Об исчислении задач

Б. Ю. Пильчак

Введение

В настоящей статье рассматриваются некоторые исчисления математической логики, не содержащие закона исключенного третьего.

1°. Применение закона исключенного третьего в математике вызывает особые трудности. Этот закон широко используется в доказательствах от противного. На нем основаны все „чистые (неэффективные) доказательства существования".

В то время как субъективно-идеалистические установки интуициониста Брауэра, — согласно которым математические объекты могут „существовать" лишь в результате „построения" их из данных „интуиции", — ведут к запрещению использования в математике закона исключенного третьего и означают кризис основ математики, советские математики, исходящие из методологии диалектического материализма, рассматривают вопрос о применимости закона исключенного третьего конкретно. Неприменимость закона исключенного третьего в области конструктивных доказательств отнюдь не означает неприменимость его в других случаях, но предполагает специальное исследование аппарата исчислений математической логики, не пользующихся этим законом.

2°. Первое достаточно сильное исчисление так называемой логики предложений, не содержащее закона исключенного третьего, было разработано В. И. Гливенко [1] [1, 2] (1928—1929 гг.). В дальнейшем мы будем обозначать малыми латинскими буквами $p, q, r, \ldots$ элементарные формулы исчисления Гливенко. Для обозначения логических операций будем употреблять знаки $\supset$ (импликация), $\wedge$ (конъюнкция), $\vee$ (дизъюнкция) и $\neg$ (отрицание). Иногда будем употреблять общий знак $\boxdot$ для обозначения бинарных логических операций $\supset, \wedge, \vee$. Произвольные формулы будем обозначать жирными латинскими буквами $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots$ Система аксиом исчисления Гливенко (T-исчисления) следующая [2]:

---

[1] Собственно говоря, первое исчисление без закона исключенного третьего было предложено А. Н. Колмогоровым в 1925 г. [3] в связи с его критикой концепции Брауэра. Но это исчисление было более слабым, чем исчисление Гливенко (оно содержало только связки $\supset$ и $\neg$, недостаточные для определения связок $\wedge$ и $\vee$ исчисления Гливенко).

[2] Аксиомы I—IX были опубликованы в работе [1]; в [2] к ним были добавлены аксиомы А—Д. Эти аксиомы не образуют независимой системы (например, аксиомы II и А заведомо лишние в ней); мы сохранили, однако, полный список аксиом, предложенных В. И. Гливенко, и его нумерацию.

I) $p \supset p$;

II) $(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$;

III) $p \wedge q \supset p$;

IV) $p \wedge q \supset q$;

V) $(p \supset q) \supset ((p \supset r) \supset (p \supset q \wedge r))$;

VI) $p \supset p \vee q$;

VII) $q \supset p \vee q$;

VIII) $(p \supset q) \supset ((r \supset q) \supset (p \vee r \supset q))$;

IX) $(p \supset q) \supset ((p \supset \neg q) \supset \neg p)$;

A) $(p \supset (q \supset r)) \supset (q \supset (p \supset r))$;

B) $(p \supset (p \supset q)) \supset (p \supset q)$;

C) $p \supset (q \supset p)$;

D) $\neg q \supset (q \supset p)$.

Правила вывода T-исчисления:

R_1 — правило заключения: если формулы A и $A \supset B$ доказаны, то и формула B доказана: $\frac{A, A \supset B}{B}$[1].

R_2 — правило подстановки: если формула $A(p)$ доказана, то доказана и формула $A(B)$, получающаяся из $A(p)$ путем подстановки произвольной формулы B на место всех вхождений p.

Класс формул, доказуемых в T-исчислении, будем обозначать T.

Как легко показать, исчисление Гейтинга [5] (1930), опубликованное позднее, эквивалентно исчислению Гливенко. Принадлежащее А. Н. Колмогорову [4], интерпретировавшему исчисление Гейтинга в виде исчисления задач, содержательное истолкование этих исчислений легло в основу всех дальнейших подлинно научных исследований аппарата математических исчислений, не пользующихся законом исключенного третьего. В связи с этим всякое исчисление, эквивалентное исчислению Гливенко, мы будем называть исчислением задач.

3°. В связи с существованием различных (по форме) исчислений, эквивалентных исчислению Гливенко (исчисления Гейтинга, Генцена [6] и др.), возникает задача отыскания такой характеристики этих исчислений, которая не зависела бы от того или иного выбора формул, принятых за аксиомы исчисления[2].

---

[1] $\frac{A_1, A_2, \ldots, A_n}{B}$ является сокращенной записью правила, позволяющего перейти от доказанных формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$ к формуле B, которая согласно этому правилу является доказанной.

[2] Дело в том, что эти исчисления нельзя охарактеризовать тем, что они отличаются от так называемой классической логики предложений „только" отсутствием закона исключенного третьего. T-исчисление обладает следующими свойствами:

а) Формула $p \vee \neg p$ в нем невыводима.

б) Если к T-исчислению добавить эту формулу в качестве новой аксиомы, получится полное исчисление классической логики предложений.

Эти свойства не являются, однако, характеристическими для исчислений задач, поскольку существуют исчисления, обладающие этими свойствами, но не эквивалентные исчислению Гливенко (такое исчисление получится, например, если к аксиомам T-исчисления добавить ослабленный закон исключенного третьего $\neg p \vee \neg\neg p$). Даже если мы потребуем, чтобы после присоединения $p \vee \neg p$, в качестве аксиомы получилось полное

Как уже указано, А. Н. Колмогоров [4] интерпретировал рассматриваемые исчисления, как исчисления задач. В этой интерпретации каждой формуле логики предложений ставится в соответствие некоторая задача, и притом таким образом, что формулам, доказуемым в исчислении Гливенко, соотвествуют только решенные задачи, между тем как формуле $p \vee \neg p$ ставится в соответствие неразрешимая задача. Интерпретация Колмогорова непосредственно не дает возможности описать класс формул, доказуемых в T-исчислении, независимо от системы аксиом этого исчисления, так как при этой интерпретации класс решенных задач определяется именно системой аксиом. Попытки описать этот класс независимо от системы аксиом, используя новейшие работы по теории рекурсивных функций и по теории алгоритмов, пока не увенчались успехом. Тем не менее идеи, выраженные в работе [4], позволили выделить некоторые свойства исчисления Гливенко, полностью характеризующие рассматриваемый класс исчислений. Полностью в том смысле, что каждое исчисление, обладающее этими свойствами, эквивалентно T-исчислению (обратное утверждение тривиально).

Описанию этих свойств посвящен § 1 настоящей статьи.

4°. Известно, что исчисление Гейтинга (а следовательно, и всякое исчисление задач) не может быть адэкватно представлено матрицей с конечным числом элементов (Гливенко [1], Гёдель [9]). Однако Яськовский [7] построил последовательность $\{I_n\}$ конечнозначных матриц, а при ее помощи — одну счетнозначную матрицу I_∞, адэкватно представляющую исчисление Гейтинга. Точнее говоря, по теореме Яськовского, формула A логики предложений доказуема в исчислении Гейтинга тогда и только тогда, когда она является тождественной (см. стр. 12) в каждой из матриц I_n. При этом для каждой формулы A, по утверждению Яськовского, существует n такое, что либо A доказуема в исчислении Гейтинга, либо она не тождественна в I_n. Матрицы I_n и I_∞, в отличие от матриц классической логики предложений, не допускают естественной интерпретации. Поэтому мы не склонны рассматривать результат Яськовского как содержательную характеристику исчисления задач. Но как матричный критерий доказуемости этот результат представляет ценность как сам по себе, так и по своим приложениям (например, на нем основан интересный, правда не алгоритмический, топологический критерий доказуемости в исчислении задач [1]).

Между тем этот важный результат опубликован Яськовским без доказательства; насколько нам известно, доказательство не было опубликовано и в дальнейшем. В § 2—6 настоящей статьи содержится доказательство матричного критерия Яськовского (изложение ведется в терминах T-исчисления). Номер n матрицы I_n, при помощи которой решается вопрос о доказуемости или недоказуемости формулы A, определяется

исчисление классической логики предложений с независимой системой аксиом (приведенный выше пример не удовлетворяет этому требованию), то и тогда мы не получим полной характеристики исчислений типа исчисления Гливенко; можно построить исчисление, удовлетворяющее этому требованию, но значительно более узкое, чем T-исчисление.

[1] Стоун [10], Тарский [8].

нами при этом эффективно. Так как, кроме того, I_n — конечнозначная матрица, то вопрос о доказуемости A решается алгоритмически, следовательно, матричный критерий доказуемости является решением проблемы разрешимости для исчисления задач. Однако этот алгоритм (как и предложенный ранее алгоритм Генцена [6]) вследствие своей громоздкости представляет собой только теоретический интерес. Полученное нами доказательство теоремы Яськовского позволило сформулировать значительно более простой алгоритм для решения проблемы разрешимости (§ 7).

§ 1. Характеристические свойства T-исчисления

В этом параграфе описываются свойства, полностью характеризующие T-исчисление. Чтобы упростить формулировку свойства 3, мы удалим из этого исчисления правило подстановки и заменим все аксиомы схемами аксиом. В соответствии с этим все малые латинские буквы $p, q, r, \ldots$ заменим жирными латинскими $A, B, C, \ldots$ Известно, что полученное в результате такого преобразования исчисление, которое мы будем называть T_1-исчислением, эквивалентно T-исчислению.

1°. T_1-исчисление обладает следующими свойствами:

1. *В T_1-исчислении действует закон тождества,* формулировка которого, как всегда, звучит тривиально:

Если формула A доказана в T_1-исчислении, то она доказана в T_1-исчислении.

Формально это свойство T_1-исчисления может быть записано в виде доказуемого для него правила $\dfrac{A}{A}$.

2. *В T_1-исчислении имеется класс формул, которые считаются опровержимыми.* К классу таких формул относятся, например, все формулы вида $A \wedge \neg A$ (все формулы такового вида эквивалентны между собой). *К классу опровержимых формул относятся также все те (и только те) формулы, которые эквивалентны $A \wedge \neg A$.*

Если бы какая-нибудь опровержимая в T_1-исчислении формула была бы доказуема в нем, то в T_1-исчислении была бы доказуема любая формула B. В самом деле, в T_1-исчислении, как и в классической логике предложений, действует правило замены эквивалентным (для T_1-исчисления это правило доказывается так же, как и для классической логики предложений). Поэтому все опровержимые формулы можно обозначить одним и тем же знаком, например, *1*. Легко видеть, что для T_1-исчесления доказуемо правило $\dfrac{1}{B}$, выражающее свойство 2 T_1-исчисления [1].

3. *Для T_1-исчисления имеет силу обобщенная теорема дедукции: если правило вида* $\dfrac{A_1 A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n}{B}$ доказуемо для T_1-исчисления, то для этого исчисления доказуемо и правило $\dfrac{A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}}{A_n \supset B}$ (доказывается так же, как и для классической логики предложений).

---

[1] Любую опровержимую формулу *1* можно заменить эквивалентной формулой $\neg A \wedge A$, из которой следует (в силу аксиомы D) доказуемость B.

В случае, когда $n = 1$, эта теорема означает, что *формула $A \supset B$ доказуема в T_1-исчислении в том случае, когда для этого исчисления доказуемо правило* $\frac{A}{B}$.

4. Правило $\frac{A, A \supset B}{B}$ T_1-исчисления свидетельствует о том, что если формула $A \supset B$ доказуема в T_1-исчислении, то в этом исчислении доказуемо $\frac{A}{B}$, т. е. что *доказуемость* $\frac{A}{B}$ *является* не только достаточным, но и *необходимым условием доказуемости формулы* $A \supset B$.

5. *Формула $A \wedge B$ доказуема в T_1-исчислении тогда и только тогда, когда доказуемы обе формулы A и B.* Это следует из того, что для T_1-исчисления доказуемы правила

$$5' \ \frac{A, B}{A \wedge B}; \quad 5'' \ \frac{A \wedge B}{A}; \quad 5''' \ \frac{A \wedge B}{B}.$$

6. *Формула $A \vee B$ доказуема в T_1-исчислении тогда и только тогда, когда доказуема по крайней мере одна из формул A или B.* В самом деле, для T_1-исчисления доказуемы правила

$$6' \ \frac{A}{A \vee B}; \quad 6'' \ \frac{B}{A \vee B}.$$

Далее, как показал Генцен [6], имеет место следующее положение:

6'''. Формула $A \vee B$ доказуема в исчислении Гейтинга, а значит, и в эквивалентном ему T_1-исчислении только в том случае, когда доказуема по крайней мере одна из формул A или B.

7. *Формула $\urcorner A$ доказуема в T_1-исчислении тогда и только тогда, когда A ведет к противоречию,* т. е. когда в T_1-исчислении доказуема формула $A \supset 1$. Действительно, если доказуема формула $\urcorner A$, то формула $A \supset 1$ доказуема в силу аксиомы D. Пусть теперь доказуема формула $A \supset 1$. Так как в T_1-исчислении действует правило замены эквивалентным, то формулу 1 можно заменить эквивалентной ей формулой $B \wedge \urcorner B$, т. е. доказуема формула $A \supset B \wedge \urcorner B$, следовательно, доказуема и формула $\urcorner A$.

Собственно характерным для T_1-исчисления является свойство 6. Классическая логика предложений обладает всеми перечисленными свойствами, кроме 6''' (формула $p \vee \urcorner p$ доказуема в классической логике предложений, хотя каждая из формул p и $\urcorner p$ недоказуема).

2°. Лемма 1. *Если исчисление S обладает свойствами 1—7, в формулировках которых 1 обозначает любую формулу вида $A \wedge \urcorner A$*[1], *то каждая формула, доказуемая в T_1-исчислении, доказуема и в S-исчислении.*

Так как правило R_1 заключения T_1-исчисления имеется в S-исчислении (свойство 4), то достаточно доказать, что все аксиомы T_1-исчисления доказуемы и в S-исчислении. Мы здесь не будем приводить доказательства

[1] Мы имеем право ввести один знак для всех формул вида $A \wedge \urcorner A$, так как свойство 2 заключает в себе требование, чтобы все формулы этого вида были эквивалентны между собой и чтобы правило замены эквивалентным действовало в S-исчислении.

для всех аксиом исчисления, ограничимся только двумя аксиомами (V и IX).

1. Аксиома V T_1-исчисления следует из доказуемого в S-исчислении правила

$$\frac{A\supset B,\ A\supset D,\ A}{B\wedge D} \tag{а}$$

(свойства 4, 5) путем трехкратного применения теоремы дедукции (свойство 3).

2. Для доказательства аксиомы IX T_1-исчисления докажем правило

$$\frac{A\supset B,\quad A\supset \urcorner B}{\urcorner A}. \tag{б}$$

В S-исчислении доказуемо правило $\frac{A\supset B,\ A\supset \urcorner B,\ A}{B\wedge \urcorner B}$, являющееся частным случаем правила (а). По свойству 3 в S-исчислении доказуемо правило $\frac{A\supset B,\ A\supset \urcorner B}{A\supset B\wedge \urcorner B}$.

Но $B\wedge \urcorner B_{Df}=1$, следовательно, если в S-исчислении доказуемы формулы $A\supset B$, $A\supset \urcorner B$, то в нем доказуема и формула $A\supset 1$, что согласно свойству 7 означает, что в S-исчислении доказуема формула $\urcorner A$. Правило (б) доказано. Аксиома IX получается из него путем двукратного применения теоремы дедукции.

Так же просто доказываются в исчислении S остальные аксиомы T_1-исчисления.

3°. Лемма 2. *Если класс доказуемых формул исчисления S (включая и аксиомы) можно полностью описать свойствами 1—7, то все формулы, доказуемые в S-исчислении, доказуемым и в T_1-исчислении.*

Всякое доказательство формулы A в S-исчислении по предположению может быть получено из справедливости для S-исчисления свойств 1—7. Так как те же свойства 1—7 справедливы и для T_1-исчисления, то упомянутое доказательство можно полностью повторить для T_1-исчисления.

4°. Из лемм 1 и 2 вытекает

Теорема 1. *Всякое исчисление, обладающее свойствами 1—7, эквивалентно исчислению Гливенко.*

Обратное утверждение — всякое исчисление S, эквивалентное T_1-исчислению, обладает свойствами 1—7 (с соответствующим ограничением правила 3, если исчисление S содержит правило подстановки) — тривиально.

Таким образом, свойства 1—7 выделяют класс эквивалентных между собой исчислений. Эти свойства, которые вполне естественны, и можно принять в качестве характеристики T-исчисления. Однако эти свойства не дают решения проблемы разрешимости. Одному из решений этой проблемы посвящены остальные параграфы статьи.

§ 2. Общее понятие матрицы

1°. Определение 1. Пусть $A_{\mathfrak{M}}$ — произвольное множество и $\beta_{\mathfrak{M}}\overline{\in} A_{\mathfrak{M}}$. Пусть, далее, $\urcorner_{\mathfrak{M}}$ — функция одной переменной, а $\supset_{\mathfrak{M}}$, $\wedge_{\mathfrak{M}}$, $\vee_{\mathfrak{M}}$ — бинарные функции, определенные на множестве $A_{\mathfrak{M}}+\{\beta_{\mathfrak{M}}\}$, значения которых принадлежат этому же множеству. В таком случае говорят, что множество $A_{\mathfrak{M}}+\{\beta_{\mathfrak{M}}\}$ с функциями $\supset_{\mathfrak{M}}, \wedge_{\mathfrak{M}}, \vee_{\mathfrak{M}}, \urcorner_{\mathfrak{M}}$ образует матрицу $\mathfrak{M}=[A_{\mathfrak{M}}, \beta_{\mathfrak{M}}; \supset_{\mathfrak{M}}, \wedge_{\mathfrak{M}}, \vee_{\mathfrak{M}}, \urcorner_{\mathfrak{M}}]$.

Элементы множества $A_{\mathfrak{M}}+\{\beta_{\mathfrak{M}}\}$ называются элементами матрицы $\mathfrak{M}$. Элемент $\beta_{\mathfrak{M}}$ называется выделенным значением матрицы $\mathfrak{M}$[1].

Для сокращения мы будем писать $\xi \in \mathfrak{M}$ вместо $\xi \in A_{\mathfrak{M}}+\{\beta_{\mathfrak{M}}\}$. Иногда мы будем употреблять общий знак $\boxdot_{\mathfrak{M}}$ для обозначения каждой из $\supset_{\mathfrak{M}}, \wedge_{\mathfrak{M}}, \vee_{\mathfrak{M}}$.

Определение 2. Матрица $\mathfrak{M}=[A_{\mathfrak{M}}, \beta_{\mathfrak{M}}; \supset_{\mathfrak{M}}, \wedge_{\mathfrak{M}}, \vee_{\mathfrak{M}}, \urcorner_{\mathfrak{M}}]$ называется нормальной, если выполнены следующие условия:

1а) $\beta_{\mathfrak{M}} \supset_{\mathfrak{M}} \eta=\beta_{\mathfrak{M}}$ тогда и только тогда, когда $\eta=\beta_{\mathfrak{M}}$;

1б) $\eta \supset_{\mathfrak{M}} \beta_{\mathfrak{M}}=\beta_{\mathfrak{M}}$ (при любом η);

2) $\xi \wedge_{\mathfrak{M}} \eta=\beta_{\mathfrak{M}}$ тогда и только тогда, когда $\xi=\eta=\beta_{\mathfrak{M}}$;

3) $\urcorner_{\mathfrak{M}} \beta_{\mathfrak{M}} \neq \beta_{\mathfrak{M}}$;

4) $\xi \vee_{\mathfrak{M}} \eta=\beta_{\mathfrak{M}}$ тогда и только тогда, когда либо $\xi=\beta_{\mathfrak{M}}$, либо $\eta=\beta_{\mathfrak{M}}$.

Матрица $\mathfrak{M}$ называется полунормальной, если выполнены условия 1—3 и 4':

4') $$\xi \vee_{\mathfrak{M}} \beta_{\mathfrak{M}}=\beta_{\mathfrak{M}} \vee_{\mathfrak{M}} \eta=\beta_{\mathfrak{M}},$$

но не исключена возможность, что $\xi \vee_{\mathfrak{M}} \eta=\beta_{\mathfrak{M}}$ при некоторых ξ и η, отличных от $\beta_{\mathfrak{M}}$.

Матрица $\mathfrak{M}$ называется существенно полунормальной, если она полунормальна, но не нормальна, т. е. если существуют $\xi \neq \beta_{\mathfrak{M}}$ и $\eta \neq \beta_{\mathfrak{M}}$, для которых $\xi \vee_{\mathfrak{M}} \eta=\beta_{\mathfrak{M}}$.

2°. Пусть $\mathfrak{M}$-некоторая матрица. Пусть, далее, $A(p, q, r, \ldots)$ — произвольная формула логики предложений. Каждой элементарной формуле $p, q, r, \ldots$, входящей в $A(p, q, r, \ldots)$, поставим в соответствие какой-нибудь элемент матрицы $\mathfrak{M}$: $h(p)=\pi$, $h(q)\varkappa, \ldots$ — оценку этой элементарной формулы в матрице $\mathfrak{M}$. Логическим операциям $\supset, \wedge, \vee, \urcorner$ поставим в соответствие матричные функции $\supset_{\mathfrak{M}}, \wedge_{\mathfrak{M}}, \vee_{\mathfrak{M}}, \urcorner_{\mathfrak{M}}$. Тогда формула $A(p, q, r, \ldots)$ также получит некоторую оценку в матрице $\mathfrak{M}$, $h(A) \in \mathfrak{M}$.

Определение 3. Формула A логики предложений называется тождественной в матрице $\mathfrak{M}$ с выделенным элементом $\beta_{\mathfrak{M}}$, если при любом распределении оценок элементарных формул, входящих в A, $h(A)=\beta_{\mathfrak{M}}$.

Класс формул, тождественных в матрице $\mathfrak{M}$, будем обозначать $E(\mathfrak{M})$.

Пример: Матрица $I_0=[\{л\}, и; \supset_0, \wedge_0, \vee_0, \urcorner_0]$

$\supset_0$	и	л
и	и	л
л	и	и

$\wedge_0$	и	л
и	и	л
л	л	л

$\vee_0$	и	л
и	и	и
л	и	л

	$\urcorner_0$
и	л
л	и

как известно, определяет классическую логику предложений $A \in E(I_0)$ тогда и только тогда, когда A доказуема в классической логике предложений.

[1] Иногда рассматривается более общее понятие матрицы — матрицы с множеством $B_{\mathfrak{M}}$ выделенных значений $(A_{\mathfrak{M}} \cdot B_{\mathfrak{M}}=0)$.

§ 3. Операции над матрицами

1°. *Γ*-операция. Пусть дана матрица $\mathfrak{N} = [A_\mathfrak{N}, \beta_\mathfrak{N}; \supset_\mathfrak{N}, \wedge_\mathfrak{N}, \vee_\mathfrak{N}, \neg_\mathfrak{N}]$ и $\delta \overline{\in} A_\mathfrak{N} + \{\beta_\mathfrak{N}\}$.

Определим функцию $\varphi(\xi)$

$$\varphi(\beta_\mathfrak{N}) = \delta; \quad \varphi(\xi) = \xi \quad \text{при любом } \xi \in A_\mathfrak{N}.$$

Определение 4: Матрицей $\mathfrak{M} = \Gamma(\mathfrak{N})$ называется матрица, у которой $A_\mathfrak{M} = A_\mathfrak{N} + \{\delta\}$; $\beta_\mathfrak{M} = \beta_\mathfrak{N}$, а функции $\supset_\mathfrak{M}$, $\wedge_\mathfrak{M}$, $\vee_\mathfrak{M}$, $\neg_\mathfrak{M}$ определяются следующими таблицами:

$\supset_\mathfrak{M}$	$\beta_\mathfrak{M}$	$\varphi(\eta)$
$\beta_\mathfrak{M}$	$\beta_\mathfrak{N} \supset_\mathfrak{N} \beta_\mathfrak{N}$	$\varphi(\beta_\mathfrak{N} \supset_\mathfrak{N} \eta)$
$\varphi(\xi)$	$\xi \supset_\mathfrak{N} \beta_\mathfrak{N}$	$\xi \supset_\mathfrak{N} \eta$

$\wedge_\mathfrak{M}$	$\beta_\mathfrak{M}$	$\varphi(\eta)$
$\beta_\mathfrak{M}$	$\beta_\mathfrak{M} \wedge_\mathfrak{N} \beta_\mathfrak{N}$	$\varphi(\beta_\mathfrak{N} \wedge_\mathfrak{N} \eta)$
$\varphi(\xi)$	$\varphi(\xi \wedge_\mathfrak{N} \beta_\mathfrak{N})$	$\varphi(\xi \wedge_\mathfrak{N} \eta)$

$\vee_\mathfrak{M}$	$\beta_\mathfrak{M}$	$\varphi(\eta)$
$\beta_\mathfrak{M}$	$\beta_\mathfrak{N} \vee_\mathfrak{N} \beta_\mathfrak{N}$	$\beta_\mathfrak{N} \vee_\mathfrak{N} \eta$
$\varphi(\xi)$	$\xi \vee_\mathfrak{N} \beta_\mathfrak{N}$	$\varphi(\xi \vee_\mathfrak{N} \eta)$

	$\neg_\mathfrak{M}$
$\beta_\mathfrak{M}$	$\varphi(\neg_\mathfrak{N} \beta_\mathfrak{N})$
$\varphi(\xi)$	$\neg_\mathfrak{N} \xi$

Легко проверить, что если $\mathfrak{N}$ — нормальная матрица, то *Γ*-операция только доопределяет матричные функции, т. е. что при $\xi, \eta \in \mathfrak{N}$ имеют место следующие равенства:

$$\xi \supset_{\Gamma(\mathfrak{N})} \eta = \xi \supset_\mathfrak{N} \eta;$$

$$\xi \wedge_{\Gamma(\mathfrak{N})} \eta = \xi \wedge_\mathfrak{N} \eta;$$

$$\wedge_{\Gamma(\mathfrak{N})} \xi = \neg_\mathfrak{N} \xi;$$

$$\xi \vee_{\Gamma(\mathfrak{N})} \eta = \xi \vee_\mathfrak{N} \eta.$$

Если же $\mathfrak{N}$ — полунормальная матрица, то может нарушиться только последнее равенство (если $\xi \vee_\mathfrak{N} \eta = \beta_\mathfrak{N}$ при $\xi \neq \beta_\mathfrak{N}$, $\eta \neq \beta_\mathfrak{N}$).

Из определений 3 и 4 следует также

Лемма 3. *Матрица, которая получается в результате применения Γ-операций к нормальной или полунормальной матрице, нормальна.*

2°. *T*-операция. Определение 5. Прямым произведением матриц $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ называется матрица $\mathfrak{P} = \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} = T(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, у которой:

1. $A_\mathfrak{P} + \{\beta_\mathfrak{P}\}$ — множество упорядоченных пар $\{\mu, \nu\}$, где

$$\mu \in A_\mathfrak{M} + \{\beta_\mathfrak{M}\}, \quad \nu \in A_\mathfrak{N} + \{\beta_\mathfrak{N}\}.$$

2. $\beta_\mathfrak{P} = \{\beta_\mathfrak{M}, \beta_\mathfrak{N}\}$, $\beta_\mathfrak{P} \overline{\in} A_\mathfrak{P}$.

3. Матричные функции определяются равенствами

$$\{\mu_1, \nu_1\} \boxdot_\mathfrak{P} \{\mu_2, \nu_2\} = \{\mu_1 \boxdot_\mathfrak{M} \mu_2, \ \nu_1 \boxdot_\mathfrak{N} \nu_2\};$$

$$\neg_\mathfrak{P} \{\mu_1, \nu_1\} = \{\neg_\mathfrak{M} \mu_1, \ \neg_\mathfrak{N} \nu_1\}.$$

В отличие от *Γ*-операции, *T*-операция нарушает нормальность (но не нарушает полунормальности) матриц. Имеет место

Лемма 4. *Матрица $\mathfrak{P}$, получающаяся в результате применения T-операции к нормальным или полунормальным матрицам $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, существенно полунормальна* (так как $\{\beta_{\mathfrak{M}}, \xi\} \vee_{\mathfrak{P}} \{\eta, \beta_{\mathfrak{N}}\} = \beta_{\mathfrak{P}}$ даже если $\xi \neq \beta_{\mathfrak{N}}$, $\eta \neq \beta_{\mathfrak{M}}$).

Столь же легко усмотреть, что

$$E(\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}) = E(\mathfrak{M}) \cdot E(\mathfrak{N}). \tag{3.1}$$

В самом деле, каждое распределение оценок $h_{\mathfrak{P}}$ в матрице $\mathfrak{P} = \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ порождает пару распределений оценок $h_{\mathfrak{M}}$ и $h_{\mathfrak{N}}$ в матрицах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ соответственно и, наоборот, каждая пара распределений оценок $h_{\mathfrak{M}}$ и $h_{\mathfrak{N}}$ порождает распределение оценок $h_{\mathfrak{P}}$,

$$h_{\mathfrak{P}}(x) = \{h_{\mathfrak{M}}(x), \quad h_{\mathfrak{N}} x)\}. \tag{а}$$

Из определения функций матрицы $\mathfrak{P}$ следует, что при этом для любой формулы A логики предложений имеет место

$$h_{\mathfrak{P}}(A) = \{h_{\mathfrak{M}}(A), \quad h_{\mathfrak{N}}(A)\} \tag{б}$$

(доказательство — по индукции по конструкции формулы A). Поэтому условие $A \in E(\mathfrak{P})$ равносильно (в силу определения $\beta_{\mathfrak{P}}$) тому, что $A \in E(\mathfrak{M})$ и $A \in E(\mathfrak{N})$.

Понятие прямого произведения порождает естественное понятие прямой степени:

$$\mathfrak{M}^2 = \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}; \quad \mathfrak{M}^n = \mathfrak{M}^{n-1} \times \mathfrak{M}.$$

3°. Яськовский дает следующий закон построения матриц, удовлетворяющих условию теоремы Яськовского (см. теорему 7); I_0 — матрица классической логики предложений (см. стр. 12), $I_{k+1} = \Gamma((I_k)^{k+1})$. Матрицы I_k мы будем называть матрицами Яськовского, матрицы $\mathfrak{P} = (I_k)^{k+1}$ — промежуточными матрицами Яськовского. Так как исходная матрица I_0 нормальна, то из лемм 3 и 4 следует

Теорема 2. *Все матрицы Яськовского нормальны, все промежуточные матрицы Яськовского существенно полунормальны.*

4°. Элементами матрицы $\mathfrak{P} = (I_k)^{k+1}$ служат выражения

$$\{\{\ldots\{\{\mu_{i_1}\mu_{i_2}\}\mu_{i_3}\}\ldots\mu_{i_k}\}\mu_{i_{k+1}}\}, \quad \text{где } \mu_{i_1}, \mu_{i_2}, \ldots, \mu_{i_{k+1}} \text{ — элементы } I_k.$$

В дальнейшем мы в этой записи будем опускать внутренние скобки и будем записывать элементы $\mathfrak{P}$ в виде $\{\mu_{i_1}\ldots\mu_{i_{k+1}}\}$. Легко видеть, что

$$\{\ldots\{\{\mu_{i_1}\mu_{i_2}\}\mu_{i_3}\}\ldots\mu_{i_{k+1}}\}\boxdot_{\mathfrak{P}}\{\ldots\{\{\mu_{j_1}\mu_{j_2}\}\mu_{j_3}\}\ldots\mu_{j_{k+1}}\} =$$
$$= \{\ldots\{\mu_{i_1}\boxdot_k\mu_{j_1}, \mu_{i_2}\boxdot_k\mu_{j_2}\}\ldots\mu_{i_{k+1}}\boxdot_k\mu_{j_{k+1}},$$
$$\urcorner_{\mathfrak{P}}\{\ldots\{\{\mu_{i_1}\mu_{i_2}\}\mu_{i_3}\}\ldots\mu_{i_{k+1}}\} = \{\ldots\{\{\urcorner_k\mu_{i_1}, \urcorner_k\mu_{i_2}\}\urcorner_k\mu_{i_3}\}\ldots\urcorner_k\mu_{i_{k+1}}\}$$

(оба равенства доказываются по индукции по показателю степени l матрицы I_k^l. Это дает нам право определять матричные функции матрицы $\mathfrak{P} = (I_k)^{k+1}$ равенствами

$$\{\mu_{i_1}\mu_{i_2}\ldots\mu_{i_{k+1}}\}\boxdot_{\mathfrak{P}}\{\mu_{j_1}\mu_{j}\ldots\mu_{j_{k+1}}\} = \{\mu_{i_1}\boxdot_k\mu_{j_1}, \mu_{i_2}\boxdot_k\mu_{j_2}, \ldots, \mu_{i_{k+1}}\boxdot_k\mu_{j_{k+1}}\}\urcorner$$
$$\urcorner_{\mathfrak{P}}\{\mu_{i_1}\mu_{i_2}\ldots\mu_{i_{k+1}}\} = \{\urcorner_k\mu_{i_1}, \urcorner_k\mu_{i_2}, \ldots\urcorner_k\mu_{i_{k+1}}\}.$$

Выделенным элементом β_{k+1} матрицы I_{k+1} является $\{\beta_k, \ldots, \beta_k\}$.

5°. В дальнейшем нам будет полезна следующая

Лемма 5. Пусть A — произвольная формула логики предложений и пусть в матрице I_{k+1} все элементарные формулы p, входящие в A, получили оценки $h_{k+1}(p)$ вида

$$h_{k+1}(p)=\{h_k(p),\ldots,h_k(p)\},$$

где $h_k(p)$ — некоторая оценка элементарной формулы p в матрице I_k. Тогда соответствующей оценкой формулы A в матрице I_{k+1} будет

$$h_{k+1}(A)=\{h_k(A),\ldots,h_k(A)\}. \tag{а}$$

Доказательство — по индукции по конструкции A. Лемма тривиальна, если A элементарная формула. Пусть $A=A_1\supset A_2$, и лемма доказана для A_1 и A_2, т. е. доказаны равенства

$$h_{k+1}(A_1)=\{h_k(A_1),\ldots,h_k(A_1)\};\quad h_{k+1}(A_2)=\{h_k(A_2),\ldots,h_k(A_2)\}.$$

По определению $h_{k+1}(A)=h_{k+1}(A_1)\supset_{\Gamma(\mathfrak{P})}h_{k+1}(A_2)$. Но $\mathfrak{P}$ — полунормальная матрица и $h_{k+1}(A_1),\ h_{k+1}(A_2)\in\mathfrak{P}$. В таком случае, как было отмечено на стр. 13, $h_{k+1}(A_1)\supset_{\Gamma(\mathfrak{P})}h_{k+1}(A_2)=h_{k+1}(A_1)\supset_{\mathfrak{P}}h_{k+1}(A_2)$, следовательно,

$$h_{k+1}(A)=h_{k+1}(A_1)\supset_{\mathfrak{P}}h_{k+1}(A_2)=\{h_k(A_1)\supset_k h_k(A_2),\ldots,h_k(A_1)\supset_k h_k(A_2)\}=$$
$$=\{h_k(A),\ldots,h_k(A)\}.$$

Точно так же доказывается равенство (а) в случае, когда $A=A_1\wedge A_2$ и $A=\neg A_1$.

Пусть теперь $A=A_1\vee A_2$, и лемма доказана для A_1 и A_2. Тогда $h_{k+1}(A_1),\ h_{k+1}(A_2)\in\mathfrak{P}$, следовательно, $h_{k+1}(A_i)$, $i=1, 2$, есть либо β_{k+1}, либо $\varphi(h_{k+1}(A_i))$. При этом, если $h_{k+1}(A_i)=\varphi(h_{k+1}(A_i))\neq\beta_{k+1}$, то $\{h_k(A_i),\ldots,h_k(A_i)\}=h_{k+1}(A_i)\neq\{\beta_k,\ldots,\beta_k\}$, откуда $h_k(A_i)\neq\beta_k$.

Представляются две возможности

1) $$h_{k+1}(A_i)=\varphi(h_{k+1}(A_i)),\qquad i=1, 2.$$

Тогда

$$h_{k+1}(A)=\varphi(h_{k+1}(A_1)\vee_{\mathfrak{P}}h_{k+1}(A_2))=\varphi(h_{\mathfrak{P}}(A)). \tag{б}$$

Но

$$h_{\mathfrak{P}}(A)=\{h_k(A),\ldots,h_k(A)\}.$$

Так как $h_k(A_i)\neq\beta_k$, $i=1, 2$, то, в силу нормальности I_k, $h_k(A)\neq\beta_k$, $h_{\mathfrak{P}}(A)\neq\beta_{k+1}$, следовательно, $\varphi(h_{\mathfrak{P}}(A))=h_{\mathfrak{P}}(A)$. В силу (б) имеем $h_{k+1}(A)=h_{\mathfrak{P}}(A)=\{h_k(A),\ldots,h_k(A)\}$.

2) Если $h_{k+1}(A_1)=\beta_{k+1}$ или $h_{k+1}(A_2)=\beta_{k+1}$, то

$$h_{k+1}(A)=\beta_{k+1}. \tag{в}$$

С другой стороны, если $h_{k+1}(A_1)=\{h_k(A_1),\ldots,h_k(A_1)\}=\beta_{k+1}$, то $h_k(A_1)=\beta_k$. Аналогично $h_k(A_2)=\beta_k$, если $h_{k+1}(A_2)=\beta_{k+1}$. В обоих случаях (в силу нормальности I_k) $h_k(A)=\beta_k$ и $\{h_k(A),\ldots,h_k(A)\}=\beta_{k+1}$, что вместе с (в) дает равенство (а).

Лемма 5 доказана.

§ 4. Необходимое условие доказуемости в T-исчислении

1°. Необходимое условие доказуемости в T-исчислении формулируется следующим образом:

Для того чтобы A была доказуема в T-исчислении, необходимо, чтобы она была тождественной во всех матрицах I_k.

Для доказательства его потребуется

Лемма 6. *Аксиомы T-исчисления тождественны во всех матрицах I_k.*

Лемма доказывается по индукции по номеру k матрицы I_k.

Все аксиомы T-исчисления тождественны в I_0. Кроме того, если $A \in E(I_k)$, то в силу (3.1) $A \in E(\mathfrak{P})$, где $\mathfrak{P} = (I_k)^{k+1}$. Следовательно, истинность утверждения $h_{k+1}(A) = \beta_{k+1}$ (a) можно проверить, вычисляя $h_{k+1}(A)$ в предположении, что $h_{\mathfrak{P}}(A) = \beta_{\mathfrak{P}} = \beta_{k+1}$. При вычислении $h_{k+1}(A)$ используются полунормальность $\mathfrak{P}$ и то обстоятельство, что при $\eta \in \mathfrak{P}$ $\varphi(\xi) \supset_{k+1} \eta = \xi \supset_{\mathfrak{P}} \eta$ (так как в таком случае либо $\eta = \beta_{k+1}$ и $\varphi(\xi) \supset_{k+1} \eta = \varphi(\xi) \supset_{k+1} \beta_{k+1} = \xi \supset_{\mathfrak{P}} \beta_{k+1}$, либо $\eta = \varphi(\eta)$ и $\varphi(\xi) \supset_{k+1} \varphi(\eta) = \xi \supset_{\mathfrak{P}} \eta$).

Для каждой элементарной формулы p, входящей в A, удобно различать две оценки $h_{k+1}(p) = \beta_{k+1}$ и $h_{k+1}(p) = \varphi(\xi)$. Докажем, например, тождество (a) для аксиомы (B), $A = (p \supset (p \supset r)) \supset (p \supset r)$.

1) Если $h_{k+1}(p) = \varphi(\xi)$, $h_{k+1}(r) = \varphi(h)$, где $\xi, \eta \in \mathfrak{P}$, то $h_{k+1}(A) = \varphi(\xi) \supset_{k+1} (\xi \supset_{\mathfrak{P}} \eta)) \supset_{k+1} (\xi \supset_{\mathfrak{P}} \eta)$.

Обозначим $\xi \supset_{\mathfrak{P}} \eta = \mu_1$; $\mu_1 \in \mathfrak{P}$, следовательно, как уже отмечалось, $\varphi(\xi) \supset_{k+1} \mu_1 = \xi \supset_{\mathfrak{P}} \mu_1 = \mu_2$ и $h_{k+1}(A) = \mu_2 \supset_{k+1} \mu_1$. Так как $\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{P}$ и $\mathfrak{P}$ полунормальна, то $\mu_2 \supset_{k+1} \mu_1 = \mu_2 \supset_{\mathfrak{P}} \mu_1$ и $h_{k+1}(A) = (\xi \supset_{\mathfrak{P}} (\xi \supset_{\mathfrak{P}} \eta)) \supset_{\mathfrak{P}} (\xi \supset_{\mathfrak{P}} \eta)$. Положим $\xi = h_{\mathfrak{P}}(p)$, $\eta = h_{\mathfrak{P}}(r)$. Тогда $h_{k+1}(A) = h_{\mathfrak{P}}(A) = \beta_{\mathfrak{P}} = \beta_{k+1}$.

2) Если $h_{k+1}(p) = \beta_{k+1} = \beta_{\mathfrak{P}}$, $h_{k+1}(r) = \varphi(\xi)$, то (согласно таблицам определения 4) $h_{k+1}(A) = (\beta_{\mathfrak{P}} \supset_{\mathfrak{P}} (\beta_{\mathfrak{P}} \supset_{\mathfrak{P}} \xi) \supset_{\mathfrak{P}} (\beta_{\mathfrak{P}} \supset_{\mathfrak{P}} \xi) = h_{\mathfrak{P}}(A) = \beta_{k+1}$.

3) Если $h_{k+1}(r) = \beta_{k+1}$, то (в силу нормальности I_{k+1}) $h_{k+1}(A) = \beta_{k+1}$ при любом значении $h_{k+1}(p)$.

Рассмотренными случаями исчерпываются все возможные распределения оценок элементарных формул, входящих в A. Следовательно, действительно $h_{k+1}(A) \equiv \beta_{k+1}$. Итак, если A тождественна в I_k, то она тождественна и в I_{k+1}. Лемма 6 для аксиомы (B) доказана. Аналогично доказывается лемма 6 для остальных аксиом T-исчисления.

2°. Теорема 3. *Если формула A доказуема в T-исчислении, то A тождественна во всех I_k.*

В силу леммы 6 достаточно показать, что правила вывода T-исчисления не выводят из класса формул, тождественных в I_k, т. е.

1. Если $A(p) \in E(I_k)$, то и $A(B) \in E(I_k)$[1].
2. Если $A \in E(I_k)$ и $A \supset B \in E(I_k)$, то и $B \in E(I_k)$.

Первое утверждение тривиально. Второе — является следствием нормальности I_k.

---

[1] $A(B)$ — результат применения правила подстановки к формуле $A(p)$.

§ 5. Регулярные формулы

1°. **Определение 6.** Формула логики предложений называется *регулярной*, если она имеет вид (порядок посылок не играет роли)

$$\left(\prod_{i=1}^{k}(B_i \supset p_i) \wedge \prod_{i=1}^{l} t_i \wedge \prod_{i=1}^{m} \neg\, q_i \wedge \prod_{i=1}^{n}(r_i \supset D_i)\right) \supset s, \quad k+l+m+n \neq 0, \tag{5.1}$$

где B_i есть либо $\neg x_i$, либо $x_i \supset y_i$; D_i есть либо x_i, либо $\neg x_i$, либо $x_i \vee y_i$, либо $x_i \supset y_i$ [1].

Формулы, которые могут служить посылками в регулярных формулах, называются *R-посылками*.

Регулярная формула (5.1) называется *нормальной*, если ее посылки — буквы t_i не встречаются ни в одной из посылок-импликаций $B_j \supset p_j$ и $r_j \supset D_j$.

Примеры: Формулы $\neg p \wedge (q \supset p) \supset r$, $\neg p \wedge (\neg p \supset q) \supset q$, $p \wedge q \supset p$ — нормальные регулярные; формулы $p \wedge (p \supset q) \supset q$, $p \wedge ((q \supset p) \supset r) \supset q$ — регулярны, но не нормальны; формулы $p \supset p \vee q$, $p \wedge (p \vee q \supset r) \supset r$, $p \wedge (r \supset q \wedge r) \supset q$ не являются регулярными.

Там, где это не будет вызывать недоразумений, мы для сокращения записи, будем опускать индекс, по которому берется конъюнкция, и формулу (5.1) будем записывать в виде $\prod^{k}(B \supset p) \wedge \prod^{l} t \wedge \prod^{m} \neg q \wedge \prod^{n}(r \supset D) \supset s$ или в виде $\Pi(B \supset p) \wedge \Pi t \wedge \Pi > q \wedge \Pi(r \supset D) \supset s$, если число посылок каждого вида не существенно.

Определение 7. К классу C_k принадлежат все регулярные формулы (5.1), содержащие k посылок вида $B_i \supset p_i$.

Примеры: $\neg p \supset q \in C_0$; $(p \supset q) \supset p \in C_0$; $(p \supset q) \wedge (\neg p \supset q) \supset q \in C_1)$;
$(p \supset q) \wedge ((t \supset t) \supset p) \supset q \in C_1$; $(\neg p \supset q) \wedge \neg q \wedge ((p \supset q) \supset r) \wedge (p \supset (q \supset s)) \supset s \in C_2$;
$(r \supset \neg p) \wedge (\neg p \supset r) \wedge (\neg r \supset q) \wedge (r \supset q) \supset q \in C_2$.

2°. **Определение 8.** Формулы A и B называются *дедуктивно равными* относительно T-исчисления, если для T-исчисления доказуемы правила $\dfrac{A}{B}$ и $\dfrac{B}{A}$.

Определение 9. Формулы A и B называются *эквивалентными* (A экв. B) относительно T-исчисления, если в этом исчислении доказуема формула $(A \supset B) \wedge (B \supset A)_{Df} = (A \sim B)$.

Отметим несколько свойств дедуктивно равных и эквивалентных формул, которые нам будут полезны в дальнейшем:

1) Отношения дедуктивного равенства и эквивалентности транзитивны, симметричны и рефлексивны.

2) Если A экв. B, то A дедуктивно равна B. Обратное утверждение не всегда имеет место.

3) Все формулы, доказуемые в T-исчислении, дедуктивно равны между собой. Наоборот, если A дедуктивно равна B и $A \in T$, то и $B \in T$.

4) Если A дедуктивно равна B и $A \in E(\mathfrak{M})$, где $\mathfrak{M}$ — нормальная или полунормальная матрица, такая что $T \subset E(\mathfrak{M})$, то $B \in E(\mathfrak{M})$.

---

[1] Малыми латинскими буквами, как всегда, обозначены элементарные формулы T-исчисления; $\prod_{i=1}^{n} F_i$ является сокращением формулы $F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n$.

5) Если A_i дедуктивно равна B_i, $i=1, 2, \ldots, n$, то $\prod_{i=1}^{n} A_i$ дедуктивно равна $\prod_{i=1}^{n} B_i$.

3°. Теорема 4. *Регулярную формулу*

$$\Pi t \wedge \mathfrak{Z} \supset s\text{[1]} \tag{1}$$

класса C_k при помощи эквивалентных преобразований можно привести к виду

$$\left(\Pi t_1 \wedge \mathfrak{Z}_1 \supset s\right) \wedge \ldots \wedge \left(\Pi t_n \wedge \mathfrak{Z}_n \supset s\right)\text{[2]}, \tag{2}$$

где все $\Pi t_i \wedge \mathfrak{Z}_i \supset s$ — нормальные регулярные формулы не выше k-ого класса. Преобразование это таково, что

$$\Pi t \wedge \mathfrak{Z} \text{ экв. } \left(\Pi t_1 \wedge \mathfrak{Z}_1\right) \vee \ldots \vee \left(\Pi t_n \wedge \mathfrak{Z}_n\right).$$

Импликации, содержащие элементарные формулы t, могут иметь вид
1) $(t \supset x) \supset y$; 2) $(x \supset t) \supset y$; 3) $B \supset t$ или $r \supset t$; 4) $\neg t \supset x$; 5) $x \supset \neg t$; 6) $x \supset (t \supset y)$; 7) $x \supset (y \supset t)$; 8) $x \supset t \vee y$ или $x \supset y \vee t$; 9) $t \supset D$, где t не встречается в D.

Используя формулы:

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
t \wedge ((t \supset x) \supset y) & \sim & t \wedge (x \supset y); & t \wedge (x \supset (t \supset y)) & \sim & t \wedge (x \supset y);\\
t \wedge ((x \supset t) \supset y) & \sim & t \wedge y; & t \wedge (x \supset (y \supset t)) & \sim & t;\\
t \wedge (x \supset t) & \sim & t; & t \wedge (x \supset t \vee y) & \sim & t;\\
t \wedge (\neg t \supset x); & \sim & t; & t \wedge (t \supset D) & \sim & t \wedge D,\\
t \wedge (x \supset \neg t) & \sim & t \wedge \neg x; & & &
\end{array}$$

мы можем зачеркнуть посылки вида 3), 4), 7) и 8), а посылки 1), 2), 5), 6), 9) заменить соответственно посылками 1′) $x \supset y$; 2′) y; 5′) $\neg x$; 6′) $x \supset y$; 9′) D. Аналогично можно уничтожить вхождения t в посылки 1′) и 6′) (если таковые имеются).

В результате такого преобразования мы получим формулу

$$t \wedge \prod_{t \neq t'} t' \wedge \prod^{k'} (B' \supset p') \wedge \Pi \neg q' \wedge \Pi (r' \supset D') \wedge \prod_i D_i'' \supset s, \tag{3}$$

где $D_i'' = x_i \vee y_i$, t не встречается в посылках — импликациях формулы (3) и $k' \leqslant k$.

Формула (3) эквивалентна (1), причем $\Pi t \wedge \mathfrak{Z}$ экв. F, где через F обозначена конъюнкция всех посылок формулы (3).

Если (3) содержит m посылок D_i'', то в силу

$$F' \wedge (x_i \vee y_i) \sim ((F' \wedge x_i) \vee (F' \wedge y_i))$$

и

$$((F' \wedge x_i) \vee (F' \wedge y_i) \supset s) \sim ((F' \wedge x_i \supset s) \wedge (F' \wedge y_i \supset s)),$$

[1] $\mathfrak{Z}$ — конъюнкция всех R-посылок формулы (1), кроме посылок-букв.

[2] Строго говоря, формулу (2) следовало бы записать в виде

$$\left(\prod_i t_{1i} \wedge \mathfrak{Z}_1 \supset s\right) \wedge \cdots \wedge \left(\prod_i t_{ni} \wedge \mathfrak{Z}_n \supset s\right);$$

мы, однако, для простоты опускаем индекс i, по которому берется конъюнкция.

(3) эквивалентна формуле

$$\Big(t \wedge \prod_{t_1''\neq t} t_1'' \wedge \prod^{k'}(B'\supset p') \wedge \prod \neg q' \wedge \prod (r' \supset D') \supset s\Big) \wedge$$

$$\wedge \ldots \wedge \Big(t \wedge \prod_{t_l''\neq t} t_l'' \wedge \prod^{k'}(B'\supset p') \wedge \prod \neg q' \wedge \prod (r' \supset D') \supset s\Big), \tag{4}$$

где $l = 2^m$, каждый из конъюнктивных членов

$$F_i \supset s = t \wedge \prod_{t_i''\neq t} t_i'' \wedge \prod^{k'}(B'\supset p') \wedge \prod \neg q' \wedge \prod (r' \supset D') \supset s,$$

$$i = 1, 2, \ldots, l = 2^m$$

формулы (4) есть регулярная формула класса $k' \leqslant k$ и t не встречается в посылках-импликациях формулы $F_i \supset s$. При этом $F_1 \vee \ldots \vee F_l$ экв. F экв. $(\Pi t \wedge \mathfrak{Z})$. Если $F_i \supset s$ содержит больше посылок-букв, чем (1), то она содержит меньше посылок-импликаций. Следовательно, повторяя описанный процесс достаточное число раз, мы сможем исключить все посылки-буквы из посылок-импликаций и придем к формуле вида (2).

4°. Теорема 5[1]. *Для каждой формулы логики предложений A можно построить дедуктивно равную ей (нормальную) регулярную формулу A^*.*

Доказательство теоремы 5 основывается на следующей лемме:

Лемма 7. *Пусть A — часть формулы F, $F = F(A)$ и p — элементарная формула, не встречающаяся в формуле $F(A)$. Пусть, далее, $F(p)$ — формула, получающаяся из $F(A)$ в результате замены A (в одном или нескольких местах) элементарной формулой p. Тогда $F(A)$ дедуктивно равна формуле $(A \supset p) \wedge (p \supset A) \supset F(p)$.*

Доказательство леммы. Легко проверить, что в T-исключении правило замены эквивалентным $\dfrac{A \sim p}{F(A) \sim F(p)}$, а вместе с ним и правило

$$\frac{(A \supset p) \wedge (p \supset A)}{F(A) \supset F(p)} \tag{а}$$

доказывается без употребления правила подстановки. Следовательно, к правилу (а) применима теорема дедукции: в T-исчислении доказуема формула $(A \supset p) \wedge (p \supset A) \supset (F(A) \supset F(p))$.

В таком случае доказуемо и правило

$$\frac{F(A)}{(A \supset p) \wedge (p \supset A) \supset F(p)}. \tag{б}$$

Для доказательства обратного правила

$$\frac{(A \supset p) \wedge (p \supset A) \supset F(p)}{F(A)} \tag{в}$$

подставим в $(A \supset p) \wedge (p \supset A) \supset F(p)$ формулу A вместо p. Так как p ранее не входила в $F(A)$, то в результате подстановки мы получим $(A \supset A) \wedge (A \supset A) \supset F(A)$.

---

[1] Аналогичное утверждение доказывается Вайсбергом [11].

Зачеркивая в последней формуле (доказуемую в T-исчислении) посылку $(A \supset A) \wedge (A \supset A)$, мы приходим к формуле $F(A)$.

Правила (б) и (в) доказывают лемму 7.

5°. Доказательство теоремы 5. Для каждой формулы A можно построить дедуктивно равную формулу A' вида

$$\prod (B_i \supset q_i) \wedge \prod (q_i \supset B_i) \supset p, \tag{1}$$

где каждая B_i содержит не более одного знака логической операции. В самом деле, по лемме 7 A дедуктивно равна A_1

$$A_1 = (A \supset p) \wedge (p \supset A) \supset p.$$

Если A содержит не более одного знака логической операции, то A_1 есть формула вида (1).

Пусть A содержит $n > 1$ знаков логических операций. Тогда либо $A = \neg F_1$, либо $A = F_1 \boxdot F_2$, где F_1 и F_2 — формулы, содержащие меньше знаков логических операций. В первом случае A_1 дедуктивно равна A_2

$$A_2 = (F_1 \supset q_1) \wedge (q_1 \supset F_1) \wedge (\neg q_1 \supset p) \wedge (p \supset \neg q_1) \supset p,$$

а во втором A_1 дедуктивно равна A_3

$$A_3 = (F_1 \supset q_1) \wedge (q_1 \supset F_1) \wedge (F_2 \supset q_2) \wedge q_2 \supset F_2 \wedge (q_1 \boxdot q_2 \supset p) \wedge (p \supset q_1 \boxdot q_2) \supset p,$$

где q_1 и q_2 — элементарные формулы, не встречающиеся в A. Повторяя описанный процесс $n-1$ раз, мы придем к формуле A' вида (1).

В силу транзитивности понятия дедуктивного равенства A дедуктивно равна A'. Формула A' может оказаться нерегулярной только в том случае, если некоторые из B_i содержат знак $\wedge$ или $\vee$, т. е. если $B_i = x_i \vee y_i$ или $B_i = x_i \wedge y_i$. Но посылки вида $x_i \wedge y_i \supset q_i$, $q_i \supset x_i \vee y_i$ и $x_i \vee y_i \supset q_i$, не являющиеся R-посылками, можно заменить эквивалентными им посылками $x_i \supset (y_i \supset q_i)$, $(q_i \supset x_i) \wedge (q_i \supset y_i)$, $(x_i \supset q_i) \wedge (y_i \supset q_i)$ соответственно.

Полученная в результате такого преобразования формула A^*-нормальная регулярная формула, A^* экв. A', следовательно, A^* дедуктивно равна A.

§ 6. Достаточное условие доказуемости в T-исчислении

1°. Основным результатом настоящего параграфа является

Теорема 6 (достаточное условие доказуемости в T-исчислении). *Если A тождественна во всех матрицах I_n, то она доказуема в T-исчислении.*

Мы видели, что для каждой формулы A существует дедуктивно равная ей нормальная регулярная формула A^* (теорема 5), причем A и A^* либо обе тождественны, либо обе не тождественны в I_n; либо обе доказуемы, либо обе недоказуемы в T-исчислении (см. стр. 19). Поэтому теорему 6 достаточно доказать для нормальных регулярных формул. Для формул же этого вида теорема 6 является следствием более сильной теоремы 6′.

Теорема 6′. *Если регулярная формула A класса C_k*

$$A = \prod^{l} F_i \supset s = \prod t \wedge \prod^{k} (B \supset p) \wedge \prod \neg q \wedge \prod (r \supset D) \supset s$$

недоказуема в T-исчислении, то в I_k существует распределение оценок h_k такое, что $h_k(F_i)=\beta_k$ (при любом $i=1, 2, \ldots, l$), но $h_k(s)\neq\beta_k$.

Доказательство — по индукции по k. Без ограничения общности можем считать, что все t отличны от всех q и от s (так как в противном случае A доказуема в T-исчислении).

Теорема тривиальна для нормальных регулярных формул класса C_0, так как в этом случае требованиям теоремы удовлетворяет следующее распределение оценок: $h_0(t)=u$, $h_0(q)=л$, $h_0(r)=л$, $h_0(s)=л$ (при любых значениях $h_0(D)$).

Пусть теорема 6′ доказана для нормальных регулярных формул, класс которых не выше k. Тогда она справедлива для всех формул класса C_k. В самом деле, пусть A — произвольная регулярная формула класса C_k. По теореме 4 A можно привести к конъюнкции нормальных регулярных формул

$$\left(\prod t_1\wedge\mathfrak{Z}_1\supset s\right)\wedge\cdots\wedge\left(\prod t_n\wedge\mathfrak{Z}_n\supset s\right)^{1} \qquad (1)$$

Если A, а следовательно и (1), недоказуема в T-исчислении, то, очевидно, существует $j_0\leqslant n$, такое, что формула $\prod t_{j_0}\wedge\mathfrak{Z}_{j_0}\supset s$ недоказуема в T-исчислении. Но $\prod t_{j_0}\wedge\mathfrak{Z}_{j_0}\supset s$ — нормальная регулярная формула, класс которой не выше k, для нее, по предположению, теорема 6′ доказана: существует распределение оценок h_k такое, что $h_k(\prod t_{j_0}\wedge\mathfrak{Z}_{j_0})=\beta_k$, но $h_k(s)\neq\beta_k$[2].

В силу нормальности I_k

$$h_k\left(\left(\prod t_1\wedge\mathfrak{Z}_1\right)\vee\ldots\vee\left(\prod t_{j_0}\wedge\mathfrak{Z}_{j_0}\right)\vee\ldots\vee\left(\prod t_n\wedge\mathfrak{Z}_n\right)\right)=\beta_k.$$

Но

$$\left(\left(\prod t_1\wedge\mathfrak{Z}_1\right)\vee\ldots\vee\left(\prod t_{j_0}\wedge\mathfrak{Z}_{j_0}\right)\vee\ldots\vee\left(\prod t_n\wedge\mathfrak{Z}_n\right)\right)\ \text{экв.}\ \prod F_i,$$

следовательно, $h_k(\prod F_i)=\beta_k$ и h_k удовлетворяет условиям теоремы.

Итак, из справедливости теоремы 6′ для нормальных регулярных формул, класс которых не выше k, следует справедливость ее для всех регулярных формул класса C_k. В частности, теорема справедлива для всех формул класса C_0.

Пусть теорема доказана для всех регулярных формул, класс которых не выше k. Прежде чем доказывать ее для формул класса C_{k+1}, нам придется, пользуясь этим индуктивным предположением, доказать одну лемму.

2°. С каждой регулярной формулой A класса C_{k+1}

$$A=\prod^{l}F_i\supset s=\prod t\wedge\prod^{k+1}(B\supset p)\wedge\prod\neg q\wedge\prod(r\supset D)\supset s$$

свяжем $k+1$ формул A_j:

$$A_j=\prod^{k+1}(B\supset p)\wedge\prod t\wedge\prod\neg q\wedge\prod(r\supset D)\supset$$

$$\supset B_j\ \text{экв.}\ (B_j\supset p_j)\wedge\prod_{F_i\neq B_j\supset p_j}F_i\supset B_j. \qquad (6.1)$$

---

[1] См. сноску 2 на стр. 186.

[2] По индуктивному предположению, распределение оценок, обладающее указанными свойствами, существует в матрице $I_{k_{j_0}}$, $k_{j_0}\leqslant k$. Если $k_{j_0}<k$, то при помощи $h_{k_{j_0}}$ можно построить (см. стр. 190) h_k, удовлетворяющее тем же требованиям.

Лемма 8. *Если A_j недоказуема в T-исчислении, то в I_k существует такое распределение оценок h_k, что* $h_k(F_i)=\beta_k$ при любом $i=1, 2, \ldots, l$, *но* $h_k(B_j)\neq\beta_k$.

При доказательстве леммы приходится различать два случая: $B_j=\neg x$ и $B_j=x\supset y$.

а) Пусть $B_j=\neg x$. Но если формула вида $\prod F_i\supset\neg x$ доказуема в классической логике предложений, то она доказуема и в T-исчислении [так как в таком случае, по теореме Гливенко [1] $\neg\neg(\Pi F_i\supset\neg x)$ доказуема в T-исчислении и так как в этом исчислении доказуемы формулы $\neg\neg p\supset(\neg\neg(p\supset q)\supset\neg\neg q)$ и $\neg\neg\neg p\supset\neg p$). Если, наоборот, как это предполагается леммой, A_j недоказуема в T-исчислении, то она недоказуема и в классической логике предложений.

В таком случае в I_0 существует распределение оценок h_0 такое, что $h_0(\Pi F_i\supset\neg x)\neq\beta_0=u$, т. е., такое, что $h_0(F_i)=u$ при любом $i=1,\ldots,l$, но $h_0(\neg x)=h_0(B_j)\neq u$. Определим следующие распределения оценок:

$$h_1(y)=h_0(y)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$h_k(y)=\{h_{k-1}(y),\ldots,h_{k-1}(y)\}.$$

Тогда по лемме 5

$$h_1(F_i)=h_0(F_i)=\beta_1,\quad i=1, 2,\ldots,l;\quad h_1(B_j)=h_0(B_j)\neq\beta_1;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$h_k(F_i)=\{h_{k-1}(F_i),\ldots,h_{k-1}(F_i)\}=\{\beta_{k-1},\ldots,\beta_{k-1}\}=\beta_k,\quad i=1, 2,\ldots,l,$$

$$h_k(B_j)=\{h_{k-1}(B_j),\ldots,h_{k-1}(B_j)\}\neq\beta_k.$$

Распределение оценок h_k удовлетворяет требованиям леммы.

б) Пусть теперь $B_j=x\supset y$. Тогда

$$A_j \text{ экв. } x\wedge(y\supset p_j)\wedge\prod_{F_i\neq B\supset p_j}F_i\supset y, \tag{1}$$

причем

$$x\wedge(y\supset p_j)\wedge\prod_{F_i\neq B\supset p_j}F_i \text{ экв. } x\wedge\prod_{i=1}^{l}F_i \tag{2}$$

(см. теорему 4).

Формула (1) регулярна, недоказуема в T-исчислении (так как по предположению A_j недоказуема в T-исчислении) и принадлежит классу C_k. По индуктивному предположению существует h_k такое, что

$$h_k(x)=h_k(F_i)=\beta_k\qquad(i=1, 2,\ldots,l) \text{ и } h_k(x\supset y)=h_k(B_j)\neq\beta_k.$$

Распределение оценок h_k удовлетворяет требованиям леммы.

3°. Доказательство теоремы 6′ для регулярных формул класса C_{k+1}. Как отмечалось, из справедливости теоремы 6′ для нормальных регулярных формул класса C_{k+1} следует справедливость ее для всех формул этого класса. Поэтому теорему достаточно доказать для нормальных формул класса C_{k+1}. Пусть

а) $$A=\prod_{i=1}^{l}F_i\supset s=\prod_{i=1}^{k+1}(B_i\supset p_i)\wedge\prod t\wedge\prod\neg q\wedge\prod(r\supset D)\supset s$$

нормальная формула класса C_{k+1}, недоказуемая в T-исчислении;

б) теорема 6′ справедлива для всех регулярных формул, класс которых ниже $\kappa+1$.

Требуется доказать, что в I_{k+1} существует h_{k+1} такое, что $h_{k+1}(F_i)=\beta_{k+1}$ $(i=1,\ldots,l)$, но $h_{k+1}(s)\neq\beta_{k+1}$. Рассмотрим формулы A_j, $j=1,\ldots,k+1$ (см. (6.1)). Среди этих формул существует хотя бы одна формула, доказуемая в T-исчислении, либо все они недоказуемы в этом исчислении [1].

Рассмотрим обе возможности:

Если $A_j=(B_j\supset p_j)\wedge F\supset B_j$ (где F — конъюнкция всех посылок формулы A, кроме $B_j\supset p_j$) доказуема в T-исчислении то, как нетрудно видеть, $(B_j\supset p_j)\wedge F$ экв. $p_j\wedge F$ и A экв. $p_j\wedge F\supset s$. Формула $p_j\wedge F\supset s$ — недоказуемая регулярная формула класса C_k. По индуктивному предположению в I_k существует распределение оценок h_k такое, что $h_k(p_j\wedge F)=\beta_k$, $h_k(s)\neq\beta_k$. Но $p_j\wedge F$ экв. $(B_j\supset p_j)\wedge F$ экв. ΠF_i, следовательно, $h_k(\Pi F_i)=h_k(F)=\beta_k$ (в силу нормальности I_k), откуда $h_k(F_i)=\beta_k$ при любом i l. Таким образом, в I_k существует распределение оценок h_k, удовлетворяющее условиям теоремы. Чтобы получить требуемое распределение оценок в матрице I_{k+1}, достаточно положить $h_{k+1}(x)=\{h_k(x),\ldots,h_k(x)\}$ (так как при этом по лемме 5

$$h_{k+1}(F_i)=\{h_k(F_i),\ldots,h_k(F_i)\}=\{\beta_k,\ldots,\beta_k\}=\beta_{k+1}$$

и

$$h_{k+1}(s)=\{h_k(s),\ldots,h_k(s)\neq\beta_{k+1}).$$

Для первого случая теорема доказана.

Пусть теперь все A_j недоказуемы в T-исчислении. Тогда по лемме 8 для каждой формулы A_j существует распределение оценок $h_k^{(j)}$ в I_k такое, что при любом $i=1,\ldots,l$ $h_k^{(j)}(F_i)=\beta_k$, но $h_k^{(j)}(B_i)\neq\beta_k$. Определим при помощи $h_k^{(j)}$ распределения оценок

$$h^*(x)=\{h_k'(x),\ldots,h_k^{(k+1)}(x)\};\quad h^*(x)\in\mathfrak{P}=(I_k)^{k+1};$$

$$\begin{cases} h_{k+1}(t)=h^*(t)=\{h_k'(t),\ldots,h_k^{(k+1)}(t)\}=\{\beta_k,\ldots,\beta_k\}=\beta_{k+1} \\ h_{k+1}(x)=\varphi(h^*(x)) \quad \text{при} \quad x\neq t;\quad h_{k+1}(x)\in I_{k+1}=\Gamma(\mathfrak{P}), \end{cases}$$

h_{k+1} удовлетворяет требованиям теоремы

$$h_{k+1}(F_i)=\beta_{k+1}\quad (i=1,2,\ldots,l) \text{ и } h_{k+1}(s)\neq\beta_{k+1}.$$

Действительно, второе соотношение следует непосредственно из определения h_{k+1} (так как $s\neq t$) и φ. Остается доказать первое равенство. Нетрудно видеть, что для любой формулы F

$$h^*(F)=\{h_k'(F),\ldots,h_k^{(k+1)}(F)\},$$

в частности,

$$h^*(F_i)=\{h_k'(F_i),\ldots,h_k^{(k+1)}(F_i)\}=\{\beta_k,\ldots,\beta_k\}=\beta_{k+1}.$$

Поэтому для доказательства равенства $h_{k+1}(F_i)=\beta_{k+1}$ достаточно, пользуясь определением Γ-операции, показать, что

$$h_{k+1}(F_i)=h^*(F_i),\qquad i=1,2,\ldots,l. \tag{a}$$

[1] Здесь закон исключенного третьего применяется к вопросу доказуемости только для удобства изложения. Такое применение этого закона можно заменить применением его к вопросу о тождественности в матрице I_k.

Все формулы F_i являются R-посылками, значит каждая из них может иметь только один из следующих видов: 1) t; 2) $\neg x \supset y$; 3) $(x \supset y) \supset z$; 4) $\neg x$; 5) $x \supset y$; 6) $x \supset \neg y$; 7) $x \supset (y \supset z)$; 8) $x \supset y \vee z$. Для посылок первого вида утверждение тривиально, в остальных же посылках элементарные формулы t не встречаются (в силу нормальности и недоказуемости A), следовательно, для любой элементарной формулы x, входящей в посылки 2) — 8), $h_{k+1}(x) = \varphi(h^*(x))$. Рассмотрим все эти посылки.

1) $F_i = \neg x \supset y$; $\neg x = B_j$;

$$h_{k+1}(F_i) = \neg_{k+1} \varphi(h^*(x)) \supset_{k+1} \varphi(h^*(y)) = \neg_{\mathfrak{P}} h^*(x) \supset_{k+1} \varphi(h^*(y)) =$$
$$= h^*(B_j) \supset_{k+1} \varphi(h^*(y)).$$

Но

$$h^*(B_j) = \{h_k'(B_j), \ldots, h_k^{(j)}(B_j), \ldots, h_k^{(k+1)}(B_j)\},$$

где

$$h_k^{(j)}(B_j) \neq \beta_k,$$

следовательно,

$$h^*(B_j) \neq \beta_{k+1}.$$

Тогда

$$h^*(B_j) = \varphi(h^*(B_j))$$

и

$$h_{k+1}(F_i) = h^*(B_j) \supset_{\mathfrak{P}} h^*(y) = h^*(F_i).$$

2) $F_i = ((x \supset y) \supset z)$; $x \supset y = B_j$.

$$h_{k+1}(F_i) = h^*(x \supset y) \supset_{k+1} \varphi(h^*(z)).$$

Как и в предыдущем случае,

$$h^*(x \supset y) = h^*(B_j) \neq \beta_{k+1},$$

следовательно,

$$h^*(x \supset y) = \varphi(h^*(x \supset y))$$

и

$$h_{k+1}(F_i) = \varphi(h^*(x \supset y)) \supset_{k+1} \varphi(h^*(z)) = h^*(F_i).$$

3) $F_i = \neg x$.

$$h_{k+1}(F_i) = \neg_{k+1} \varphi(h^*(x)) = \neg_{\mathfrak{P}} h^*(x) = h^*(F_i).$$

4) $F_i = x \supset y$.

$$h_{k+1}(F_i) = h^*(x) \supset_{\mathfrak{P}} h^*(y) = h^*(F_i).$$

5) $F_i = x \supset \neg y$.

$$h_{k+1}(F_i) = \varphi(h^*(x)) \supset_{k+1} h^*(\neg y).$$

Так как $h^*(\neg y) \in \mathfrak{P}$, то (как отмечалось на стр. 184)

$$h_{k+1}(F_i) = h^*(x) \supset_{\mathfrak{P}} h^*(\neg y) = h^*(F_i).$$

6) $F_i = x \supset (y \supset z)$.

$$h_{k+1}(F_i) = \varphi(h^*(x)) \supset_{k+1} (h^*(y) \supset_{\mathfrak{P}} h^*(z)) = \varphi(h^*(x)) \supset_{k+1} h^*(y \supset z).$$

Как и в предыдущем случае,

$$\varphi(h^*(x)) \supset_{k+1} h^*(y \supset z) = h^*(x) \supset_{\mathfrak{P}} h^*(y \supset z)$$

и

$$h_{k+1}(F_i) = h^*(F_i).$$

7) $F_i = x \supset y \vee z$.

$$h_{k+1}(F_i) = \varphi(h^*(x)) \supset_{k+1} \varphi(h^*(y) \vee_{\mathfrak{P}} h^*(z) =$$
$$= h^*(x) \supset_{\mathfrak{P}} h^*(y) \vee_{\mathfrak{P}} h^*(z) = h^*(F_i).$$

Теорема 6′ доказана полностью.

4°. Теорема 6′ вместе с теоремами 3 и 5 дает основную теорему настоящей главы:

Теорема 7 (матричный критерий доказуемости в T-исчислении). *Формула логики предложений доказуема в T-исчислении тогда и только тогда, когда она тождественна во всех матрицах I_n.*

Как мы уже отмечали, матричный критерий доказуемости в T-исчислении фактически имеет только теоретическое значение: хотя для каждой формулы A мы можем указать вполне определенную матрицу I_k такую, что для решения вопроса о доказуемости формулы A „достаточно" исследовать тождественность ее в I_k, но число элементов I_k так быстро растет, что во многих случаях осуществление этого исследования оказывается практически невозможным.

В следующем параграфе формулируется значительно упрощенный алгоритм для решения проблемы разрешимости. Этот алгоритм не привлекает матриц I_n в явном виде, хотя при обосновании его эти матрицы, так же как и все остальные методы § 2—6, играют существенную роль.

§ 7. Решение проблемы разрешимости для исчисления задач

Так как для каждой формулы можно (эффективно!) построить дедуктивно равную ей регулярную формулу, то проблему разрешимости достаточно решить для регулярных формул.

Пусть A — произвольная регулярная формула класса C_k. Приведем ее к конъюнкции нормальных регулярных формул (теорема 4) $\prod A_n$. A доказуема в T-исчислении тогда и только тогда, когда в этом исчислении доказуемы все A_n. Если $k_n = 0$, то

$$A_n = \prod_i t_{n_i} \wedge \prod_i \neg q_{n_i} \wedge \prod_i (r_{n_i} \supset D_{n_i}) \supset s$$

доказуема в T-исчислении тогда и только тогда, когда существуют i и j такие, что $t_{n_i} = q_{n_j}$ или $t_{n_i} = s$.

Пусть $A_n \in C_{k_n}$, где $k_n \geqslant 1$ и все t отличны от s и q. Строим k_n формул A_{n_j} (см. (6.1), стр. 189). Если хотя бы одна из формул A_{n_j} доказуема в T-исчислении, то

$$A_n \text{ экв. } p_{n_j} \wedge \prod_{i \neq j} (B_{n_i} \supset p_{n_i}) \wedge \prod_i t_{n_i} \wedge \prod_i \neg q_{n_i} \wedge \prod_i (r_{n_i} \supset D_{n_i}) \supset s,$$

принадлежащей более низкому классу $C_{k_n - 1}$. Если все A_{n_j} недоказуемы в T-исчислении, то A_n недоказуема в этом исчислении (т. к. A_n не тождественна в I_{k_n}, см. стр. 191).

Вопрос же о доказуемости A_{n_j} в свою очередь сводится к вопросу о доказуемости регулярных формул более низкого класса, чем формула A_n.

Если $B_{n_j} = \neg x_{n_j}$, то A_{n_j} доказуема в T-исчислении тогда и только тогда, когда она доказуема в классической логике предложений (стр. 189—190).

Если же $B_{n_j}=x_{n_j}\supset y_{n_j}$, то A_{n_j} эквивалентна регулярной формуле

$$x_{n_j}\wedge(y_{n_j}\supset p_{n_j})\wedge\prod_{F_{n_i}\neq B_{n_i}\supset p_n} F_{n_j}\supset s \text{ класса } C_{k_n-1}.$$

Итак, вопрос о доказуемости в T-исчислении произвольной формулы A логики предложений сводится к вопросу о доказуемости некоторой дедуктивно равной ей регулярной формулы. Проблема разрешимости для регулярных формул класса C_k при $k>0$ сводится к проблеме разрешимости для регулярных формул класса C_{k-1}. Вопрос же о доказуемости или недоказуемости регулярной формулы класса C_0 решается по виду соответствующей ей конъюнкции нормальных регулярных формул.

Примеры:

1. $A=(\neg p\supset q)\supset(\neg q\supset p)$.
   $A^*=(\neg p\supset q)\wedge\neg q\supset p$; $\quad A^*\in C_1$.

$A_1=(\neg p\supset q)\wedge\neg q\supset\neg p$ — недоказуема в классической логике предложений, следовательно, недоказуема и в T-исчислении. Из недоказуемости A_1 следует недоказуемость A.

2. $A=(\neg p\supset q)\wedge(\neg p\supset\neg q)\supset p$;
   $A^*=(\neg p\supset r)\wedge(r\supset\neg p)\wedge(r\supset q)\wedge(r\supset\neg q)\supset p$; $\quad A^*\in C_1$.
   $A_1=(\neg p\supset r)\wedge(r\supset\neg p)\wedge(r\supset q)\wedge(r\supset\neg q)\supset\neg p$;

A_1 — недоказуема в классической логике предложений, следовательно, $A_1\bar{\in} T$ и $A\bar{\in} T$.

3. $A=((p\supset q)\supset p)\wedge\neg p\supset p$; $\quad A\in C_1$.
   $A_1=((p\supset q)\supset p)\wedge\neg p\supset(p\supset q)$;
   A_1 экв. $p\wedge(q\supset p)\wedge\neg p\supset q$; $\quad A_1\in T$.
   A экв. $p\wedge\neg p\supset p$; $\quad A\in T$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Гливенко, Bull. Ak. Belg. (5), 14 (1928).
2. В. И. Гливенко, Ibid., (5) 15 (1929).
3. А. Н. Колмогоров, Матем. сб., 32 : 4 (1925).
4. А. Н. Колмогоров, Math. Zeitschrift, 35 (1932).
5. Heyting, Sitz.—Ber. Preuss. Ak. Wiss., Phys.—Math. Kl., 1930.
6. Gentzen, Math. Zeitschrift, 39 (1935).
7. S. Jaškowski, Congress international de Philosophy, 393 (1936)
8. A. Tarski, Fundamenta Mathematicae, XXXI (1938).
9. Gödel, Ergebnisse Math. Kolloquiums, 4 (1933).
10. Stone, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, 67 (1937).
11. Wajsberg, Wiadomości matematyczne, 46 (1939).

Получена 6 января 1951 г.
Новозыбков