DOI: 10.37863/umzh.v73i8.6658

УДК 517.54

М. В. Ткачук, С. А. Плакса (Ін-т математики НАН України, Київ)

АНАЛОГ ТЕОРЕМИ МЕНЬШОВА – ТРОХИМЧУКА ДЛЯ МОНОГЕННИХ ФУНКЦІЙ У ТРИВИМІРНІЙ КОМУТАТИВНІЙ АЛГЕБРІ

The aim of this work is to weaken the conditions of monogeneity for functions that take values in a given three-dimensional commutative algebra over the field of complex numbers. The monogeneity of the function is understood as a combination of its continuity and the existence of the Gâteaux derivative.

Послаблено умови моногенності функцій зі значеннями в певній тривимірній комутативній алгебрі над полем комплексних чисел. Під моногенністю мається на увазі неперервність та існування похідної Гато.

1. Вступ. В алгебрі комплексних чисел $\mathbb{C}$ функція $F:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ називається моногенною в точці $\xi_0\in\mathbb{C}$, якщо існує скінченна границя

$$\lim_{\xi\to\xi_0}\frac{F(\xi)-F(\xi_0)}{\xi-\xi_0}. \tag{1}$$

При цьому границя (1) називається похідною функції F в точці ξ_0. Функція, яка є моногенною в усіх точках області $D\subset\mathbb{C}$, називається голоморфною в цій області (див. [1]).

Встановленню послаблених умов голоморфності функцій комплексної змінної присвячено роботи [2 – 18].

Наведемо одну з умов Меньшова, яку, зберігаючи позначення автора, називають умовою K''', а саме, кажуть, що *функція $F(\xi)$ задовольняє умову K''' в точці ξ_0, якщо існує границя* (1), *де ξ належить об'єднанню двох неколінеарних променів з початком у точці ξ_0.*

Д. Є. Меньшов [4 – 6] показав достатність виконання умови K''' в кожній точці області D (за винятком не більш ніж зчисленної їх кількості) для конформності відображення F у випадку, коли $F:D\to\mathbb{C}$ — неперервна однолиста функція. Ю. Ю. Трохимчук [9] зняв умову однолистості функції F, довівши при цьому таку теорему.

Теорема Меньшова – Трохимчука. *Якщо функція $F:D\to\mathbb{C}$ неперервна в області D і в кожній її точці, за винятком не більш ніж зчисленної їх кількості, виконується умова K''', то функція F голоморфна в області D.*

А. В. Бондар [19, 20] довів аналог цієї теореми для функцій, заданих у багатовимірному комплексному просторі $\mathbb{C}^n$. При цьому ним доведено, що для голоморфності функції достатньо неперервності цієї функції та існування і рівності похідної Фреше вздовж $2n$ спеціально вибраних напрямків. А. В. Бондар [20] і В. І. Сірик [21] довели також для функцій, заданих в $\mathbb{C}^n$, аналоги іншої теореми Меньшова – Трохимчука, в якій використовується певна умова збереження кутів. О. С. Грецький [22] узагальнив згадані результати А. В. Бондаря на відображення банахових просторів.

Метою даної роботи є послаблення умов моногенності для функцій, що набувають значень в одній із тривимірних комутативних алгебр над полем комплексних чисел. При цьому моногенність функції розуміється як поєднання її неперервності з існуванням похідної Гато.

2. Моногенні функції в тривимірній комутативній гармонічній алгебрі з двовимірним радикалом. Розглянемо тривимірну комутативну асоціативну банахову алгебру $\mathbb{A}_3$ з одиницею над полем $\mathbb{C}$, базисом якої є трійка $\left\{1, \rho, \rho^2\right\}$, при цьому виконується рівність $\rho^3 = 0$. Визначимо евклідову норму елемента алгебри рівністю

$$\left\|a + b\rho + c\rho^2\right\| := \sqrt{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2}, \quad a, b, c \in \mathbb{C}.$$

Алгебра $\mathbb{A}_3$ має єдиний максимальний ідеал $\mathcal{I} := \{\lambda_1\rho + \lambda_2\rho^2 : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}\}$, який є також її радикалом.

Оскільки ядром лінійного відображення $f : \mathbb{A}_3 \to \mathbb{C}$, що визначається рівністю

$$f\left(a + b\rho + c\rho^2\right) = a, \tag{2}$$

є максимальний ідеал $\mathcal{I}$, то f є неперервним мультиплікативним функціоналом (див. [23, с. 135]).

Зафіксуємо спочатку дійсний тривимірний підпростір

$$E_3 := \{\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 : x, y, z \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{A}_3,$$

де e_1, e_2, e_3 — лінійно незалежні вектори над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$, проте, взагалі кажучи, не утворюють базис алгебри $\mathbb{A}_3$. На вибір підпростору E_3 накладемо лише одну вимогу: образом E_3 при відображенні f є вся комплексна площина (див. [24, 25]).

Важливими з точки зору застосувань прикладами таких підпросторів є підпростори, побудовані на гармонічних базисах $\{e_1, e_2, e_3\}$ алгебри $\mathbb{A}_3$, що задовольняють рівність $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 0$ (див. [26, 27]). Існування гармонічних базисів у комутативній алгебрі є істотною передумовою побудови розв'язків тривимірного рівняння Лапласа у вигляді компонент розкладу диференційовних функцій за векторами базису (див. [26, 28, 29]).

Відомо, що існують різні типи диференційовності відображень в лінійних нормованих просторах. Насамперед, використовуються сильна диференційовність за Фреше і слабка диференційовність за Гато (див., наприклад, [23]), при цьому відповідні похідні Фреше і Гато визначаються як лінійні оператори. Для функції, заданої в області скінченновимірної комутативної асоціативної алгебри, Г. Шефферс [30] розглядав похідну, яка розуміється як функція, визначена в тій самій області. Узагальнюючи такий підхід на випадок довільної комутативної банахової алгебри, Е. Р. Лорх [31] увів сильну похідну функції, яка також розуміється як функція, визначена в тій же області, що і сама функція.

Функція $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_3$ називається *диференційовною за Лорхом* в області $\Omega \subset E_3$, якщо для кожної точки $\zeta \in \Omega$ існує елемент алгебри $\Phi'_L(\zeta) \in \mathbb{A}_3$ такий, що для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для всіх $h \in E_3$, для яких $\|h\| < \delta$, виконується нерівність

$$\left\|\Phi(\zeta + h) - \Phi(\zeta) - h\Phi'_L(\zeta)\right\| \le \|h\|\varepsilon. \tag{3}$$

Похідна Лорха $\Phi'_L(\zeta)$ є функцією змінної ζ, тобто $\Phi'_L : \Omega \to \mathbb{A}_3$. При цьому відображення $B_\zeta : E_3 \to \mathbb{A}_3$, задане рівністю $B_\zeta h = h\Phi'_L(\zeta)$, є обмеженим лінійним оператором.

Отже, функція Φ, диференційовна за Лорхом в області Ω, має похідну Фреше B_ζ в кожній точці $\zeta \in \Omega$. Обернене твердження загалом не є правильним (див. приклад у монографії [23, с. 116]).

Використовуючи диференціал Гато, І. П. Мельниченко [29] запропонував розглядати похідну Гато також як функцію, визначену в тій же області, що і сама функція.

Якщо для функції $\Phi\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{A}_3$, заданої в області $\Omega \subset E_3$, у кожній точці $\zeta \in \Omega$ існує елемент алгебри $\Phi'_G(\zeta) \in \mathbb{A}_3$ такий, що

$$\lim_{\delta\to 0+0} \left(\Phi(\zeta + \delta h) - \Phi(\zeta)\right)\delta^{-1} = h\Phi'_G(\zeta) \quad \forall h \in E_3, \tag{4}$$

то функцію $\Phi'_G\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{A}_3$ будемо називати *похідною Гато* функції Φ.

Очевидно, що з існування сильної похідної Лорха $\Phi'_L(\zeta)$ випливає існування слабкої похідної Гато $\Phi'_G(\zeta)$ і рівність $\Phi'_L(\zeta) = \Phi'_G(\zeta)$, проте з існування похідної Фреше B_ζ не випливає існування похідної $\Phi'_G(\zeta)$, що демонструє згаданий вище приклад з монографії [23, с. 116].

Розглянемо тепер поняття моногенної функції.

Функцію $\Phi\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{A}_3$ називаємо *моногенною* в області $\Omega \subset E_3$, якщо Φ є неперервною і має похідну Гато в кожній точці області Ω (див. [27, 32, 33]).

Хоча з існування похідної Гато $\Phi'_G(\zeta)$ не випливає існування похідної Лорха $\Phi'_L(\zeta)$, проте моногенні функції $\Phi\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{A}_3$ в області $\Omega \subset E_3$ є диференційовними за Лорхом у цій області. Це випливає із зображення моногенних функцій $\Phi(\zeta)$, $\zeta \in \Omega$, через голоморфні функції комплексної змінної $f(\zeta)$, встановленого в роботі [27].

У роботі [34] послабено одну з умов моногенності, а саме, показано, що за умови існування похідної Гато функції $\Phi\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{A}_3$ в усіх точках області $\Omega \subset E_3$ неперервність функції Φ можна замінити її локальною обмеженістю в області Ω.

3. Аналог теореми Меньшова – Трохимчука для моногенних функцій в областях простору $\boldsymbol{E_3}$. Введемо деякі позначення. Перетином радикала алгебри $\mathbb{A}_3$ з лінійним простором E_3 є множина необоротних елементів, що належать E_3. Цією множиною є деяка пряма $L := \{c\,l : c \in \mathbb{R}\}$, де через $l \in E_3$ позначено напрямний вектор прямої L. Прообразом довільної точки $\xi \in \mathbb{C}$ в E_3 при відображенні f є пряма $L^\zeta := \{\zeta + c\,l : c \in \mathbb{R}\}$, де ζ — деякий елемент із E_3 такий, що $\xi = f(\zeta)$. Очевидно, що пряма L^ζ паралельна прямій L.

Зазначимо, що тут і далі до об'єктів з E_3 застосовуються геометричні поняття (паралельність, опуклість в напрямку прямої тощо), які, строго кажучи, мають сенс по відношенню до конгруентних прообразів цих об'єктів у $\mathbb{R}^3$ при взаємно однозначній відповідності $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3$ між елементами $\zeta \in E_3$ і точками $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Нехай область $\Omega \subset E_3$ є опуклою в напрямку прямої L (область називається *опуклою в напрямку прямої*, якщо вона містить кожен відрізок, який з'єднує дві точки області і паралельний цій прямій). При цьому перетини області Ω з усіма прямими L^ζ, де $\zeta \in \Omega$, є зв'язними внаслідок опуклості області Ω в напрямку прямої L.

Розглянемо такий гіперкомплексний аналог умови Меньшова K''' в алгебрі $\mathbb{A}_3$ для функцій $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_3$, визначених в області $\Omega \subset E_3$.

Означення 1. *Будемо говорити, що функція $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_3$ задовольняє умову $K'''_{\mathbb{A}_3,E_3}$ в точці $\zeta \in \Omega$, якщо існує елемент $\Phi_*(\zeta) \in \mathbb{A}_3$ такий, що рівність*

$$\lim_{\delta\to 0+0} \left(\Phi(\zeta + \delta h) - \Phi(\zeta)\right)\delta^{-1} = h\Phi_*(\zeta) \tag{5}$$

виконується для трьох векторів h, а саме, векторів h_1, h_2 і $h_3 = l$ або $h_3 = -l$, що утворюють базис у просторі E_3.

Зауважимо, що у випадку, коли функція $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_3$ задовольняє умову $K'''_{\mathbb{A}_3,E_3}$ в різних точках області $\Omega \subset E_3$, набір векторів h_1, h_2, h_3 може бути різним у різних точках цієї області.

Лема 1. *Нехай область $\Omega \subset E_3$ є опуклою в напрямку прямої L і неперервна в Ω функція $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_3$ має вигляд $\Phi(\zeta) = \rho^2 \Phi_2(\zeta)$, де $\Phi_2(\zeta) \in \mathbb{C}$, і задовольняє умову $K'''_{\mathbb{A}_3,E_3}$ в усіх точках $\zeta \in \Omega$, крім не більш ніж зчисленної множини точок. Тоді $\Phi_2(\zeta) = F_2(f(\zeta))$, де $F_2 : D \to \mathbb{C}$ — голоморфна функція в області D, яка є образом області Ω при відображенні f.*

Доведення. Нехай $\zeta \in \Omega$ — довільна точка, в якій функція Φ задовольняє умову ${K'''}_{\mathbb{A}_3,E_3}$. Запишемо рівність (5) для функції $\Phi(\zeta) = \rho^2\, \Phi_2(\zeta)$:

$$\lim_{\delta \to 0+0} \rho^2 \left(\Phi_2(\zeta + \delta h) - \Phi_2(\zeta)\right) \delta^{-1} = h \Phi_*(\zeta) \tag{6}$$

і зазначимо, що вона виконується при $h \in \{h_1, h_2, h_3\}$.

Підставимо $h = h_1$ у рівність (6) і з урахуванням того, що h_1 є оборотним елементом алгебри $\mathbb{A}_3$, отримаємо

$$\Phi_*(\zeta) = \rho^2\, h_1^{-1} \lim_{\delta \to 0+0} \left(\Phi_2(\zeta + \delta h_1) - \Phi_2(\zeta)\right) \delta^{-1} =: \rho^2\, \Psi(\zeta). \tag{7}$$

Після підстановки виразу (7) для Φ_* у рівність (6) вона набере вигляду

$$\lim_{\delta \to 0+0} \rho^2 \left(\Phi_2(\zeta + \delta h) - \Phi_2(\zeta)\right) \delta^{-1} = h \rho^2 \Psi(\zeta). \tag{8}$$

Тепер після підстановки у (8) значення $h = h_3$ отримаємо нуль у правій частині рівності (8), оскільки $h_3 \in \mathcal{I}$. Звідси випливає, що звуження функції Φ_2 на перетин області Ω з прямою L^ζ в усіх точках, крім не більш ніж зчисленної множини точок цього перетину, має рівну нулю одну з односторонніх (взагалі кажучи, різних у різних точках) похідних уздовж прямої L^ζ. При цьому перетин області Ω з прямою L^ζ є зв'язним внаслідок опуклості області Ω в напрямку прямої L. Тоді за теоремою 9 з монографії [10, с. 103] функція Φ_2 є сталою на перетині області Ω з прямою L^ζ. Звідси випливає, що функцію Φ_2 можна записати у вигляді $\Phi_2(\zeta) = F_2(f(\zeta))$, де $F_2 : D \to \mathbb{C}$ — деяка неперервна в області D функція.

Доведемо, що функція F_2 голоморфна в області D.

Спочатку зауважимо, що наслідком означення (2) функціонала f є рівність

$$\rho^2\, h \Psi(\zeta) = \rho^2\, f(h) f(\Psi(\zeta)).$$

Тому, позначаючи $\xi := f(\zeta)$, записуємо рівність (8) у вигляді

$$\rho^2 \lim_{\delta \to 0+0} \left(F_2(\xi + \delta f(h)) - F_2(\xi)\right) \delta^{-1} = \rho^2\, f(h) f(\Psi(\zeta)). \tag{9}$$

Оскільки вирази біля ρ^2 в обох частинах рівності (9) набувають комплексних значень, то з єдиності розкладу елемента алгебри за базисом випливає рівність

$$\lim_{\delta \to 0+0} \left(F_2(\xi + \delta f(h)) - F_2(\xi)\right) \delta^{-1} = f(h) f(\Psi(\zeta)),$$

яка виконується при $h \in \{h_1, h_2\}$. Звідси випливають рівності

$$f(\Psi(\zeta)) = \lim_{\delta \to 0+0} \left(F_2(\xi + \delta t_1) - F_2(\xi)\right) (\delta t_1)^{-1} = \lim_{\delta \to 0+0} \left(F_2(\xi + \delta t_2) - F_2(\xi)\right) (\delta t_2)^{-1},$$

де $t_1 := f(h_1)$, $t_2 := f(h_2)$.

Отже, в кожній точці ξ області D, за винятком не більш ніж зчисленної їх кількості, існують похідні функції F_2 вздовж двох неколінеарних променів із початком у точці ξ і ці похідні рівні. Це означає, що неперервна функція F_2 задовольняє умову Меньшова K''' у точці ξ. Тоді з теореми Меньшова – Трохимчука випливає голоморфність функції F_2 в області D.

Лему 1 доведено.

Кожен елемент $a + b\rho + c\rho^2,\ a, b, c \in \mathbb{C}$, за умови $a \neq 0$ має обернений елемент, розклад якого за базисом $\{1, \rho, \rho^2\}$ визначається рівністю

$$\left(a + b\rho + c\rho^2\right)^{-1} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2}\,\rho + \left(\frac{b^2}{a^3} - \frac{c}{a^2}\right)\rho^2.$$

Тоді

$$\left(t - a - b\rho - c\rho^2\right)^{-1} = \frac{1}{t-a} + \frac{b}{(t-a)^2}\,\rho + \left(\frac{c}{(t-a)^2} + \frac{b^2}{(t-a)^3}\right)\rho^2. \tag{10}$$

Використовуючи цей розклад, легко записати розклад за базисом $\{1, \rho, \rho^2\}$ головного продовження голоморфної функції $F : D \to \mathbb{C}$ в область $\Pi := \{\zeta \in E_3 : f(\zeta) \in D\}$, яка, очевидно, є нескінченним циліндром, твірні якого паралельні прямій L:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} F(t)(t-\zeta)^{-1}\,dt = F(f(\zeta)) + (b_1x + b_2y + b_3z)F'(f(\zeta))\,\rho +$$

$$+\left((c_1x + c_2y + c_3z)F'(f(\zeta)) + \frac{(b_1x + b_2y + b_3z)^2}{2}F''(f(\zeta))\right)\rho^2 \tag{11}$$

$$\forall\, \zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \Pi,$$

де i — уявна комплексна одиниця, замкнена жорданова спрямлювана крива γ лежить в області D і охоплює точку $f(\zeta) = a_1x + a_2y + a_3z$, а комплексні сталі $a_k,\ b_k,\ c_k$ при $k = 1, 2, 3$ — це коефіцієнти з розкладів елементів $e_1,\ e_2,\ e_3$ за базисом $\{1, \rho, \rho^2\}$:

$$e_1 = a_1 + b_1\rho + c_1\rho^2,$$

$$e_2 = a_2 + b_2\rho + c_2\rho^2,$$

$$e_3 = a_3 + b_3\rho + c_3\rho^2.$$

Розклад (11) узагальнює аналогічний розклад, отриманий в теоремі 1.7 з [26] при додатковому припущенні, що $e_1 = 1$.

Лема 2. *Нехай область $\Omega \subset E_3$ є опуклою в напрямку прямої L, функція $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_3$ є неперервною в Ω і задовольняє умову $K'''_{\mathbb{A}_3, E_3}$ в усіх точках $\zeta \in \Omega$, крім не більш ніж зчисленної множини точок. Тоді при всіх $\zeta \in \Omega$ має місце зображення*

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\left(F_0(\xi) + F_1(\xi)\rho + F_2(\xi)\,\rho^2\right)(\xi - \zeta)^{-1}\,d\xi, \tag{12}$$

де $F_0,\ F_1,\ F_2$ — деякі функції, голоморфні в області D, яка є образом області Ω при відображенні f.

Доведення. При $\zeta \in \Omega$ розглянемо розклад $\Phi(\zeta)$ за базисом $\{1, \rho, \rho^2\}$:

$$\Phi(\zeta) = \Phi_0(\zeta) + \Phi_1(\zeta)\rho + \Phi_2(\zeta)\rho^2.$$

Функція $\rho^2\Phi(\zeta) = \rho^2\Phi_0(\zeta)$ є неперервною в Ω і задовольняє умову $K'''_{\mathbb{A}_3,E_3}$ в усіх точках $\zeta \in \Omega$, крім не більш ніж зчисленної множини точок. Тоді з леми 1 випливає, що $\Phi_0(\zeta) = F_0(f(\zeta))$, де F_0 — голоморфна функція в області D, яка є образом області Ω при відображенні f.

Як випливає з рівності (11), перші компоненти в розкладах за базисом $\{1, \rho, \rho^2\}$ функцій $\Phi(\zeta)$ і $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma F_0(\xi)(\xi-\zeta)^{-1}\,d\xi$ збігаються в області Ω. Тому справджується рівність

$$\Phi(\zeta) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma F_0(\xi)(\xi-\zeta)^{-1}\,d\xi = \Phi_{11}(\zeta)\,\rho + \Phi_{12}(\zeta)\,\rho^2 \quad \forall \zeta \in \Omega, \tag{13}$$

де Φ_{11}, Φ_{12} — деякі комплекснозначні неперервні в Ω функції.

Тоді функція $\rho\left(\Phi_{11}(\zeta)\rho + \Phi_{12}(\zeta)\rho^2\right) = \rho^2\Phi_{11}(\zeta)$ є неперервною в Ω і задовольняє умову $K'''_{\mathbb{A}_3,E_3}$ в усіх точках $\zeta \in \Omega$, крім не більш ніж зчисленної множини точок.

Отже, за лемою 1 маємо $\Phi_{11}(\zeta) = F_1(f(\zeta))$, де F_1 — голоморфна функція в області D.

Далі, як і при доведенні рівності (13), отримуємо

$$\Phi_{11}(\zeta)\,\rho + \Phi_{12}(\zeta)\,\rho^2 - \rho\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma F_1(\xi)(\xi-\zeta)^{-1}\,d\xi = \Phi_{22}(\zeta)\,\rho^2 \quad \forall \zeta \in \Omega, \tag{14}$$

де Φ_{22} — деяка комплекснозначна неперервна в Ω функція.

Як наслідок рівностей (13), (14) маємо рівність

$$\Phi(\zeta) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma F_0(\xi)(\xi-\zeta)^{-1}\,d\xi - \rho\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma F_1(\xi)(\xi-\zeta)^{-1}\,d\xi = \Phi_{22}(\zeta)\rho^2 \quad \forall \zeta \in \Omega. \tag{15}$$

Тепер, з огляду на лему 1, приходимо до рівності $\Phi_{22}(\zeta) = F_2(f(\zeta))$, де F_2 — голоморфна функція в області D. Тому справедливими є також рівності

$$\rho^2\,\Phi_{22}(\zeta) = \rho^2\,F_2(f(\zeta)) = \rho^2\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma F_2(\xi)(\xi-\zeta)^{-1}\,d\xi \quad \forall \zeta \in \Omega. \tag{16}$$

Нарешті, як наслідок рівностей (15), (16), отримуємо зображення (12).

Лему 2 доведено.

Основним результатом пункту 3 є таке твердження.

Теорема 1. *Нехай область* $\Omega \subset E_3$ *є опуклою в напрямку прямої* L, *функція* $\Phi: \Omega \to \mathbb{A}_3$ *є неперервною в* Ω *і задовольняє умову* $K'''_{\mathbb{A}_3,E_3}$ *в усіх точках* $\zeta \in \Omega$, *крім не більш ніж зчисленної множини точок. Тоді:*

1) *функція* Φ *є моногенною в області* Ω;

2) *функція* Φ *продовжується до функції, моногенної в області* Π; *таке продовження єдине і задається рівністю* (12) *при всіх* $\zeta \in \Pi$;

3) *моногенне продовження* (12) *функції* Φ *є диференційовним за Лорхом в області* Π.

Усі твердження теореми 1 є очевидними наслідками зображення (12).

4. Узагальнення на інші розмірності області визначення функцій. Узагальнимо отримані результати на дійсний підпростір E_k алгебри $\mathbb{A}_3$ довільної розмірності $2 \le k \le 6$, на вибір якого накладемо лише одну вимогу: образом E_k при відображенні f є вся комплексна площина.

Для цього сформулюємо аналог умови Меньшова K''' для функцій $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_3$, визначених в області $\Omega \subset E_k$. Зазначимо, що перетином простору E_k з радикалом $\mathcal{I}$ алгебри $\mathbb{A}_3$ є площина розмірності $k-2$, яку позначимо L_{E_k}. Зокрема, L_{E_3} — це пряма L, визначена в п. 3, і $L_{E_2} = \{0\}$.

Означення 2. *Будемо говорити, що функція $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_3$ задовольняє умову $K'''_{\mathbb{A}_3,E_k}$ в точці $\zeta \in \Omega \subset E_k$, якщо існує елемент $\Phi_*(\zeta) \in \mathbb{A}_3$ такий, що рівність* (5) *виконується для k різних векторів, а саме, двох векторів $h_1,\ h_2$, що мають неколінеарні образи при відображенні f, і $k-2$ векторів $h_3, \ldots, h_k$, що утворюють базис у просторі L_{E_k}.*

Зауважимо, що у випадку, коли функція $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_3$ задовольняє умову $K'''_{\mathbb{A}_3,E_k}$ в різних точках області $\Omega \subset E_k$, набір векторів $h_1, h_2, \ldots, h_k$ може бути різним у різних точках цієї області.

Наступне твердження є узагальненням леми 1.

Лема 3. *Нехай область $\Omega \subset E_k$ має зв'язні перетини площинами $L^{\zeta}_{E_k} := \{\zeta + \tau : \tau \in L_{E_k}\}$, де $\zeta \in \Omega$, паралельними площині L_{E_k}, і неперервна в Ω функція $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_3$ має вигляд $\Phi(\zeta) = \rho^2 \Phi_2(\zeta)$, де $\Phi_2(\zeta) \in \mathbb{C}$, і задовольняє умову $K'''_{\mathbb{A}_3,E_k}$ в усіх точках $\zeta \in \Omega$, крім не більш ніж зчисленної множини точок. Тоді $\Phi_2(\zeta) = F_2(f(\zeta))$, де $F_2 : D \to \mathbb{C}$ — голоморфна функція в області D, яка є образом області Ω при відображенні f.*

Доведення. Нехай $\zeta \in \Omega$ — довільна точка, в якій функція Φ задовольняє умову $K'''_{\mathbb{A}_3,E_k}$. Як і при доведенні леми 1, отримуємо рівність (8), яка виконується при $h \in \{h_1, h_2, \ldots, h_k\}$. Тепер при підстановці в рівність (8) значень $h = h_3, \ldots, h_k$ отримуємо нуль у правій частині цієї рівності.

Звідси випливає, що похідні функції Φ_2 вздовж напрямків $h_3, \ldots, h_k$ (які, взагалі кажучи, є різними в різних точках) дорівнюють нулю скрізь на множині $L^{\zeta}_{E_k} \cap \Omega$, крім не більш ніж зчисленної множини точок. При цьому множина $L^{\zeta}_{E_k} \cap \Omega$ є зв'язною. Тоді за теоремою 9 з монографії [10, с. 103] функція Φ_2 є сталою на множині $L^{\zeta}_{E_k} \cap \Omega$.

Звідси випливає, що функцію Φ_2 можна зобразити у вигляді $\Phi_2(\zeta) = F_2(f(\zeta))$, де $F_2 : D \to \mathbb{C}$ — деяка неперервна в області D функція.

Доведення голоморфності функції F_2 в області D аналогічне доведенню голоморфності функції F_2 в лемі 1.

Лему 3 доведено.

Зауважимо, що у випадку $k = 2$ в лемі 3 виконується рівність $L^{\zeta}_{E_2} = \{\zeta\}$, і тому умова про зв'язність перетинів $L^{\zeta}_{E_2} \cap \Omega$ при $\zeta \in \Omega$, очевидно, виконується автоматично.

Наступне твердження є узагальненням теореми 1 на випадок функцій, визначених в областях дійсного підпростору E_k алгебри $\mathbb{A}_3$ довільної розмірності $2 \le k \le 6$.

Теорема 2. *Нехай область $\Omega \subset E_k$ має зв'язні перетини площинами $L^{\zeta}_{E_k}$, де $\zeta \in \Omega$, паралельними площині L_{E_k}, і неперервна в Ω функція $\Phi : \Omega \to \mathbb{A}_3$ задовольняє умову $K'''_{\mathbb{A}_3,E_k}$ в усіх точках $\zeta \in \Omega$, крім не більш ніж зчисленної множини точок. Тоді:*

1) *функція Φ є моногенною в області Ω;*

2) *функція Φ продовжується до функції, моногенної в області $\Pi := \{\zeta \in E_k : f(\zeta) \in D\}$; таке продовження єдине і задається рівністю* (12) *при всіх $\zeta \in \Pi$;*

3) *моногенне продовження* (12) *функції* Φ *є диференційовним за Лорхом в області* Π.

Доведення. Використовуючи рівність (10), отримуємо розклад за базисом $\{1, \rho, \rho^2\}$ головного продовження довільної голоморфної функції $F : D \to \mathbb{C}$ в область Π:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} F(t)(t-\zeta)^{-1}\,dt = F(f(\zeta)) + (b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_kx_k)F'(f(\zeta))\,\rho +$$

$$+\left((c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_kx_k)F'(f(\zeta)) + \frac{(b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_kx_k)^2}{2}\,F''(f(\zeta))\right)\rho^2$$

$$\forall\,\zeta = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ke_k \in \Pi,$$

де замкнена жорданова спрямлювана крива γ лежить в області D і охоплює точку $f(\zeta) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_kx_k$, а комплексні сталі $a_j,\ b_j,\ c_j$ при $j = 1, 2, \ldots, k$ — це коефіцієнти з розкладів елементів $e_1, e_2, \ldots, e_k$ за базисом $\{1, \rho, \rho^2\}$:

$$e_1 = a_1 + b_1\rho + c_1\rho^2,$$
$$e_2 = a_2 + b_2\rho + c_2\rho^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$e_k = a_k + b_k\rho + c_k\rho^2.$$

Тоді, спираючись на лему 3, як і при доведенні леми 2, отримуємо інтегральне зображення (12) функції Φ, з якого випливають усі твердження теореми 2.

Теорему 2 доведено.

Частину результатів роботи анонсовано в препринті [35].

Література

1. E. Goursat, *Cours d'analyse mathematique*, vol. 2, Gauthier-Villars, Paris (1910).
2. H. Bohr, *Über streckentreue und konforme Abbildung*, Math. Z., **1**, 403 – 420 (1918).
3. H. Rademacher, *Über streckentreue und winkeltreue Abbildung*, Math. Z., **4**, 131 – 138 (1919).
4. D. Menchov, *Sur les differentielles totales des fonctions univalentes*, Math. Ann., **105**, 75 – 85 (1931).
5. D. Menchov, *Sur les fonctions monogenes*, Bull. Soc. Math. France, **59**, 141 – 182 (1931).
6. D. Menchov, *Les conditions de monogeneite*, Act. Sci. Ind., № 329 (1936).
7. В. С. Федоров, *О моногенных функциях*, Мат. сб., **42**, № 4, 485 – 500 (1935).
8. Г. П. Толстов, *О криволинейном и повторном интеграле*, Тр. Мат. ин-та АН СССР, **35**, 3 – 101 (1950).
9. Ю. Ю. Трохимчук, *Непрерывные отображения и условия моногенности*, Физматиз, Москва (1963).
10. Ю. Ю. Трохимчук, *Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности*, Праці Ін-т математики НАН України, **70** (2007).
11. Г. Х. Синдаловский, *О дифференцируемости и аналитичности однолистных отображений*, Докл. АН СССР, **249**, № 6, 1325 – 1327 (1979).
12. Г. Х. Синдаловский, *Об условиях Коши – Римана в классе функций с суммируемым модулем и некоторых граничных свойствах аналитических функций*, Мат. сб., **128(170)**, № 3(11), 364 – 382 (1985).
13. Д. С. Теляковский, *Обобщение одной теоремы Меньшова о моногенных функциях*, Изв. АН СССР, сер. мат., **53**, № 4, 886 – 896 (1989).
14. Д. С. Теляковский, *О голоморфности функций, которые задают отображения, сохраняющие углы*, Мат. заметки, **56**, № 5, 149 – 154 (1994).
15. Д. С. Теляковский, *Об ослаблении условия асимптотической моногенности*, Мат. заметки, **60**, № 6, 902 – 911 (1996).

16. Д. С. Теляковский, *Обобщение теоремы Меньшова о функциях, удовлетворяющих условию K''*, Мат. заметки, **76**, № 4, 578 – 591 (2004).
17. Е. П. Долженко, *Работы Д. Е. Меньшова по теории аналитических функций и современное состояние теории моногенности*, Успехи мат. наук, **47**, № 5, 67 – 96 (1992).
18. М. Т. Бродович, *Об отображениях пространственной области, сохраняющих углы и растяжения вдоль системы лучей*, Сиб. мат. журн., **38**, № 2, 260 – 262 (1997).
19. А. В. Бондарь, *Многомерное обобщение одной теоремы Д. Е. Меньшова*, Укр. мат. журн., **30**, № 4, 435 – 443 (1978).
20. А. В. Бондарь, *Локальные геометрические характеристики голоморфных отображений*, Наук. думка, Киев (1992).
21. В. И. Сирык, *Некоторые критерии голоморфности непрерывных отображений*, Укр. мат. журн., **37**, № 6, 751 – 756 (1985).
22. О. С. Грецький, *Про $\mathbb{C}$-диференційовність відображень банахових просторів*, Укр. мат. журн., **46**, № 10, 1336 – 1342 (1994).
23. E. Hille, R. S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups*, Amer. Math. Soc., Providence, R. I. (1957).
24. S. A. Plaksa, R. P. Pukhtaievych, *Monogenic functions in a finite-dimensional semi-simple commutative algebra*, An. Ştiinţ. Univ. “Ovidius” Constanţa, Ser. Mat., **22**, № 1, 221 – 235 (2014).
25. V. Shpakivskyi, *Constructive description of monogenic functions in a finite-dimensional commutative associative algebra*, Adv. Pure and Appl. Math., **7**, № 1, 63 – 75 (2016).
26. И. П. Мельниченко, С. А. Плакса, *Коммутативные алгебры и пространственные поля*, Праці Ін-т математики НАН України, **71** (2008).
27. S. A. Plaksa, V. S. Shpakovskii, *Constructive description of monogenic functions in a harmonic algebra of the third rank*, Ukr. Math. J., **62**, № 8, 1251 – 1266 (2011).
28. P. W. Ketchum, *Analytic functions of hypercomplex variables*, Trans. Amer. Math. Soc., **30**, 641 – 667 (1928).
29. I. P. Mel’nichenko, *The representation of harmonic mappings by monogenic functions*, Ukr. Math. J., **27**, № 5, 499 – 505 (1975).
30. G. Scheffers, *Verallgemeinerung der Grundlagen der gewöhnlich complexen Funktionen, I, II*, Ber. Verh. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig Math.-Phys. Kl., **45**, 828 – 848 (1893); **46**, 120 – 134 (1894).
31. E. R. Lorch, *The theory of analytic function in normed abelian vector rings*, Trans. Amer. Math. Soc., **54**, 414 – 425 (1943).
32. S. A. Plaksa, *Commutative algebras associated with classic equations of mathematical physics*, Adv. Appl. Anal., Trends Math., 177 – 223 (2012).
33. S. A. Plaksa, *Monogenic functions in commutative algebras associated with classical equations of mathematical physics*, J. Math. Sci., **242**, № 3, 432 – 456 (2019).
34. S. A. Plaksa, *On differentiable and monogenic functions in a harmonic algebra*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **14**, № 1, 210 – 221 (2017).
35. М. В. Ткачук, С. А. Плакса, *Аналог теореми Меньшова – Трохимчука для моногенних функцій в тривимірній комутативній алгебрі*, e-print: arXiv:2006.12492v1 [math.CA], 2020.

Одержано 02.04.21