag{2}$$

[1] Плоскость AB, вдоль которой скользит сосуд, будем считать идеальной.

Поэтому, предполагая движение жидкости потенциальным в начальный момент, мы можем его считать таковым в последующие моменты времени.

Обозначим потенциал скоростей через $\varphi(\xi\eta;\ t)$, тогда уравнение (1) примет вид

$$M\frac{d^2x}{dt^2}+\varrho\frac{d}{dt}\int\limits_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}\int\limits_{-h}^{\zeta(\xi)}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\,d\xi\,d\eta=-Mk^2x,$$

где $\eta=\zeta(\xi)$ — уравнение свободной поверхности.

В силу малости рассматриваемых колебаний будем писать это уравнение в виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\varrho}{M}\int\limits_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}\int\limits_{-h}^{0}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial\xi}\,d\xi\,d\eta=-k^2x. \tag{1'}$$

Потенциал скоростей удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2\varphi=0 \tag{3}$$

при следующих граничных условиях на стенках сосуда:

$$\begin{aligned}\xi&=\pm\frac{l}{2},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}=0,\\ \eta&=-h,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}=0,\end{aligned} \tag{4}$$

при $\eta=0$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}=-\frac{1}{g}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\dddot{x}\xi\right). \tag{5}$$

Таким образом, задача сводится к отысканию функций $x(t)$ и $\varphi(\xi\eta;\ t)$, удовлетворяющих уравнения (1) и (3) при граничных условиях (4) и (5).

Для полного определения движения нам необходимо задать начальные значения потенциала и его производной на поверхности, или в силу малости колебаний задать функции

$$\begin{aligned}\varphi(\xi\,0\,0)&=\varphi_1(\xi),\\ \frac{d\varphi(\xi\,0\,0)}{\partial t}&=\varphi_2(\xi),\end{aligned} \tag{6}$$

а также положение и скорость корпуса сосуда в начальный момент $t=t_0$

$$\begin{aligned}x&=x_0,\\ \dot{x}&=\dot{x}_0.\end{aligned}$$

2. Решение задачи о вынужденных колебаниях жидкости

Определим вначале движение тяжелой жидкости, совершающей колебания под действием массовой силы, являющейся произвольной функцией времени и направленной вдоль оси OE.

Эта задача сводится к отысканию потенциала скоростей, удовлетворяющего уравнению (3) при граничных условиях (4) и (5), где вместо $-\ddot{x}$ стоит произвольная функция времени $X(t)$.

Разыщем частные решения, удовлетворяющие граничным условиям (4). Для этого положим

$$\varphi = f(t)\, a(\xi)\, b(\eta). \tag{7}$$

Подставляя в уравнение (3), найдем

$$a''(\xi) + p^2 a(\xi) = 0,$$
$$b''(\eta) + p^2 b(\eta) = 0.$$

Интегрируя, получим

$$\begin{aligned} a(\xi) &= A\cos(p\xi + \theta) \\ b(\eta) &= c_1 e^{p\eta} + c_2 e^{-p\eta}. \end{aligned} \tag{8}$$

Второе из граничных условий (4) нам позволяет сразу установить вид функции $b(\eta)$

$$b(\eta) = c \operatorname{ch} p(\eta + h),$$

где c — произвольная постоянная.

Подставляя значения φ в первые краевые условия (4), находим, что фаза и собственные числа p удовлетворяют равенствам

$$\pm p\frac{l}{2} + \theta = n\pi,$$

где n — произвольное целое число.

Отсюда

$$p = n_1 \frac{\pi}{l},$$

где n_1 — произольное целое число; следовательно,

$$\theta = \pi\left(n \pm \frac{n_1}{2}\right).$$

Так как $a(\xi) = A\cos p\xi \cos\theta - A\sin p\xi \sin\theta$, то

при n_1 — нечетном $\cos\theta = 0$,

при n_1 — четном $\sin\theta = 0$.

Поэтому частные решения, удовлетворяющие граничной задаче, имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= f_1 \operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(\eta + h)\sin\frac{\pi}{l}\xi, \\ \varphi_2 &= f_2 \operatorname{ch}\frac{2\pi}{l}(\eta + h)\cos\frac{2\pi}{l}\xi, \\ \varphi_3 &= f_3 \operatorname{ch}\frac{3\pi}{l}(\eta + h)\sin\frac{3\pi}{l}\xi, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{9}$$

Решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее граничным условиям на свободной поверхности (5), будем искать в виде ряда

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i.$$

Разложим функцию $\eta=\xi$ в ряд Фурье по собственным функциям

$$\sin\frac{\pi}{l}\xi;\quad \cos\frac{2\pi}{l}\xi;\quad \sin\frac{3\pi}{l}\xi;\dots$$

В силу нечетности функции $\eta=\xi$ получим

$$\xi=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}\sin\frac{2n+1}{l}\pi\xi, \tag{10}$$

где

$$a_{2n+1}=(-1)^n\frac{4l}{(2n+1)^2\pi^2}.$$

Подставляя выражения (9) и ряд (10) в граничное условие (5) и сравнивая коэфициенты при одних и тех же тригонометрических функциях, для определения функций f_i получим следующую систему диференциальных уравнений:

$$f_i''+\frac{i\pi g}{l}\,\mathrm{th}\left(\frac{i\pi h}{l}\right)f_i=\frac{X'(t)}{\mathrm{ch}\frac{i\pi h}{l}}a_i. \tag{11}$$

Так как $i=0$, если i четно, обозначая

$$\sigma_i^2=\frac{i\pi g}{l}\,\mathrm{th}\frac{i\pi h}{l},$$

перепишем нашу систему в виде

$$f_i''+\sigma_i^2 f_i=X'(t)\frac{a_i}{\mathrm{ch}\frac{i\pi h}{l}}. \tag{12}$$

Отсюда видим, что резонансными будут частоты четных индексов.

Задача о колебаниях жидкости в сосуде может быть легко доведена до конца, так как уравнения системы (11) могут быть проинтегрированы независимо друг от друга, а произвольные постоянные определятся из начальных условий (6).

3. Решение задачи о колебаниях системы

Зная решение гидродинамической задачи, задачу о движении системы сосуд—жидкость мы можем свести к интегрированию бесконечной системы линейных диференциальных уравнений.

В самом деле потенциал скоростей относительно движения жидкости

$$\varphi=\sum_i f_i(t)\,\psi_i(\xi\ \eta), \tag{13}$$

где

$$\psi_i=\frac{1}{i\,\mathrm{ch}\frac{i\pi h}{l}}\cdot\frac{\sin}{\cos}\frac{i\pi\xi}{l}\,\mathrm{ch}\frac{i\pi(\eta+h)}{l},$$

а функции f_i удовлетворяют системе диференциальных уравнений

$$f_i''+\sigma_i^2 f_i=-x'''a_i i, \tag{14}$$

будет удовлетворять всем граничным условиям.

Поэтому, подставляя (13) в уравнение (1), найдем

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\varrho}{M}\left\{\sum_i \frac{df_i}{dt}\int\limits_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}\int\limits_{-h}^{0}\frac{\partial\psi_i}{\partial\xi}\,\partial\xi\,\partial\eta\right\}=-k^2x.$$

Произведя интегрирование, мы приведем полученное выражение к виду

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\sum_{n=0}^{\infty}d_{2n+1}\frac{df_{2n+1}}{dt}+k^2x=0, \tag{15}$$

где коэфициенты определяются по формулам

$$d_{2n+1}=(-1)^n\frac{2\,\mathrm{th}\left(\frac{2n+1}{l}\,\pi h\right)}{h\cdot(2n+1)^2\cdot\pi\cdot\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)}. \tag{15'}$$

Обозначая, далее, через

$$b_{2n+1}=a_{2n+1}\cdot(2n+1)=(-1)^n\frac{4l}{(2n+1)\pi^2}, \tag{16}$$

полную систему диференциальных уравнений, определяющих малые колебания системы сосуд—жидкость, мы можем написать в виде

$$\begin{gathered} x''+\sum_{n=0}^{\infty}d_{2n+1}f'_{2n+1}=-k^2x,\\ f''_{2n+1}+\sigma^2_{2n+1}f+x'''\,b_{2n+1}=0.\\ n=0,\ 1,\ 2\ldots \end{gathered} \tag{17}$$

Ограничиваясь несколькими первыми членами разложения функции ξ по собственным функциям задачи, мы заменим систему (17) конечным числом линейных диференциальных уравнений с постоянными коэфициентами. Таким образом, эффективное приближенное решение может встретить лишь вычислительные трудности.

4. Уравнение частот

Будем рассматривать решение уравнения (17) в виде

$$X=Be^{\omega t}f_{2n+1}=A_{2n+1}\,e^{\omega t}.$$

Для определения произвольных постоянных получим систему уравнений

$$\begin{gathered} B+\sum\frac{\omega d_{2n+1}A_{2n+1}}{\omega^2+k^2}=0,\\ \frac{\omega^3 b_{2n+1}}{\omega^2+\sigma^2_{2n+1}}B+A_{2n+1}=0. \end{gathered} \tag{18}$$

Система уравнений (18) удовелтворяет условиям теоремы Коха, поэтому ω должно быть корнем уравнения

$$\omega^2+k^2=\omega^4\sum\frac{d_{2n+1}\,b_{2n+1}}{\omega^2+\sigma^2_{2n+1}}, \tag{19}$$

которое мы будем называть уравнением частот.

Обозначая

$$\Phi_1 = \chi + k^2,$$

$$\Phi_2 = \chi^2 \sum \frac{b_{2n+1} d_{2n+1}}{\chi + \sigma^2_{2n+1}},$$

где $\chi = \omega^2$, мы легко определим графически распределение корней уравнения (19).

Основным является вопрос о знаке корней уравнения частот. Для того чтобы справа от оси ординат не было корней этого уравнения, т. е. чтобы все корни и уравнения (19) были чисто мнимые, достаточно, чтобы для любого $\omega^2 > 0$ было бы выполнено неравенство

$$S = \sum \frac{d_{2n+1} b_{2n+1}}{1 + \frac{\sigma^2_{2n+1}}{\omega^2}} \leqslant 1;$$

но последнее всегда имеет место.

В самом деле, так как $\frac{\operatorname{th} x}{x} \leqslant 1$, то

$$S \leqslant \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = 1.$$

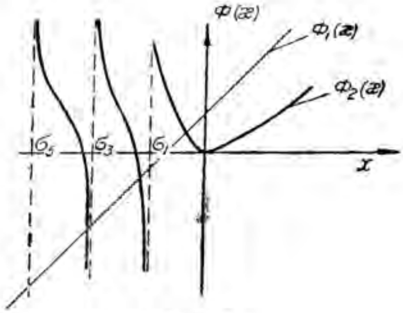

Рис. 2.

Таким образом, мы приходим к следующей теореме:

Теорема. *Движение, описываемое решением системы* (17), *устойчиво в смысле Ляпунова.*

Получена 23 июля 1951 г.
Ростов