DOI: 10.37863/umzh.v74i10.6673

УДК 512.542

В. С. Монахов (Гомел. ун-т ім. Ф. Скорини, Білорусь),
О. О. Трофімук[1] (Брест. держ. ун-т ім. О. С. Пушкіна, Білорусь)

СКІНЧЕННІ ГРУПИ, ФАКТОРИЗОВНІ $\mathbb{T}X$-СУБНОРМАЛЬНИМИ ПІДГРУПАМИ

Let $\mathbb{T}$ be a subset of the set of all natural numbers satisfying the condition

$$\text{if } t \in \mathbb{T}, \text{ then } \mathbb{T} \text{ contains all natural divisors of } t. \tag{A}$$

Recall that a subgroup H is called a $\mathbb{T}$-*subnormal* in G if either $H = G$, or there is a chain of subgroups $H = H_0 \leq \leq H_1 \leq \ldots \leq H_n = G$ such that $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{T}$ for all i. Let X be a normal subgroup of a group G and let $\mathbb{T}$ be a set of natural numbers satisfying condition (A). We introduce the following definition: A subgroup H of the group G is called a $\mathbb{T}X$-*subnormal* subgroup if H is $\mathbb{T}$-subnormal in HX. Moreover, we study factorizable groups $G = AB$ with $\mathbb{T}X$-subnormal factors A and B. Under certain additional restrictions imposed on A, B, $\mathbb{T}$, and X, we obtain new sufficient conditions for the partial solubility and supersolubility of the analyzed groups G.

Нехай $\mathbb{T}$ — деяка підмножина множини натуральних чисел, що задовольняє умову

$$\text{якщо } t \in \mathbb{T}, \text{ то } \mathbb{T} \text{ містить усі натуральні дільники числа } t. \tag{A}$$

Нагадаємо, що підгрупа H називається $\mathbb{T}$-*субнормальною підгрупою* групи G, якщо або $H = G$, або існує ланцюжок підгруп $H = H_0 \leq H_1 \leq \ldots \leq H_n = G$ такий, що $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{T}$ для всіх i. Нехай X — нормальна підгрупа групи G і $\mathbb{T}$ — деяка множина натуральних чисел, що задовольняє умову (A). У цій роботі введено таке означення: підгрупа H групи G називається $\mathbb{T}X$-*субнормальною* підгрупою, якщо H $\mathbb{T}$-субнормальна в HX. Крім того, вивчається факторизовна група $G = AB$ з $\mathbb{T}X$-субнормальними співмножниками A і B. За додаткових обмежень на A, B, $\mathbb{T}$ і X отримано нові ознаки часткової розв'язності та надрозв'язності групи G.

Вступ. Будемо розглядати лише скінченні групи. Термінологія, що використовується, відповідає [1]. Запис $Y \leq X$ означає, що Y — підгрупа групи X. Нехай $\mathbb{N}$ і $\mathbb{P}$ — множини всіх натуральних і всіх простих чисел відповідно. Скрізь у цій статті будемо вважати, що $\mathbb{T}$ — підмножина множини $\mathbb{N}$, яка задовольняє умову

$$\textit{якщо } t \in \mathbb{T}, \textit{ то } \mathbb{T} \textit{ містить усі натуральні дільники числа } t. \tag{1}$$

Підгрупа H називається $\mathbb{T}$-*субнормальною підгрупою* групи G, якщо або $H = G$, або існує ланцюжок підгруп

$$H = H_0 \leq H_1 \leq \ldots \leq H_n = G$$

такий, що $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{T}$ для всіх i. Цей ланцюжок підгруп називають $\mathbb{T}$-субнормальним і використовують позначення $H\,\mathbb{T}\mathrm{sn}\,G$. При $\mathbb{T} = \mathbb{P}$ одержуємо поняття $\mathbb{P}$-субнормальності, вперше введене у [2].

Вивченню груп, у яких деякі підгрупи (холлові підгрупи, примарні циклічні підгрупи, нормалізатори силовських підгруп, 2-максимальні підгрупи) $\mathbb{T}$-субнормальні, а також груп, які факторизуються двома $\mathbb{T}$-субнормальними підгрупами, присвячено роботи [2–9].

[1] Відповідальний за листування, e-mail: alexander.trofimuk@gmail.com.

У роботі [10] введено таке означення: підгрупа H групи G називається $F(G)$-*субнормальною* підгрупою, якщо H субнормальна в $HF(G)$. Тут $F(G)$ — підгрупа Фіттінга групи G. Зауважимо, що будь-яка підгрупа, що містить $F(G)$, є $F(G)$-субнормальною. Кожна субнормальна підгрупа групи G також $F(G)$-субнормальна. Зворотне не є правильним, у будь-якій простій неабелевій групі G кожна нетривіальна підгрупа $F(G)$-субнормальна, але не субнормальна. Групи, що факторизуються $F(G)$-субнормальними підгрупами, вивчалися в низці робіт (див. бібліографію в [10, 11]).

Уведемо таке означення, що розвиває наведені вище конструкції.

Означення. *Нехай X — нормальна підгрупа групи G і $\mathbb{T}$ — деяка множина натуральних чисел, що задовольняє умову* (1). *Підгрупа H групи G називається $\mathbb{T}X$-субнормальною підгрупою, якщо H $\mathbb{T}$-субнормальна в HX.*

Кожна $\mathbb{T}$-субнормальна підгрупа буде $\mathbb{T}X$-субнормальною для будь-якої нормальної в групі G підгрупи X (див. лему 6, п. 6).

Приклад. У групі $G = E_{7^2} \rtimes SL(2,3)$ $(\mathrm{IdGroup} = [1176, 214])$ [12] підгрупа $H = Z_3$, вибрана з максимальної підгрупи $SL(2,3)$, $\mathbb{P}$-субнормальна в надрозв'язній підгрупі $HF(G) = Z_7 \times (Z_7 \rtimes Z_3)$, але не $\mathbb{P}$-субнормальна в G.

Цей приклад показує, що $\mathbb{T}X$-субнормальна підгрупа може бути не $\mathbb{T}$-субнормальною.

У цій роботі вивчається факторизовна група $G = AB$ з $\mathbb{T}X$-субнормальними співмножниками A і B. За додаткових обмежень на A, B, $\mathbb{T}$ і X отримано нові ознаки часткової розв'язності та надрозв'язності групи G.

1. Допоміжні результати. Через G', $Z(G)$, $F(G)$ і $\Phi(G)$ позначимо комутант, центр, підгрупи Фіттінга і Фраттіні групи G відповідно; $O_p(G)$ і $O_{p'}(G)$ — найбільші нормальні в G p- і p'-підгрупи відповідно; $\pi(G)$ — множина всіх простих дільників порядку групи G. Елементарну абелеву групу порядку p^t і циклічну групу порядку m позначимо E_{p^t} і Z_m відповідно, а $A \rtimes B$ — напівпрямий добуток нормальної підгрупи A і підгрупи B.

Нехай $\mathfrak{F}$ — формація, G — група. Перетин усіх нормальних підгруп групи G, фактор-групи за якими належать $\mathfrak{F}$, позначимо через $G^{\mathfrak{F}}$ і назвемо $\mathfrak{F}$-корадикалом групи G. Формації всіх розв'язних, p-розв'язних і надрозв'язних груп позначимо через $\mathfrak{S}$, $p\mathfrak{S}$ і $\mathfrak{U}$ відповідно.

Групу G називаємо примітивною, якщо в G існує максимальна підгрупа M із одиничним ядром $\mathrm{Core}_G M = \cap_{x\in G} M^x = 1$. У цьому випадку підгрупу M називаємо примітиватором групи G.

Лема 1. *Нехай $\mathfrak{F}$ — насичена формація і G — група. Припустимо, що $G \notin \mathfrak{F}$, але $G/N \in \mathfrak{F}$ для всіх $N \lhd G$, $N \neq 1$. Тоді G — примітивна група.*

Лема 2 ([1], теореми 4.40 – 4.42)**.** *Нехай G — розв'язна неодинична примітивна група з примітиватором M. Тоді справедливі такі твердження*:

1) $\Phi(G) = 1$;

2) $F(G) = C_G(F(G)) = O_p(G)$ *і* $F(G)$ *— елементарна абелева підгрупа порядку p^n для деякого простого p і натурального n*;

3) *G має єдину мінімальну нормальну підгрупу, яка збігається з $F(G)$*;

4) $G = F(G) \rtimes M$ *і* $O_p(M) = 1$.

Лема 3 ([13], лема 4)**.** *Нехай G — p-надрозв'язна група, P — силовська p-підгрупа в G, H — p'-холлова підгрупа в G. Якщо $O_{p'}(G) = 1$, то*:

1) *підгрупа P нормальна в G і $F(G) = P$*;

2) *якщо* $\Phi(G) = 1$, *то* $P = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_t$, *де* P_i — *нормальна в* G *підгрупа простого порядку для кожного* i; *зокрема*, *підгрупа* P *елементарна абелева*;

3) *підгрупа* H *абелева експоненти*, *що ділить* $p-1$;

4) *група* G *надрозв'язна*.

Лема 4. *Нехай* $\mathfrak{F}$ *і* $\mathfrak{H}$ — *формації*, G — *група і* $S = G^{\mathfrak{S}}$. *Тоді справедливі такі твердження*:

1) *якщо* $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, *то* $G^{\mathfrak{F}} \leq G^{\mathfrak{H}}$;

2) *якщо* $Y \leq X \leq G$ *і* $\mathfrak{F}$ — *спадкова формація*, *то* $Y^{\mathfrak{F}} \leq X^{\mathfrak{F}}$;

3) $(S)^{\mathfrak{S}} = S$; *зокрема*, $S' = S^{\mathfrak{N}} = S^{\mathfrak{U}} = S$;

4) *якщо* $H \leq G$, *то* $(HS)^{\mathfrak{S}} = S$.

Доведення. 1. Оскільки $G/G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{F}} \leq G^{\mathfrak{H}}$.

2. Оскільки $X^{\mathfrak{F}}$ нормальна в X, то $YX^{\mathfrak{F}}$ — підгрупа групи X, і

$$Y/Y \cap X^{\mathfrak{F}} \simeq YX^{\mathfrak{F}}/X^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F},$$

тому що $\mathfrak{F}$ — спадкова формація. Отже,

$$Y^{\mathfrak{F}} \leq Y \cap X^{\mathfrak{F}} \leq X^{\mathfrak{F}}.$$

3. За п. 2 $(S)^{\mathfrak{S}} \leq G^{\mathfrak{S}} = S$. Оскільки $S/S^{\mathfrak{S}} \in \mathfrak{S}$ і

$$(G/S^{\mathfrak{S}})/(S/S^{\mathfrak{S}}) \simeq G/S \in \mathfrak{S},$$

то $G/S^{\mathfrak{S}} \in \mathfrak{S}$. Тому $S \leq S^{\mathfrak{S}}$ і $(S)^{\mathfrak{S}} = S$.

Оскільки $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{N} \subset \mathfrak{U} \subset \mathfrak{S}$, то за п. 1

$$S = S \leq S^{\mathfrak{U}} \leq S^{\mathfrak{N}} \leq S' \leq S.$$

4. За п. 2 $(HS)^{\mathfrak{S}} \leq G^{\mathfrak{S}} = S$ і $S^{\mathfrak{S}} \leq (HS)^{\mathfrak{S}}$. Оскільки за п. 3 $S^{\mathfrak{S}} = S$, то $(HS)^{\mathfrak{S}} = S$.

Лема 5. *Нехай* G — *група і* $S = G^{p\mathfrak{S}}$. *Тоді справедливі такі твердження*:

1) $(S)^{p\mathfrak{S}} = S$; *зокрема*, $S' = S^{\mathfrak{N}} = S^{\mathfrak{U}} = S$;

2) *якщо* $H \leq G$, *то* $(HS)^{p\mathfrak{S}} = S$.

Доведення. Обидва твердження перевіряються, як і в пп. 3, 4 леми 4.

Лема 6. *Нехай* H — *підгрупа групи* G, N — *нормальна в* G *підгрупа*, $\mathbb{T}$ *і* $\mathbb{S}$ — *множини натуральних чисел*, *що задовольняють умову* (1), *такі*, *що* $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{S}$. *Тоді справедливі такі твердження*:

1) *якщо* $N \leq H$ *і* H/N $\mathbb{T}\mathrm{sn}$ G/N, *то* H $\mathbb{T}\mathrm{sn}$ G;

2) *якщо* H $\mathbb{T}\mathrm{sn}$ G, *то* $(H \cap N)$ $\mathbb{T}\mathrm{sn}$ N, HN/N $\mathbb{T}\mathrm{sn}$ G/N *і* HN $\mathbb{T}\mathrm{sn}$ G;

3) *якщо* $H \leq K \leq G$, H $\mathbb{T}\mathrm{sn}$ K, K $\mathbb{T}\mathrm{sn}$ G, *то* H $\mathbb{T}\mathrm{sn}$ G;

4) *якщо* H $\mathbb{T}\mathrm{sn}$ G, *то* H^g $\mathbb{T}\mathrm{sn}$ G *для будь-якого* $g \in G$;

5) *якщо* H $\mathbb{T}\mathrm{sn}$ G, *то* H $\mathbb{S}\mathrm{sn}$ G;

6) *якщо* H $\mathbb{T}\mathrm{sn}$ G, *то* H $\mathbb{T}\mathrm{sn}$ HN.

Доведення. Твердження 1 – 4 відомі [4] (лема 1). Твердження 5 випливає з означення. Доведемо твердження 6. Оскільки H $\mathbb{T}$-субнормальна в G, то існує ланцюжок

$$H < H_1 < \ldots < H_j < H_{j+1} < \ldots < H_n = G, \quad |H_{j+1} : H_j| \in \mathbb{T}.$$

Розглянемо такий ланцюжок:

$$H \leq HN \cap H_1 \leq \ldots \leq HN \cap H_j \leq HN \cap H_{j+1} \leq \ldots \leq HN.$$

За тотожністю Дедекінда $HN \cap H_j = H(N \cap H_j)$, тому

$$|HN \cap H_{j+1} : HN \cap H_j| = \frac{|H||N \cap H_{j+1}|}{|H \cap N|} : \frac{|H||N \cap H_j|}{|H \cap N|} = \frac{|N \cap H_{j+1}|}{|N \cap H_j|}.$$

Оскільки $N \cap H_{j+1}$ нормальна в H_{j+1}, то

$$H_j \leq (N \cap H_{j+1})H_j \leq H_{j+1},$$

і

$$|(N \cap H_{j+1})H_j : H_j| \in \mathbb{T}, \quad |N \cap H_{j+1} : N \cap H_j| \in \mathbb{T},$$

тому що $|H_{j+1} : H_j| \in \mathbb{T}$ і $\mathbb{T}$ містить усі дільники чисел із $\mathbb{T}$. Отже, H $\mathbb{T}\mathrm{sn}$ HN.

Лема 7 ([14], лема 2.16)**.** *Нехай $\mathfrak{F}$ — насичена формація, що містить формацію $\mathfrak{U}$, і G — група з нормальною підгрупою E такою, що $G/E \in \mathfrak{F}$. Якщо E циклічна, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Наступна лема має самостійний інтерес.

Лема 8. *Нехай $\mathfrak{H}$ — спадкова насичена формація така, що $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{H}$. Якщо A — підгрупа групи G, $A \in \mathfrak{H}$ і A $\mathbb{P}$-субнормальна в G, то $AF(G) \in \mathfrak{H}$.*

Доведення. Скористаємось індукцією за порядком групи. Нехай $F = F(G)$. Припустимо, що $AF < G$. Підгрупа A $\mathbb{P}$-субнормальна в AF за лемою 6, п. 6. За індукцією $AF(AF) \in \mathfrak{H}$. Оскільки формація $\mathfrak{H}$ спадкова і $F \leq F(AF)$, то $AF \in \mathfrak{H}$. Тому далі вважаємо, що $AF = G$.

Нехай N — нормальна підгрупа в G, $N \neq 1$. Оскільки AN/N $\mathbb{P}$-субнормальна в G/N і $AN/N \in \mathfrak{H}$, то за індукцією $(AN/N)F(G/N) \in \mathfrak{H}$. Далі, позаяк $F(G)N/N \leq F(G/N)$, то

$$G/N = AF(G)/N = (AN/N)F(G)N/N \leq (AN/N)F(G/N) \in \mathfrak{H}.$$

Тому $G/N \in \mathfrak{H}$. Отже, $\Phi(G) = 1$ і F — єдина мінімальна нормальна підгрупа. Підгрупа F абелева, тому A — максимальна підгрупа в G. За умовою A $\mathbb{P}\mathrm{sn}$ G, отже, $|F| = |G : A| \in \mathbb{P}$. За лемою 7 $G \in \mathfrak{H}$.

2. Співмножники надрозв'язні і $\mathbb{P}\boldsymbol{F(G)}$-субнормальні. Згідно з теоремою Хупперта надрозв'язну групу можна визначити як групу, в якій усі максимальні підгрупи мають прості індекси. Тому в надрозв'язній групі всі підгрупи $\mathbb{P}$-субнормальні.

У [10] доведено, що група $G = AB$, факторизована двома нільпотентними $F(G)$-субнормальними підгрупами A і B, є нільпотентною [10] (теорема 1). Коротке доведення цього результату отримано в [15] (теорема 3.3). Якщо $F(G)$-субнормальність замінити на $\mathbb{P}F(G)$-субнормальність, то група може бути не нільпотентною навіть тоді, коли співмножники A і B мають прості порядки. Прикладом є симетрична група степеня 3.

Група, факторизована двома надрозв'язними $F(G)$-субнормальними підгрупами, може бути нерозв'язною. Прикладом слугує будь-яка проста група, факторизована надрозв'язними підгрупами, наприклад $PSL(2, 7)$. Але за додаткових умов можна отримувати надрозв'язність.

Теорема 1. *Нехай* $\mathfrak{F}$ — *спадкова насичена формація така, що* $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$. *Нехай* A *і* B — $\mathbb{P}F(G)$*-субнормальні підгрупи групи* G *і* $G = AB$. *Якщо* $A, B \in \mathfrak{F}$, *то* $G \in \mathfrak{F}$ *у кожному з таких випадків*:

1) *комутант* G' *нільпотентний*;

2) *група* G *метанільпотентна і* $(|G : A|, |G : B|) = 1$;

3) *одна з підгруп* A *або* B *нільпотентна і субнормальна в* G.

Доведення. Розглянемо підгрупу $K = AF(G)$. Оскільки A — $\mathbb{P}F(G)$-субнормальна підгрупа групи G, то A $\mathbb{P}$-субнормальна в K. За лемою 8 $K \in \mathfrak{F}$. Аналогічно, підгрупа $H = BF(G) \in \mathfrak{F}$.

1. Оскільки комутант G' нільпотентний, то $G' \leq F(G)$ і $G/F(G)$ абелева. Тому підгрупи $K/F(G)$ і $H/F(G)$ нормальні в $G/F(G)$. Таким чином, $G = AB = (AF(G))(BF(G)) = KH$ — добуток нормальних підгруп K і H. Згідно з теоремою В з [11] $G \in \mathfrak{F}$.

2. Оскільки група метанільпотентна, то $G/F(G)$ нільпотентна. Тому підгрупи $K/F(G)$ і $H/F(G)$ субнормальні в $G/F(G)$. Таким чином, $G = KH$ — добуток субнормальних $\mathfrak{F}$-підгруп K і H. Очевидно, що $(|G : H|, |G : K = |)1$. За лемою 5.1 з [11] $G \in \mathfrak{F}$.

3. Нехай підгрупа A субнормальна в G і нільпотентна. Тоді $A^G \leq F(G)$ і $G = AB \leq BF(G) = H \in \mathfrak{F}$.

Теорему доведено.

Оскільки кожна $F(G)$-субнормальна підгрупа $\mathbb{P}F(G)$-субнормальна, то з теореми 1 при $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$ отримуємо такий наслідок.

Наслідок ([10], теорема 2)**.** *Нехай* A *і* B — *надрозв'язні* $F(G)$*-субнормальні підгрупи групи* G *і* $G = AB$. *Тоді група* G *надрозв'язна в кожному з таких випадків*:

1) *комутант* G' *нільпотентний*;

2) *група* G *метанільпотентна і* $(|G : A|, |G : B|) = 1$;

3) *одна з підгруп* A *або* B *нормальна в* G *і нільпотентна*.

Зауваження. Кожна підгрупа надрозв'язної групи $\mathbb{P}$-субнормальна. Тому при $X = G^{\mathfrak{F}}$, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{U}$, справедливим є твердження: *якщо підгрупа* H *групи* G *є* $\mathbb{P}G^{\mathfrak{F}}$*-субнормальною, то* H $\mathbb{P}$*-субнормальна у* G. Отже, результати робіт [5 – 9] можна поширити на факторизовні групи з $\mathbb{P}G^{\mathfrak{F}}$-субнормальними співмножниками.

У статті [2] досліджували w-*надрозв'язні* групи — групи з $\mathbb{P}$-субнормальними силовськими підгрупами. Зокрема, встановлено, що клас $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ усіх w-надрозв'язних груп є спадковою насиченою формацією, кожна метанільпотентна і кожна біпримарна w-надрозв'язна група є надрозв'язною [2] (теореми 2.7 і 2.13).

У роботі [16] вивчали групи, що мають три надрозв'язні підгрупи з попарно взаємно простими індексами: такі групи належать формації $\mathfrak{N}^3$. Цей результат уточнює така теорема.

Теорема 2. *Нехай* A, B *і* C — *надрозв'язні підгрупи групи* G *попарно взаємно простих індексів і* $G = AB = AC = BC$. *Тоді група* $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2 \cap \mathrm{w}\mathfrak{U}$. *Крім того, якщо підгрупи* A, B, C $\mathbb{P}F(G)$*-субнормальні в* G, *то* G *надрозв'язна.*

Доведення. За теоремою Віландта [17] група G розв'язна. Якщо N — неодинична нормальна в G підгрупа, то підгрупи $AN/N \simeq A/A \cap N$, BN/N і CN/N — надрозв'язні підгрупи взаємно простих індексів у G/N. Фактор-група $G/N \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$ за індукцією. Оскільки формація $\mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$ насичена, то за лемою 1 група G примітивна. Тому можна застосувати лему 2. Збережемо для G позначення цієї леми. Зокрема, $F(G) = N$ — єдина мінімальна нормальна в G підгрупа, $C_G(N) = N$. Нехай p найбільше з $\pi(G)$. За теоремою 1 з [18] група G p-замкнена. Тому $F(G) = N = G_p$.

Якщо p ділить $|G\colon A|$, то, згідно з умовою, p не ділить індекси $|G\colon B|$ і $|G : C|$. Тому $F(G) \leq B \cap C$. Оскільки $C_G(F(G)) = F(G)$, то $O_{p'}(B) = 1 = O_{p'}(C)$. За лемою 3 p'-холлові підгрупи $B_{p'}$, $C_{p'}$ підгруп B і C є абелевими. Таким чином, $G/F = (B/F)(C/F) \simeq B_{p'}C_{p'}$ і $G/F \in \mathfrak{A}^2$. Тому $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$.

Нехай r і q, $r \neq q$, — довільні прості числа з $\pi(G)$. Очевидно, що серед підгруп A, B, C можна вибрати таку, що r і q не ділять її індексу. Не втрачаючи загальності, вважатимемо, що індекс підгрупи A не ділиться на r і q. Тоді $\{r, q\}$-холлова підгрупа в A надрозв'язна і є $\{r, q\}$-холловою підгрупою групи G. Тому в G всі біпримарні холлові підгрупи надрозв'язні і згідно з теоремою B (1) [3] група $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$. Таким чином, включення $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2 \cap \mathrm{w}\mathfrak{U}$ доведено.

Нехай підгрупи A, B, C $\mathbb{P}F(G)$-субнормальні в G. Застосуємо індукцію по $|G\colon A| + |G\colon B| + |G\colon C|$. Якщо $AF(G) < G$, то $AF(G)$ є надрозв'язною за лемою 8 і $\mathbb{P}F(G)$-субнормальною в G. Крім того, підгрупи $AF(G)$, B і C мають попарно взаємно прості індекси. За індукцією група G надрозв'язна. Тому можна вважати, що $F(G) \leq A \cap B \cap C$. За наслідком C.4 з [11] група G надрозв'язна.

3. Співмножники розв'язні і $\mathbb{T}X$-субнормальні. Нагадаємо позначення деяких конкретних значень множини $\mathbb{T}$. Для фіксованих чисел $t \in \mathbb{N}$ і $r \in \mathbb{P}$ покладемо

$$\mathbb{P}^t = \{p^k \mid p \in \mathbb{P},\ \ k \in \{0\} \cup \mathbb{N},\ \ k \leq t\},$$

$$\mathbb{P}^t_r = \{p^k \mid p \in \mathbb{P} \setminus \{r\},\ \ k \in \{0\} \cup \mathbb{N}\} \cup \{r^k \mid k \in \{0\} \cup \mathbb{N},\ \ k \leq t\},$$

$$\mathbb{P}^\infty = \{p^k \mid p \in \mathbb{P},\ \ k \in \{0\} \cup \mathbb{N}\},$$

$$\mathbb{L} = \{2, 4\} \cup \{2n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Нам знадобляться відомі результати про факторизовні групи з $\mathbb{T}$-субнормальними співмножниками.

Лема 9. 1. *Нехай A і B — $\mathbb{P}^2$-субнормальні підгрупи групи G і $G = AB$. Якщо A і B розв'язні, то G також розв'язна* [6] (*теорема* 1).

2. *Нехай A і B — $\mathbb{L}$-субнормальні підгрупи групи G і $G = AB$. Якщо A і B розв'язні, то G також розв'язна* [7] (*теорема* 1).

3. *Нехай A і B — $\mathbb{P}^\infty$-субнормальні підгрупи групи G і $G = AB$. Припустимо, що $r \in \pi(G) \setminus \{2, 3, 7\}$. Якщо A і B r-розв'язні, то G r-розв'язна* [7] (*теорема* 2).

4. *Нехай A і B — $\mathbb{P}^2_2$-субнормальні підгрупи групи G і $G = AB$. Якщо A і B r-розв'язні, то G r-розв'язна для будь-якого $r \in \pi(G)$* [7] (*теорема* 3).

У наступній теоремі розглядається група, яка факторизується $\mathbb{T}X$-субнормальними підгрупами при $X = G^{\mathfrak{S}}$ і $X = G^{p\mathfrak{S}}$.

Теорема 3. *Нехай A і B — $\mathbb{T}X$-субнормальні підгрупи групи G і $G = AB$.*

1. *Нехай $X = G^{\mathfrak{S}}$, $\mathbb{T} = \mathbb{P}^2$ або $\mathbb{T} = \mathbb{L}$. Якщо A і B — розв'язні підгрупи, то група G також розв'язна.*

2. *Нехай $X = G^{r\mathfrak{S}}$. Якщо A і B — r-розв'язні підгрупи, то група G r-розв'язна в кожному з таких випадків*:

2.1) $\mathbb{T} = \mathbb{P}^\infty$ *і* $r \in \pi(G) \setminus \{2, 3, 7\}$;

2.2) $\mathbb{T} = \mathbb{P}^2_2$ *і* $r \in \pi(G)$.

Доведення. 1. Якщо $AX = G = BX$, то A і B $\mathbb{T}$-субнормальні в G і за лемою 9 (пп. 1, 2) група G розв'язна. Нехай $AX < G$. Застосуємо індукцію за порядком групи G. За умовою підгрупа B $\mathbb{T}$-субнормальна в BX, тому існує ланцюжок підгруп

$$B \leq B_1 \leq \ldots \leq B_m \leq BX, \quad |B_{i+1} : B_i| \in \mathbb{T}.$$

Оскільки $G = AB = (AX)B_i = (AX)B_{i+1}$, то

$$\frac{|AX||B_i|}{|AX \cap B_i|} = \frac{|AX||B_{i+1}|}{|AX \cap B_{i+1}|},$$

$$|AX \cap B_{i+1} : AX \cap B_i| = |B_{i+1} : B_i| \in \mathbb{T}.$$

За лемою 4 (п. 4) $(AX)^{\mathfrak{S}} = X$, тому

$$AX \cap B \leq AX \cap B_1 \leq \ldots \leq AX \cap B_m \leq AX \cap BX =$$

$$= (AX \cap B)X = (AX \cap B)(AX)^{\mathfrak{S}}$$

і $AX \cap B$ $\mathbb{T}$-субнормальна в $(AX \cap B)(AX)^{\mathfrak{S}}$. За тотожністю Дедекінда

$$AX = AX \cap G = AX \cap AB = A(AX \cap B).$$

За умовою A $\mathbb{T}$-субнормальна в $AX = A(AX)^{\mathfrak{S}}$ і $AX \cap B$ $\mathbb{T}$-субнормальна в $(AX \cap B)(AX)^{\mathfrak{S}}$ згідно з доведеним. Оскільки A і $AX \cap B$ — розв'язні підгрупи, то AX розв'язна за індукцією. Оскільки $X \leq AX$, то G розв'язна.

2. Якщо $AX = G = BX$, то A і B $\mathbb{T}$-субнормальні в G і за лемою 9 (пп. 3, 4) група G r-розв'язна. Нехай $AX < G$. За лемою 5 $(AX)^{p\mathfrak{S}} = X$.

Застосовуючи індукцію за порядком групи G і повторюючи міркування, як і при доведенні п. 1, отримуємо, що група G r-розв'язна в кожному з таких випадків: $\mathbb{T} = \mathbb{P}^\infty$ і $r \in \pi(G) \setminus \{2, 3, 7\}$, $\mathbb{T} = \mathbb{P}_2^2$ і $r \in \pi(G)$.

Література

1. В. С. Монахов, *Введение в теорию конечных групп и их классов*, Вышэйш. шк., Минск (2006).
2. А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов, *О конечных группах сверхразрешимого типа*, Сиб. мат. журн., **51**, № 6, 1270 – 1281 (2010).
3. V. S. Monakhov, V. N. Kniahina, *Finite group with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups*, Ric. Mat., **62**, № 2, 307 – 323 (2013).
4. V. S. Monakhov, V. N. Kniahina, *Finite groups with given indices of 2-maximal subgroups*, J. Algebra and Appl., **15**, № 7, Article 1650123 (2016).
5. А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов, *О произведениях $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп в конечных группах*, Сиб. мат. журн., **53**, № 1, 59 – 67 (2012).
6. В. Н. Князина, В. С. Монахов, *Конечные факторизуемые группы с разрешимыми $\mathbb{P}^2$-субнормальными подгруппами*, Сиб. мат. журн., **54**, № 1, 77 – 85 (2013).
7. В. Н. Тютянов, В. Н. Князина, *Факторизации конечных групп r-разрешимыми подгруппами с заданными вложениями*, Укр. мат. журн., **55**, № 10, 1431 – 1435 (2014).
8. V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk, *On the residual of a factorized group with widely supersoluble factors*, Commun. Algebra, **48**, № 12, 5290 – 5295 (2020).
9. V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk, *On the supersoluble residual of a product of supersoluble subgroups*, Adv. Group Theory and Appl., **9**, 1 – 20 (2020).

10. В. И. Мурашко, А. Ф. Васильев, *О произведениях частично субнормальных подгрупп конечных групп*, Весн. ВДУ, **70**, № 4, 24 – 27 (2012).
11. А. Ф. Васильев, В. И. Мурашко, *Формации и произведения $F(G)$-субнормальных подгрупп конечных разрешимых групп*, Мат. заметки, **107**, № 3, 376 – 390 (2020).
12. *The GAP group: GAP — groups, algorithms, and programming. Ver. GAP 4.11.0* [Electronic resource]: A system for computational discrete algebra, Mode of access: https://www.gap-system.org, Date of Access: 29.02.2020.
13. В. С. Монахов, И. К. Чирик, *О p-сверхразрешимом корадикале произведения нормальных p-сверхразрешимых подгрупп*, Тр. Ин-та математики, **23**, № 2, 88 – 96 (2015).
14. A. N. Skiba, *On weakly s-permutable subgroups of finite groups*, J. Algebra, **315**, 192 – 209 (2007).
15. В. С. Монахов, И. К. Чирик, *Конечные группы, факторизуемые субнормальными сверхразрешимыми подгруппами*, Проблемы физики, математики и техники, **28**, № 3, 40 – 46 (2016).
16. А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, К. Л. Парфенков, *Конечные группы с тремя заданными подгруппами*, Сиб. мат. журн., **59**, № 1, 65 – 77 (2018).
17. H. Wielandt, *Über die Normalstruktur mehrfach faktorisierter Gruppen*, J. Austr. Math. Soc., **1**, 143 – 146 (1959).
18. H. Kegel, *Zur Struktur mehrfach faktorisierter endlicher Gruppen*, Math. Z., **87**, 42 – 48 (1965).

Одержано 05.04.21