О параболическом базисе В. Я. Козлова

М. К. Фаге

В статье [1] В. Я. Козлов рассмотрел в пространстве $L^{(2)}_{[0,1]}$ базисы, удовлетворяющие условию, названному им условием параболичности. Он нашел их строение (теорема 4 его статьи) и доказал, что они являются базисами Рисса (теорема 5). Условие параболичности дано им в аналитической форме.

В настоящей статье дается геометрическое определение „базиса Козлова", к частному случаю которого приводит условие параболичности; это позволяет выяснить геометрический смысл условия В. Я. Козлова и обобщить его теоремы 4 и 5 с векторных базисов в сепарабельном гильбертовом пространстве $L^{(2)}_{[0,1]}$ на базисы, состоящие из подпространств, в произвольном гильбертовом пространстве $\mathcal{E}$.

Пусть подпространства $\mathcal{H}_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ образуют базис $\mathcal{E}$ [2]. Тогда ([2], теорема 1) существует единственная („сопряженная") система подпространств $\mathcal{G}_n$ $(n=1, 2, \ldots)$, являющаяся также базисом и образующая с $\{\mathcal{H}_n\}_1^\infty$ идемпотентное разложение единицы $\{I_n=\mathcal{H}_n\times\mathcal{G}_n\}_1^\infty$ [3]. Введем частичные суммы $I^{(n)}=I_1+\ldots+I_n$, равные идемпотентным операторам $\mathcal{H}^{(n)}\times\mathcal{G}^{(n)}$, где $\mathcal{H}^{(n)}=\mathcal{H}_1+\ldots+\mathcal{H}_n$, $\mathcal{G}^{(n)}=\mathcal{G}_1+\ldots+\mathcal{G}_n$. Применяя к $\mathcal{H}_n$ проекционный оператор $G^{(n)}$ на подпространство $\mathcal{G}^{(n)}$, мы получаем в $\mathcal{G}^{(n)}$ подпространство $\mathcal{F}_n=G^{(n)}\mathcal{H}_n$, являющееся ортогональным дополнением к $\mathcal{G}^{(n-1)}$ $(\mathcal{G}^{(0)}=\{0\})$; таким образом строится ортогональный базис подпространств $\mathcal{F}_n$ $(n=1, 2,\ldots)$, причем $\mathcal{F}_1+\ldots+\mathcal{F}_n=\mathcal{G}^{(n)}$ (см. [2]). При этом $\mathcal{H}_n=I^{(n)}\mathcal{F}_n$.

С другой стороны, применяя к $\mathcal{H}_n$ сопряженный оператор $I^{(n)*}$, мы получаем опять же в $\mathcal{G}^{(n)}$ новое подпространство $\mathcal{F}'_n=I^{(n)*}\mathcal{H}_n=I^{(n)*}I^{(n)}\mathcal{F}_n$ — образ $\mathcal{F}_n$ под действием самосопряженного оператора $I^{(n)*}I^{(n)}$, причем обратно: $\mathcal{H}_n=H^{(n)}\mathcal{F}'_n$ получается проектированием $\mathcal{F}'_n$ на $\mathcal{H}^{(n)}$ и, следовательно, $\mathcal{F}_n=G^{(n)}H^{(n)}\mathcal{F}'_n$. Так как $\mathcal{G}^{(k-1)}\subset\mathcal{G}^{(k)}$, то подпространства $\mathcal{F}'_1,\ldots,\mathcal{F}'_n$ лежат все в $\mathcal{G}^{(n)}$ $(n=1, 2,\ldots)$. Определим линейное многообразие[1] $P_n=(E-I^{(n)*})\mathcal{H}_n$, т. е. совокупность векторов вида $p=h-I^{(n)*}h$, где $h\in\mathcal{H}_n$, а $I^{(n)*}h\in\mathcal{F}'_n$ (по определению $\mathcal{F}'_n$) $(n=1, 2,\ldots)$.

Теорема 1. $P_n\perp\mathcal{H}^{(n)}$, в частности, $P_n\perp\mathcal{H}_n$ $(n=1, 2,\ldots)$.

Действительно, если $p=h-I^{(n)*}h$, где $h\in\mathcal{H}_n$, и $z\in\mathcal{H}^{(n)}$, то $(p, z)=(h-I^{(n)*}h, z)=(h, z)-(h, I^{(n)}z)=(h, z)-(h, z)=0$.

[1] E — единичный оператор („проектор на $\mathcal{E}$")

Теперь введем определение: базис $\{\mathcal{H}_n\}_1^\infty$ назовем **базисом Козлова**, если подпространства $\mathcal{F}'_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ попарно ортогональны. Это определение, действительно, представляет обобщение условия параболичности для векторных базисов, введенного В. Я. Козловым: из его условия вытекает, что вектор r_n (в обозначениях его статьи [1]) дает максимум оператору $S_n{}^*S_n$ в подпространстве R_n, следовательно, является его собственным вектором, т. е. $S_n{}^*\, S_n r_n$ коллинеарны r_n и поэтому попарно ортогональны (вместе с r_n).

Следующие две теоремы являются обобщением теорем 4 и 5 В. Я. Козлова.

Теорема 2. *Если $\{\mathcal{H}_n\}_1^\infty$ есть базис Козлова, то линейные многообразия $P_n=(E-I^{(n)*})\,\mathcal{H}_n$ попарно ортогональны.*

Доказательство. Пусть $p=x-I^{(n)*}x\in P_n$, $q=y-I^{(m)*}y\in P_m$ $(x\in\mathcal{H}_n,\ y\in\mathcal{H}_m;\ m\neq n)$; так как $I^{(n)*}x\in\mathcal{F}'_n$, $I^{(m)*}y\in\mathcal{F}'_m$, то по условию $I^{(n)*}x\perp I^{(m)*}y$ и, следовательно, $(p, q)=(x, y)-(I^{(n)*}x, y)-(x, I^{(m)*}y)=(x, y)-(x, I^{(n)}y)-(I^{(m)}x, y)$; считая для определенности $n>m$, получим $I^{(n)}y=y$, $I^{(m)}x=0$ и, следовательно, $(p, q)=(x, y)-(x, y)=0$, т. е. $P_n\perp P_m$.

Теорема 3. *Базис Козлова спрямляем.*

Доказательство. На основании теоремы 4 из [2] достаточно показать сходимость описанного в [2] спрямляющего процесса, примененного к базису $\{\mathcal{H}_n\}_1^\infty$, т. е. существование операторов

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}H^{(n)}I_n^*I_n \quad \text{и} \quad B=\sum_{n=1}^{\infty}H_nI^{(n)*}E_n,$$

где E_n — проекторы на подпространства $\mathcal{E}_n=H^{(n)}\mathcal{G}_n$ (см. [2], теорема 2), образующие ортогональный базис $\mathcal{E}$. Сходимость этих рядов докажем, следуя идее В. Я. Козлова.

Из того, что $\{\mathcal{H}_n\}_1^\infty$ есть базис, следует ограниченность норм операторов $|I^{(n)}|=|I_1+\ldots+I_n|\leqslant C$ и $|I_n|\leqslant 2C$ $(n=1, 2, \ldots)$; отсюда для любого $x\in\mathcal{E}$ получим $\|H^{(n)}I_n^*I_nx\|\leqslant 2C\|I_nx\|$, где $I_nx=h_n\in\mathcal{H}_n$ и $H^{(n)}I_n^*I_nx=H^{(n)}I_n^*h_n=e_n\in\mathcal{E}_n$; так как e_n лежат в попарно ортогональных подпространствах $\mathcal{E}_n$, то для сходимости ряда $Ax=\sum\limits_{n=1}^{\infty}e_n$ достаточно показать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|h_n\|^2$. Имеем

$$\|I^{(n)}x\|^2=\|I^{(n-1)}x+h_n\|^2=\|I^{(n-1)}x\|^2+(I^{(n-1)}x, h_n)+(h_n, I^{(n-1)}x)+\|h_n\|^2; \quad (1)$$

теперь преобразуем $(I^{(n-1)}x,\ h_n)=(I^{(n)}I^{(n-1)}x,\ h_n)=(I^{(n-1)}x,\ f_n)$, где $f_n=I^{(n)*}h_n\in\mathcal{F}_n$; (1) примет вид

$$\|I^{(n)}x\|^2=\|I^{(n-1)}x\|^2+(I^{(n-1)}x, f_n)+(f_n, I^{(n-1)}x)+\|h_n\|^2. \quad (2)$$

Если $h_n=0$, то и $f_n=0$ и (2) примет вид

$$\|I^{(n)}x\|^2=\|I^{(n-1)}x\|^2. \quad (3)$$

Если же $h_n\neq 0$, то проделаем с (2) дальнейшие преобразования Заметим, что $\|h_n\|^2=(I^{(n)}h_n, h_n)=(h_n, f_n)$. Поэтому, если ввести вектор $a_n=f_n:\|h_n\|$, то получим $(h_n, a_n)=(h_n, f_n):\|h_n\|=\|h_n\|$ и (2) примет вид $\|I^{(n)}x\|^2=\|I^{(n-1)}x\|^2+(h_n, a_n)\,\{(I^{(n-1)}x, a_n)+(a_n, I^{(n-1)}x)\}+(h_n, a_n)^2$. Прибавив и отняв здесь $(I^{(n-1)}x, a_n)\cdot(a_n, I^{(n-1)}x) = |(I^{(n-1)}x, a_n|^2$ и заметив, что $I^{(n-1)}x + h_n = I^{(n)}x$, получим

$$\|I^{(n)}x\|^2 = \|I^{(n-1)}x\|^2 + |(I^{(n)}x, a_n)|^2 - |(I^{(n-1)}x, a_n)|^2. \tag{4}$$

Складывая формулы (3) (при $h_n = 0$) или (4) (при $h_n \neq 0$) по $n = 1, 2, \ldots, N$ и обозначая $\alpha_n = (I^{(n)}x, a_n)$, $\beta_n = (I^{(n-1)}x, a_n)$ (при этом будем считать $a_n = 0$, $\alpha_n = 0$, когда $h_n = 0$; $I^{(0)} = 0$, $\beta_1 = 0$), получим

$$\|I^{(N)}x\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |\alpha_n|^2 - \sum_{n=1}^{N} |\beta_n|^2. \tag{5}$$

Но $\alpha_n = (I^{(n)}x, a_n) = (x, I^{(n)*}a_n) = (x, a_n)$, так как $a_n \in \mathcal{G}^{(n)}$ и, следовательно, $I^{(n)*}a_n = a_n$; при этом $\|a_n\| = \|I^{(n)*}h_n\| : \|h_n\| \leqslant C$; так как, кроме того, a_n лежат в попарно ортогональных подпространствах $\mathcal{F}'_n$ (по определению базиса Козлова), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\|a_n\|^2$ сходится. Левая часть (5) при $N \to \infty$ стремится к $\|x\|^2$; следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\beta_n|^2$ тоже сходится. Далее $\|h_n\| = (h_n, a_n) = (I^{(n)}x, a_n) - (I^{(n-1)}x, a_n) = \alpha_n - \beta_n$ и поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\|h_n\|^2$ сходится, чем и заканчивается доказательство существования ограниченного линейного оператора A.

Теперь докажем сходимость ряда $Bx = \sum_{n=1}^{\infty} h_n$, где положено сейчас $h_n = H_n I^{(n)*} e_n$, $e_n = E_n x \in \mathcal{E}_n$ определим $f_n = I^{(n)*}h_n \in \mathcal{F}'_n$ и $p_n = h_n - f_n \in P_n$; по теореме 1 имеем $\|f_n\|^2 = \|h_n\|^2 + \|p_n\|^2$, причем $\|f_n\| \leqslant C\cdot\|h_n\| \leqslant C^2\|e_n\|$; так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\|e_n\|^2$ сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n\|^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\|p_n\|^2$ сходятся; но f_n лежат в попарно ортогональных подпространствах $\mathcal{F}'_n$ (по определению базиса Козлова) и p_n лежат в попарно ортогональных подпространствах P_n (теорема 2); следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ сходятся, а поэтому и $Bx = \sum_{n=1}^{\infty} h_n = \sum_{n=1}^{\infty}(f_n + p_n)$ сходится и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Я. Козлов, О базисах в пространстве $L^{(2)}_{[0,1]}$. Матем. сб., т. 26 (68), в. I (1950), стр. 85—102.

2. М. К. Фаге, Спрямление базисов в гильбертовом пространстве, ДАН, т. LXXIV, № 6 (1950), стр. 1053—1056.

3. М. К. Фаге, Идемпотентные операторы и их спрямление, ДАН, т. LXXIII, № 5 (1950), стр. 895—897.

Получена 30 января 1951 г.

Черновцы
