Об арифметических суммах множеств, содержащихся в данном множестве

М. Л. Бродский

В последнее время вновь появились работы, посвященные свойствам арифметической (или векторной) суммы множеств [1]. Авторы этих работ Э. Борель, А. Данжуа и др. [2] попрежнему исследуют условия, достаточные (иногда необходимые) для того, чтобы арифметическая сумма множеств (как правило, совершенных) содержала отрезок, или, наоборот, имела меру нуль. Наиболее интересна, пожалуй, работа М. Холла [3], в которой доказывается, что любое вещественное число можно представить в виде суммы двух чисел, разложение которых в непрерывную дробь не содержит знаменателей, больших 4. Это доказательство основывается не на специфических свойствах суммы двух непрерывных дробей, а на метрических свойствах арифметически складываемых совершенных множеств, подобно тому как используется понятие метрической плотности в смысле Л. Г. Шнирельмана в теории чисел.

Мы здесь в основном будем решать несколько иной вопрос. Именно, пусть дано некоторое множество. Что можно сказать о содержащихся в нем арифметических суммах?

1. Прежде всего отметим, что *существуют совершенные множества, не содержащие вообще никакой арифметической суммы двух множеств, состоящих более чем из одного элемента*. В самом деле, если $P \supseteq M+N$, $M \ni m_1, m_2$; $N \ni n_1, n_2$, то в P содержится $a=m_1+n_1$; $b=m_1+n_2$; $c=m_2+n_1$; $d=m_2+n_2$, причем

$$a-b-c+d=0. \qquad (*)$$

Между тем можно доказать, что существует такое совершенное множество P, что если $x_1, x_2 \ldots x_n$ отличные друг от друга точки P, то равенство $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i=0$ возможно при рациональных λ_i лишь тогда, когда все λ_i равны нулю, т. е. точки P линейно независимы относительно поля рациональных чисел.

---

[1] Арифметической суммой $M+N$ множеств M и N называют совокупность всех чисел вида $m+n$, где $m \in M$, $n \in N$.

[2] См. Comptes Rendus, т. 227, стр. 103—105, 453—455, 790—793, 928—931.

[3] См. Annals of Mathematics, 2-я серия, т. 48, № 4, стр. 966.

Мы сейчас докажем только что упомянутое утверждение о существовании „иррегулярных" совершенных множеств в значительно более общей форме.

Теорема 1. *Пусть* $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1})$; $f_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n_2}) \ldots f_k(x_1, x_2, \ldots, x_{n_k}) \ldots$ *конечное или счетное множество функций, определенных (в n_k-мерных интерпретациях) в гиперкубах* $a \leqslant x_i \leqslant b$ $(i = 1, 2 \ldots n_k)$ *и удовлетворяющих требованиям:*

1) f_k *непрерывна по всем переменным в совокупности в каждой точке своей области определения;*

2) f_k *не обращается тождественно в нуль ни на каком сегменте, параллельном одной из координатных осей.*

Тогда на любом сегменте $[c, d] \subseteq [a, b]$ *можно построить такое совершенное множество P, что ни одно из равенств* $f_k(x_1, x_2, \ldots, x_{n_k}) = 0$ *невозможно при отличных друг от друга* $x_1 \in P$, $x_2 \in P \ldots x_{n_k} \in P$.

Лемма. *При условиях* (1)—(2), *каково бы ни было натуральное k и каковы бы ни были p непересекающихся сегментов* $T_1, T_2 \ldots T_p$, *содержащихся в* $[a, b]$, *где* $p \geqslant \max (n_i)$ $(i = 1, 2 \ldots k)$, *всегда можно найти такие точки* $t_1 \in T_1$, $t_2 \in T_2 \ldots t_p \in T_p$, *что, при* $i \leqslant k$, $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n_i}) \neq 0$, *где* $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n_i}\}$ — *произвольное подмножество* $\{t_1, t_2, \ldots, t_p\}$, *состоящее из n_i элементов и произвольным образом упорядоченное.*

Доказываем по индукции. Пусть s точек $t_1, t_2, \ldots, t_s$ уже построены. Если $s + 1 < \min n_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, то выбираем $s + 1$-ю точку произвольно в сегменте T_{s+1}. Если же, например, $s + 1 \geqslant n_i$ $(i \leqslant k)$, то рассмотрим некоторую функцию $f_1(x_1, x_2 \ldots x_{n_i})$ где $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n_i}\}$ определенным образом упорядоченное подмножество множества $\{t_1, t_2, \ldots, t_s, \alpha\}$ (где α пока произвольная точка сегмента T_{s+1}), обязательно содержащее α. Но f_i является функцией только от α и на основании условия (2) при некотором α_0 отлично от нуля, причем на основании условия (1) это неравенство сохраняется, когда α пробегает целый сегмент $T'_{s+1} \subseteq T_{s+1}$ (под сегментом здесь и дальше понимаем сегмент положительной длины). Рассматриваем какую-либо иную функцию $f_{i'}$ $(i' \leqslant k)$ (или ту же функцию иного подмножества, или иначе упорядоченного того же подмножества) уже на сегменте T'_{s+1} и строим сегмент T''_{s+1}, на котором соблюдаются уже два неравенства. Повторив это построение конечное число раз, найдем точку t_{s+1}.

Построение множества P. Пусть уже построено множество P^k, состоящее из конечного числа $m_k \geqslant \max n_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ сегментов T_p^k, по длине меньших $\frac{1}{2^{k+1}}$, обладающее тем свойством, что ни одно равенство $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n_i}) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ невозможно при $x_1 \in T^k_{\alpha_1}$, $x_2 \in T^k_{\alpha_2} \ldots x_{n_i} \in T^k_{\alpha_{n_i}}$, где все α_k различны. (За P^0 примем сегмент $[c, d]$).

Построим по индукции множество P^{k+1}. Построим сперва множество $\bar{P}^k$, состоящее из непересекающихся сегментов $\bar{T}^k_p (p = 1, 2, \ldots, m_{k+1})$, где $m_{k+1} \geqslant \max n_i (i = 1, 2, \ldots, k+1)$, по длине меньших $\frac{1}{2^{k+1}}$, так, чтобы в каждом сегменте множества P^k содержалось по меньшей мере два сегмента множества $\bar{P}^k$.

Применяем лемму к функциям $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}) \ldots f_{k+1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n_{k+1}})$ и множеству $\tilde{P}^k$. Получим точки $t_1^k \in \tilde{T}_1^k$, $t_2^k \in \tilde{T}_2^k \ldots t_{m_{k+1}}^k \in \tilde{T}_{m_{k+1}}^k$. Построим на основании условия (1) сегменты $t_i^k \in T_i^{k+1} \subseteq \tilde{T}_i^k$ такие, что ни одно из равенств $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n_i}) = 0$ $(i=1, 2, \ldots, k+1)$ невозможно при $x_1 \in T_{\beta_1}^{k+1}$, $x_2 \in T_{\beta_2}^{k+1}, \ldots, x_{n_i} \in T_{\beta_{n_i}}^{k+1}$, где все β_i различны. Наконец, положим $P^{k+1} = \bigcup\limits_{i=1}^{m_{k+1}} T_i^{k+1}$.

Рассмотрим $P = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} P^k$.

Доказательство теоремы 1. Пусть теперь $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n_i}) = 0$ $x_1, x_2 \ldots x_{n_i} \in P$ и отличны друг от друга, δ — минимум расстояний между ними. Пусть теперь $k \geqslant \max\left(i, \dfrac{\ln\frac{1}{\delta}}{\ln 2}\right)$. Так как $x_1, x_2, \ldots, x_{n_i} \in P^k$, то по условию они не могут входить все в различные сегменты множества P^k и расстояние между некоторой парой из них не больше $\frac{1}{2^k}$, что противоречит условию.

Теорема доказана.

Следствия: 1) Каково бы ни было счетное числовое поле Ω (поле рациональных, алгебраических чисел) существует совершенное множество P, такое, что все его точки линейно независимы относительно данного поля, т. е. равенство $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$ возможно при $x_i \in P$ и отличных друг от друга и $\lambda_i \in \Omega$ лишь, если все λ_i равны нулю.

2) Более того, при этих же условиях существует совершенное множество P, все точки которого алгебраически независимы относительно Ω, т. е.

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_1^{\alpha_1^{(i)}} x_2^{\alpha_2^{(i)}}, \ldots, x_n^{\alpha_{n_i}^{(i)}} \neq 0$$

при

$$\lambda_i \in \Omega, \quad \alpha_k^{(i)} \text{ целых}, \ \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \neq 0 \ \text{ и } \ \min_{\substack{i \neq k \\ i, k \leqslant n}} |x_i - x_k| > 0.$$

Замечание. Если наложить на функции f_i более сильное ограничение, а именно потребовать необращения в нуль при несчетном множестве значений одного аргумента и фиксированных остальных, то можно найти в любом совершенном множестве совершенное подмножество, обладающее свойствами множества P. (Доказательство переносится почти дословно. Это замечание относится, в частности, к следствиям).

Подобно арифметическим суммам, можно рассматривать более общие совокупности всех чисел вида $f(m, n)$, где $m \in M$, $n \in N$ [1]. Для каждой достаточно гладкой функции f можно утверждать то же, что и для арифметической суммы, только одно из множеств в общем случае должно содержать не более трех слагаемых, а другое не более двух. Кроме того, можно построить такое совершенное множество P, что оно ни для какой

---

[1] М. Л. Бродский, О некоторых свойствах множеств положительной меры. Усп. матем. наук, т. IV, в. 3 (1949).

достаточно гладкой функции f и ни для каких бесконечных множеств M и N не содержит всех $f(m, n)$, где $m \in M$, $n \in N$. Это следует из того, что для двух пар близких точек из M и N равенство, подобное (*), будет выполняться с точностью до бесконечно малых высшего порядка.

2. Переходя к рассмотрению множества положительной меры, мы будем опираться на следующие утверждения:

Теорема 2. *Для любого измеримого множества M и любого положительного ε можно найти такое совершенное множество P, что $m(M+P) \leqslant m(M)+\varepsilon$.*

Для случая, когда мера M равна нулю, можно доказать более сильную теорему:

Теорема 3. *Для любого множества меры нуль M можно найти такое совершенное множество P, что $m(M+P)=0$.*

Ввиду полной аналогичности доказательств этих теорем, докажем более сложную теорему 3.

Лемма 1. *Если обозначить через $M+h$ h — сдвижку множества M, то, при $h \to 0$, $m(M \cup M+h) \to m(M)$.*

Это следует из известной формулы $\lim\limits_{h \to 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x+h)-f(x)|\, dx = 0$, если в качестве $f(x)$ брать характеристическую функцию множества M.

Лемма 2. *Арифметическая сумма множества A с открытым множеством G равна арифметической сумме его замыкания с тем же открытым множеством.*

В самом деле, пусть $x=\bar{a}+g$, где $\bar{a} \in \bar{A}$, $g \in G$[1]. Тогда g входит в G вместе со своей ε-окрестностью, и, если a точка A, отстоящая от $\bar{a}$ на расстояние, меньшее ε, то $x=a+(g+\bar{a}-a)$, где $g+\bar{a}-a \in G$.

Построение. Пусть T_1^0, $T_2^0, \ldots$ открытые множества, содержащие A, и такие, что $m(T_j^0)<\frac{1}{4^j}$. Выберем на основании леммы 1 такое m_1, что $m(T_1') < \frac{3}{2}\, m(T_1^0)$, где $T_1'=T_1^0 \cup \left(T_1^0+\frac{1}{2^{m_1}}\right)$.

Дальше ведем построение по индукции. Допустим, что множества T_j^k при $j+k \leqslant p$ и числа $m_1, m_2, \ldots, m_{p-1}$ уже построены. Выберем теперь $m_p > m_{p-1}+1$ настолько большим (на основании леммы 1), чтобы для всех $j \leqslant p$ имело место неравенство

$$m(T_j^{p-j+1}) < m(T_j^{p-j}) + \frac{m(T_j^0)}{2^{p-j+1}}, \qquad (**)$$

где

$$T_j^{p-j+1} = T_j^{p-j} \cup \left(T^{p-j}+\frac{1}{2^{m_p}}\right).$$

Наконец, положим

$$P=\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{2^{m_i}}\right\},$$

где $\varepsilon_i=0$ или 1, т. е. примем за P множество всех правильных двоичных дробей, у которых на всех местах, кроме m_i-ых стоят нули, и на m_i-ых местах нули или единицы.

---

[1] $\bar{A}$ — замыкание A.

Доказательство. Пусть теперь $P_p = \left\{ \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\varepsilon_i}{2^{m_i}} \right\}$. В силу леммы 2

$$T_j^0 + T = \bigcup_{p=1}^{\infty} (T_j^0 + P_p) = \bigcup_{p=j}^{\infty} (T_j^0 + P_p) = \bigcup_{p=j}^{\infty} (T^{p-j} + P_j) = \bigcup_{p=j}^{\infty} T^{p-j} + P_j,$$

ибо

$$T_j^1 = T_j^0 \cup \left(T_j^0 + \frac{1}{2^{m_j}}\right);\ T_j^2 = T_j^1 \cup \left(T_j^1 + \frac{1}{2^{m_{j+1}}}\right) \dots T_j^{p-j} =$$

$$= T_j^{p-j-1} \cup \left(T_j^{p-j-1} + \frac{1}{2^{m_{p-1}}}\right),$$

откуда

$$T^{p-j} = T_j^0 + \left\{ \sum_{i=j}^{p-1} \frac{\varepsilon_i}{2^{m_i}} \right\}.$$

Но

$$m(T_j^{p-j}) < 2m(T_j^0) < \frac{2}{4^j},$$

а P_j состоит из 2^{j-1} чисел. Следовательно, так как $A + P \subseteq T_j^0 + P$, то, при любом j,

$$m(A+P) < m(T_j^0 + P) < 2^{j-1} \cdot \frac{2}{4^j} = \frac{1^j}{2^j}.$$

Теорема доказана [1].

Теорема 2 двойственна в смысле теории множеств следующей теореме об арифметических суммах, содержащихся в любом множестве положительной меры:

Теорема 4. *Любое множество положительной меры M при любом заранее заданном положительном ε содержит арифметическую сумму $A + P$, где A множество меры, не меньшей $m(M) - \varepsilon$, а P совершенное множество.*

Доказательство. Очевидно, множество M можно считать ограниченным и расположенным на сегменте $[a, b]$. Пусть $N = [a, b] \setminus M$. На основании теоремы 2 выберем совершенное множество P такое, что $m(N+P) < m(N) + \frac{\varepsilon}{2}$. Потребуем еще, чтобы P было целиком расположено на сегменте $\left[0, \frac{\varepsilon}{2}\right]$. Рассмотрим разность

$$\left[a + \frac{\varepsilon}{2}, b\right] \setminus (N+P) = R.$$

Очевидно,

$$m(R) \geqslant b - \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right) - m(N+P) > b - \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(m(N) + \frac{\varepsilon}{2}\right) = m(M) - \varepsilon.$$

---

[1] Теорема 2 в сущности доказана попутно. В самом деле, будем вместо неравенства (**) требовать выполнение более сильного неравенства, в котором последний член умножен на произвольное фиксированное α; тогда вместо неравенства (***) получим теорему 2 для открытого множества T_j^0, которое можно считать содержащим данное множество M, причем $m(T_j^0 \setminus M) < \varepsilon$, и тогда получим теорему 2 для произвольного множества.

С другой стороны, $R+\tilde{P}\subseteq M$, где $\tilde{P}$ множество, симметричное множеству P относительно начала координат. В самом деле, допустим, что $r+\tilde{p}\in M$, где $r\in R$, $\tilde{p}\in\tilde{P}$, т. е. $r-p\in M$, где $r\in R$, $p\in P$. Но так как $r\in\left[a+\frac{\varepsilon}{2},\, b\right]$, а $p\in\left[0,\, \frac{\varepsilon}{2}\right]$, то $r-p\in[a, b]$ и, следовательно, $r-p\in N$, откуда $r\in P+N$, что противоречило бы определению R. Теорема доказана.

Точно так же теорема 3 двойственна следующей теореме:

Теорема 5. *Множество A, содержащее почти весь сегмент $[a, b]$ (почти всю прямую), содержит при любом положительном $\varepsilon < b-a$ арифметическую сумму совершенного множества P диаметра ε и некоторого множества B, содержащего почти весь сегмент $[a, b-\varepsilon]$ (соответственно почти всю прямую).*

Замечания. 1) Во всех доказанных теоремах мы снова могли бы искать совершенное множество P среди подмножеств наперед заданного совершенного множества.

2) Без изменений в доказательстве можем считать наши множества n-мерными (n-мерной положительной меры и т. д.), а P попрежнему линейным. В теореме 5, например, мы можем рассматривать множество A, занимающее почти весь n-мерный параллелепипед $a_i\leqslant x_i\leqslant b_i$ $(i=1, 2,\ldots, n)$, а множество P считать расположенным на оси Ox_1. Проведя сечение C множества B, параллельное гиперплоскости $Ox_2,\ldots, x_n$ так, чтобы оно занимало почти весь $n-1$-мерный параллелепипед $c_i\leqslant x_i\leqslant b_i$ $(i=2, 3,\ldots, n)$ на секущей гиперплоскости, получим, что A подавно содержит $C+P$, т. е. что множество, занимающее почти весь параллелепипед $a_i\leqslant x_i\leqslant b_i$, $(i=1, 2,\ldots, n)$, всегда содержит топологическое произведение множества C, занимающего почти весь $n-1$-мерный параллелепипед $(a_i\leqslant x_i\leqslant b_i\ i=2, 3,\ldots, n)$, на совершенное множество. В свою очередь, применяя только что высказанное утверждение к этому $n-1$-мерному параллелепипеду и повторяя этот процесс несколько раз, получим такую теорему:

Теорема 6. *Множество A, содержащее почти весь параллелепипед $a_i\leqslant x_i\leqslant b_i$ $(i=1, 2,\ldots, n)$, содержит топологическое произведение $B\times P_1\times P_2\times\ldots\times P_k (1\leqslant k<n)$, где P_i — совершенное множество, расположенное на оси Ox_i, а B содержит почти весь параллелепипед $a_i\leqslant x_i\leqslant b_i$ $(i=k+1,\ldots, n)$.*

Из теоремы 4 таким же образом может быть получено следующее утверждение, доказанное ранее другим путем:

Теорема 7. *Всякое n-мерное множество положительной меры A содержит топологическое произведение $n-k$-мерного множества положительной меры B и k совершенных одномерных множеств.*

3) Борелевы множества второй категории в сепарабельном метрическом пространстве (в частности, в пространстве Банаха, на прямой и в n-мерном пространстве) аналогичны множествам, содержащим почти всю сферу, так как они содержат некоторую сферу без множества первой категории.

В нашем случае аналогия основывается также на теореме:

Теорема 8. *Если A — множество первой категории в сепарабельном пространстве Банаха E, то существует совершенное множество P такое, что $A+P$ — множество первой категории.*

Построение. Пусть $A=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j'$, A' — нигде не плотны. Обозначим через A_k сумму $\bigcup\limits_{j=1}^{k} A_j'$. A_k также, очевидно, нигде не плотны. Пусть $S_1, S_2, \ldots$ — счетная база окрестностей в E (т. е. совокупность всех сфер с центрами в точках $x_1, x_2, x_3 \ldots$, образующих в E всюду плотное множество, и рациональными радиусами). Так как A_1 нигде не плотно, $S_1 \setminus A_1$ содержит некоторую сферу K_1. Выберем целое число $m_1 > \dfrac{\ln \dfrac{1}{R(K_1)}}{\ln 2}$, где $R(K_1)$ — радиус K_1. Далее строим числа $m_2, m_3, m_4, \ldots$ по индукции. Выберем некоторую систему векторов, равных по норме единице $x_1, x_2, x_3, \ldots$ (в частном случае все они могут совпадать). Пусть числа $m_1, m_2, \ldots, m_{p-1}$ уже определены. Обозначим через P_p множество $\left\{\sum\limits_{i=1}^{p-1} \dfrac{\varepsilon_i x_i}{2^{m_i}}\right\}$, где $\varepsilon_i=0$ или 1. Тогда A_p+P_p нигде не плотно[1], и $S_p \setminus (A_p+P_p) \supseteq K_p$, где K_p — некоторая сфера. Выберем тогда $m_p > \max\left(m_{p-1}+1,\ \dfrac{\ln \dfrac{1}{R(K_p)}}{\ln 2}\right)$. Наконец, положим $P=\left\{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{\varepsilon_i x_i}{2^{m_i}}\right\}$.

Доказательство. Так как $A+P=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}(A_j+P)$, то достаточно доказать, что все A_j+P нигде не плотны. В самом деле, допустим, что $\overline{A_m+P} \supseteq S_n$ (чертой обозначены замыкания). Тогда выберем $S_q \subseteq S_n$, где $q \geqslant m$. Так как $A_q \supseteq A_m$, подавно $\overline{A_q+P} \supseteq S_q$. Но, с другой стороны, $S_q \setminus (A_q+P_q) \supseteq K_q$ и точки сферы K_q, находящиеся на расстоянии от ее центра, меньшем

$$R(K_q)-\sum_{=q+1}^{\infty} \frac{1}{2^{m_i}} > \frac{R(K_q)}{2} > 0$$

не могут принадлежать A_q+P. Теорема доказана.

Замечание. Попутно доказано, что для любого нигде не плотного множества (например, совершенного) можно построить такое совершенное множество, что их арифметическая сумма нигде не плотна (и совершенна).

Теорема 9 (полностью аналогична теореме 5). *Борелево множество второй категории в сепарабельном пространстве Банаха содержит арифметическую сумму борелева множества второй категории и совершенного множества.*

Теорема 10. *Если A — борелево множество второй категории в топологическом произведении сепарабельных пространств Банаха $E_1 \times E_2$,* то A содержит топологическое произведение $B \times P$, где B —

[1] В силу конечности множества P_p.

борелево множество второй категории в E_1, $P \subseteq E_2$ совершенное множество.

Как и при доказательстве теоремы 6, мы основываемся на том, что n-мерное множество меры нуль сечется по множеству меры нуль некоторым линейным многообразием, параллельным наперед заданному, и, следовательно, множество, содержащее почти весь n-мерный параллелепипед, в пересечении с некоторым $n-1$-мерным многообразием содержит почти весь соответствующий $n-1$-мерный параллелепипед; в доказательстве настоящей теоремы мы можем основываться на легко доказуемом подобном же свойстве множеств первой категории, и, следовательно, борелевых множеств второй категории в топологическом произведении сепарабельных пространств. В остальном доказательство теоремы 9 подобно доказательству теоремы 6.

Замечания. Множества всех точек на плоскости, сумма координат которых иррациональна, не содержат никакого топологического произведения двух множеств второй категории, хотя одно из них борелево или является борелевым множеством второй категории [1]. Это вытекает из почти очевидного факта, что арифметическая сумма двух множеств второй категории, хотя бы одно из которых борелево, содержит отрезок, как показывает известный пример неизмеримого множества второй категории, все расстояния между точками которого иррациональны, (отказаться от борелевости обоих множеств нельзя). Можно утверждать даже больше, а именно, что арифметическая сумма данного множества с любым борелевым множеством второй категории содержит отрезок тогда и только тогда, когда данное множество является множеством второй категории. В самом деле, если A первой категории, $\bar{A}$ — множество, симметричное A' относительно начала координат $\left(A'=\bigcup_{j=1}^{\infty}\bar{A}_j,\right.$ если $A=\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j$ и A_j нигде не плотны$\left.\right)$, а $\{x_n\}$ счетное всюду плотное множество, то множество $E\setminus\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}(\bar{A}+x_n)\right]=Q$ второй категории и борелево (даже G_δ), а вместе с тем, $A+Q$ не содержит ни одной точки множества $\{x_n\}$ [2].

4. Пример множества положительной плоской меры, все проекции которого разрывны. В статье „О некоторых свойствах множеств положительной меры“ автором был поставлен такой вопрос: в связи с тем, что проекция топологического произведения двух линейных множеств положительной меры на любую ось, кроме двух,

[1] Аналогичный пример можно построить для топологического произведения двух произвольных сепарабельных пространств Банаха $E_1 \times E_2$; именно, — это множество пар точек (x, y) $(x \in E_1,\ y \in E_2)$, для которых $f(x)+\varphi(y)$ иррационально, где $f(x)$ и $\varphi(y)$ линейные функционалы соответственно в пространствах E_1 и E_2.

[2] Это замечание полностью переносится с заменой выражения „Множество второй категории (борелево)“ выражением „множество положительной внешней меры“ (измеримое). Между прочим, получаем, что арифметическая сумма борелева множества положительной меры и борелева множества второй категории на прямой может быть разрывной. Таким образом, из того, что арифметические суммы $A+A$ и $B+B$ содержат отрезки, не следует, что арифметическая сумма $A+B$ содержит отрезок.

содержит отрезок, можно ли утверждать, что подобное, но более слабое свойство имеет место для произвольного множества положительной плоской меры?

Этот вопрос оказался эквивалентным „задаче Какея": можно ли построить множество плоской меры нуль, содержащее отрезки единичной длины во всех направлениях? Оказалось, что такие множества существуют [1]. Несколько усложнив рассуждения, содержащиеся в упомянутой работе, можно построить множество плоской меры нуль, содержащее п р я м ы е во всех направлениях. Тогда, если A это множество, а R — множество всех точек на плоскости с обоими рациональными координатами, то множество $L \setminus (A+R)$, где L — плоскость, содержит почти всю плоскость, а все его проекции разрывны. Не следует думать, что все проекции множества, содержащего почти всю плоскость, обязательно содержат прямую без с ч е т н о г о числа точек. В самом деле, рассмотрим арифметическую сумму множества $A+R$ с совершенным множеством P_1, расположенным на оси Ox так, чтобы арифметическая сумма $A+R+P_1$ имела меру нуль, и прибавим (арифметически) к этой арифметической сумме множество P_2, расположенное на оси Oy, так, чтобы арифметическая сумма $A+R+P_1+P_2=Q$ имела меру нуль. Множество $L \setminus Q = S$, где L — плоскость, проектируясь в любом направлении, дает на любом сегменте несчетное всюду плотное множество.

Ограниченное замкнутое подмножество положительной меры множества S в проекции на любую прямую дает замкнутое нигде не плотное множество.

Получена 6 марта 1951 г.
Москва.

---

[1] См. Mathematische Zeitschrift, т. 27 (1927 г.), A. B e s i c o v i t c h, On the Kakeya's problem and similar one.