По поводу одной теоремы Н. Н. Боголюбова

И. И. Гихман

Пусть $X(t, x)$ обозначает функцию, значениями которой служат точки m-мерного линейного пространства E^m, определенную для всех неотрицательных значений $t (0 \leqslant t < \infty)$ и для значений x из области D пространства E^m.

Н. Н. Боголюбов доказал следующую теорему, являющуюся обоснованием так называемого принципа усреднения в нелинейной механике [1]:

Теорема 1. *Допустим, что*

а) *функция $X(t, x)$ ограничена и как функция от x удовлетворяет в D условию Липшица с константой, не зависящей от t;*

б) *равномерно по x в D существует предел*

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x)\, dt = X_0(x); \tag{1}$$

в) *решение $y = y(t)$ уравнения*

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon X_0(y) \tag{2}$$

вместе с некоторой своей ϱ-окрестностью лежит в D.

Тогда для любых положительных чисел T и η существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x), \tag{3}$$

совпадающее с $y = y(t)$ при $t = 0$, отличается от $y(t)$ меньше, чем на η на всем интервале $\left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right]$,

$$|x(t) - y(t)| < \eta, \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{T}{\varepsilon},$$

для всех $\varepsilon < \varepsilon_0$ $(\varepsilon > 0)$.

С другой стороны, хорошо известны классические теоремы анализа о непрерывной зависимости решений диференциальных уравнений от параметра.

Вот формулировка одной из них ([2]):

Теорема 2. *Допустим, что функция $X(t, x, \lambda)$ непрерывна по совокупности своих аргументов t, x, λ в замкнутой области*

$$x \in [D]^{1} \quad t \in [0, T], \quad |\lambda| \leqslant C \quad (C > 0)$$

и удовлетворяет условию Липшица по x с константой, не зависящей от t, λ.

Тогда для заданных начальных условий $x(0) = x_0 \in D$ можно указать сегмент $[0, \tau]$, на котором решение диференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x, \lambda) \tag{4}$$

является непрерывной функцией параметра λ.

Следующая теорема содержит в себе обе предыдущие теоремы.

Теорема 3. *Допустим, что функция $X(t, x, \lambda)$, принимающая значения в E^m, определена для значений аргументов*

$$t \in [0, T], \quad x \in D, \quad \lambda \in \Lambda,$$

где Λ — некоторое множество значений параметра λ, для которого λ_0 является предельной точкой, и D — ограниченная область.

Пусть выполнены следующие условия:

а) функция $X(t, x, \lambda)$ равномерно ограничена, непрерывна по t и x $(t \in [0, T], \; x \in D)$ и удовлетворяет условию Липшица по переменной x с константой, не зависящей от t, λ

$$|X(t, x, \lambda)| < M,$$
$$|X(t, x, \lambda) - X(t, y, \lambda)| \leqslant C|x - y|^{2};$$

б)

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_t^{t+\tau} X(\theta, x, \lambda)\, d\theta = \int_t^{t+\tau} X(\theta, x, \lambda_0)\, d\theta \tag{5}$$

$$(0 \leqslant t < t + \tau \leqslant T);$$

в) решение уравнения

$$\frac{dy}{dt} = X(t, y, \lambda_0) \tag{6}$$

лежит вместе с некоторой ρ-окрестностью в D.

Тогда решение $x = x(t)$ уравнения

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x, \lambda), \tag{7}$$

совпадающее с $y(t)$ при $t = 0$, непрерывно по λ в точке $\lambda = \lambda_0$

$$\max_{0 \leq t \leq T} |x(t) - y(t)| \to 0$$

при $\lambda \to \lambda_0$.

Доказательство. Для любого λ существует такое t_0, что при $t < t_0$ уравнение (7) имеет решение

$$x = x(t, \lambda), \; x(0) = y(0).$$

---

[1] $[D]$ — обозначает замыкание области D.

[2] $|x|$ — обозначает длину радиуса вектора точки x в евклидовой метрике в E^m.

лежащее внутри D. В дальнейшем будет показано, что при λ, достаточно близком к λ_0, можно положить $t_0 = T$.

Если

$$t+\tau < t_0, \quad t \geqslant 0, \quad \tau > 0,$$

то

$$x(t+\tau)-y(t+\tau)=x(t)-y(t)+\int_t^{t+\tau}\{X(\theta, x(\theta), \lambda)-X(\theta, y(\theta), \lambda_0)\}\, d\theta.$$

Обозначая

$$\delta(t+\tau) = |x(t+\tau) - y(t+\tau)|,$$

получим

$$\delta(t+\tau) \leqslant \delta(t) + \left|\int_t^{t+\tau}[X(\theta, x(\theta), \lambda) - X(\theta, x(t), \lambda)]\, d\theta\right| +$$

$$+\left|\int_t^{t+\tau}[X(\theta, x(t), \lambda) - X(\theta, x(t), \lambda_0)]\, d\theta\right| +$$

$$+\left|\int_t^{t+\tau}[X(\theta, x(t), \lambda_0) - X(\theta, y(t), \lambda_0)]\, d\theta\right| +$$

$$+\left|\int_t^{t+\tau} X(\theta, y(t), \lambda_0) - X(\theta, y(\theta), \lambda_0)]\, d\theta\right|,$$

отсюда

$$\delta(t+\tau) \leqslant (1+C\tau)\,\delta(t) + C\int_t^{t+\tau}[|x(\theta) - x(t)| + |y(\theta) - y(t)|]\, d\theta +$$

$$+\left|\int_t^{t+\tau}[X(\theta, x(t), \lambda) - X(\theta, x(t), \lambda_0)]\, d\theta\right|. \tag{8}$$

Так как скорости точек, движение которых определяется уравнениями (6) и (7), в силу условия а), равномерно ограничены, то

$$\int_t^{t+\tau}[|x(\theta) - x(t)| + |y(\theta) - y(t)|]\, d\theta \leqslant M\tau^2. \tag{9}$$

Заметим теперь, что соотношение (5) выполняется равномерно относительно x. Действительно, множество функций от x

$$\int_t^{t+\tau}[X(\theta, x, \lambda) - X(\theta, x, \lambda_0)]\, d\theta$$

в силу а) равномерно ограничено и равностепенно непрерывно и, следовательно, компактно. Поэтому из сходимости к 0 этого множества функций в каждой точке ограниченной области D следует равномерная сходимость к нулю на D. Таким образом, для произвольно малого $\eta > 0$ можно указать такое $\varepsilon > 0$, что при $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ имеем

$$\left| \int\limits_{t}^{t+\tau} [X(\theta, x, \lambda) - X(\theta, x, \lambda_0)]\, d\theta \right| < \eta \tag{10}$$

для всех $x \in D$

Подставляя (9) и (10) в (8), получим

$$\delta(t+\tau) \leqslant \delta(t)(1 + C\tau) + CM\tau^2 + \eta.$$

Пусть теперь $\sigma > 0$ произвольно малое число, $\sigma < \varrho$.

Разобьем интервал $(0, t)$ точками

$$\frac{1}{N}t,\ \frac{2}{N}t, \ldots, \frac{N-1}{N}t$$

на N интервалов длины $\frac{t}{N}$. Тогда

$$\delta\left(\frac{k+1}{N}t\right) \leqslant \delta\left(\frac{k}{N}t\right)\left(1 + \frac{Ct}{N}\right) + \eta + \frac{CMt^2}{N^2}$$

$$\leqslant \delta\left(\frac{k}{N}t\right) e^{\frac{Ct}{N}} + \eta + \frac{CMt^2}{N^2}.$$

Положим

$$\delta\left(\frac{k}{N}t\right) = e^{\frac{Ck}{N}t}\, \psi\left(\frac{kt}{N}\right),$$

тогда

$$\psi\left(\frac{k+1}{N}t\right) \leqslant \psi\left(\frac{k}{N}t\right) + e^{-\frac{C(k+1)t}{N}}\left(C\eta + \frac{CMt^2}{N^2}\right),$$

откуда

$$\psi(t) \quad \psi\left(\cancel{\frac{k+1}{N}}\, t\right) \leqslant \frac{CMt^2}{N} + \eta N.$$

Таким образом,

$$\delta(t) \leqslant e^{CT}\left(\frac{CMT^2}{N} + \eta N\right) < \sigma \tag{11}$$

при достаточно большом N и достаточно малом η.

В силу непрерывности функции $x(t) = x(t, \lambda)$ отсюда следует, что любой кусок траектории $[0, t]$ $(0 \leqslant t \leqslant t_0 \leqslant T)$, определяемой уравнением (7), лежит внутри ϱ-окрестности траектории $y(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ и тем самым внутри D и, следовательно, продолжаем на весь сегмент $[0, T]$, причем неравенство (11) имеет место

$$|x(t) - y(t)| < \sigma \qquad (0 \leqslant t \leqslant T).$$

Теорема доказана.

Замечания. 1. Теорема Боголюбова сводится к только что доказанной теореме, если в уравнениях (2) и (3) сделать замену

$$\frac{t}{\varepsilon} = \tau.$$

2. Теорема остается в силе, если диференциальное уравнение рассматривать в произвольном линейном пространстве типа B.

Доказательство остается дословно тем же, только в формулировке теоремы условие б) нужно усилить, предположить равномерную сходимость по x (в конечномерном случае, равномерная сходимость вытекала из остальных предположений теоремы).

Обобщению теоремы Боголюбова на диференциальные уравнения в гильбертовом пространстве была посвящена работа Ф. С. Лося ([3])

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Боголюбов, О некоторых статистических методах в математической физике, АН УССР (1945).

2. И. Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных диференциальных уравнений, ОГИЗ (1947).

3. Ф. С. Лось, О принципе усреднения для диференциальных уравнений в гильбертовом пространстве. Укр. матем. журнал, в. 3 (1950).

Получена 15 февраля 1951 г.

Киев