DOI: 10.37863/umzh.v73i7.6684

УДК 517.927

В. А. Михайлець (Ін-т математики НАН України, Київ),
Т. Б. Скоробогач (Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського”, Київ)

ФРЕДГОЛЬМОВІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ В ПРОСТОРАХ СОБОЛЄВА – СЛОБОДЕЦЬКОГО

We investigate the most general class of linear one-dimensional boundary value problems whose solutions range over a given Sobolev – Slobodetsky space. We find necessary and sufficient conditions for the unique solvability of such problems and prove a criterion of continuity of their solutions with respect to a parameter in this space.

Досліджено найбільш широкий клас одновимірних лінійних крайових задач, розв'язки яких пробігають заданий простір Соболєва – Слободецького. Знайдено необхідні і достатні умови однозначної розв'язності таких задач. Доведено критерій неперервності їхніх розв'язків за параметром у цьому просторі.

1. Вступ. У теорії диференціальних рівнянь важливим є питання про умови, за яких можна виконувати граничний перехід за параметром у розв'язках рівнянь. Щодо розв'язків задачі Коші для нелінійних диференціальних систем такі умови знайдено у роботах І. І. Гіхмана [1], М. О. Красносельського і С. Г. Крейна [2], Я. Курцвейля і З. Ворела [3], А. М. Самойленка [4]. У лінійному випадку більш повні й точні результати отримали А. Ю. Лєвін [5, 6], З. Опял [7], В. Т. Рейд [8] і Нгуен Тхе Хоан [9].

Для крайових задач це питання є набагато складнішим з огляду на велике різноманіття крайових умов. Його вивчали І. Т. Кігурадзе [10, 11] і М. Ашордія [12] стосовно широкого класу лінійних крайових задач для систем $m \geq 1$ диференціальних рівнянь першого порядку. Їхні розв'язки є абсолютно неперервними вектор-функціями на відрізку $[a, b]$ дійсної осі, а крайові умови задано у вигляді $By = q$, де B — довільний неперервний лінійний оператор на парі банахових просторів $C([a, b], \mathbb{R}^m)$ і $\mathbb{R}^m$, y — розв'язок, а $q \in \mathbb{R}^m$. У вказаних роботах знайдено достатні умови, за яких розв'язки таких крайових задач неперервно залежать від параметра за супремум-нормою, що задає рівномірну збіжність на $[a, b]$. Ці результати були узагальнені і суттєво уточнені для систем диференціальних рівнянь довільних порядків, розв'язки яких є комплекснозначними функціями (див. роботи [13, 14] і наведену в них бібліографію).

Втім останнім часом у дослідженнях виникають й інші класи лінійних крайових задач. У роботах [15 – 20] введено і досліджено максимально широкі класи лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь, розв'язки яких пробігають заданий нормований функціональний простір — простір Соболєва цілого порядку або простір n разів неперервно диференційовних функцій. Доведено, що ці задачі фредгольмові з нульовим індексом, і знайдено необхідні та достатні умови їх коректної розв'язності та неперервності за параметром їхніх розв'язків у вказаних функціональних просторах.

Мета цієї статті — дослідити подібні класи крайових задач для нормованих функціональних просторів Соболєва – Слободецького W_p^s дробового порядку s, де $1 \leq p < \infty$. У п. 2 наведено необхідні відомості про простори Соболєва – Слободецького, а в п. 3 — деякі допоміжні результати, які можуть становити самостійний інтерес. Основні результати містяться в пп. 4 – 6.

2. Простори Соболєва – Слободецького. У роботі довільно вибрано скінченний інтервал (a,b) дійсної осі, дійсне число $p \in [1,\infty)$, натуральне число m і дробове число $s \in (0,\infty) \setminus \mathbb{N}$. Як звичайно, пишемо $s = [s] + \{s\}$, де $[s]$ — ціла частина числа s, а $\{s\}$ — його дробова частина.

Використовуємо комплексні простори Соболєва – Слободецького $W_p^s := W_p^s((a,b),\mathbb{C})$, $(W_p^s)^m := W_p^s((a,b),\mathbb{C}^m)$ і $(W_p^s)^{m\times m} := W_p^s((a,b),\mathbb{C}^{m\times m})$, які складаються відповідно із скалярних функцій, вектор-функцій і квадратних матриць-функцій, заданих на інтервалі (a,b). Нагадаємо (див., наприклад, [22], розд. 4, § 1, або [23], п. 4.5.1, зауваження 2), що лінійний простір W_p^s складається з усіх функцій $f \in W_p^{[s]}$, які задовольняють умову

$$l_{s,p}(f) := \int\limits_a^b \int\limits_a^b \frac{|f^{([s])}(x) - f^{([s])}(y)|^p}{|x-y|^{1+\{s\}p}} dxdy < +\infty.$$

Тут і далі $W_p^{[s]} := W_p^{[s]}((a,b),\mathbb{C})$ — комплексний простір Соболєва цілого порядку $[s]$, заданий на (a,b), а $\|\cdot\|_{[s],p}$ — норма у цьому просторі. Зокрема, $W_p^0 = L_p := L_p((a,b),\mathbb{C})$ — простір Лебега з нормою $\|\cdot\|_p := \|\cdot\|_{0,p}$. Крім того, $f^{([s])}$ — похідна порядку $[s]$ функції $f \in W_p^{[s]}$. Ця похідна існує у майже всіх (відносно міри Лебега) точках інтервалу (a,b). Простір W_p^s наділений нормою

$$\|f\|_{s,p} := \|f\|_p + (l_{s,p}(f))^{1/p}$$

та є повним (тобто банаховим) відносно неї. Цей простір є банаховою алгеброю відносно операції множення функцій тоді і тільки тоді, коли $s > 1/p$ (див., наприклад, [21], теорема 2.8.3). З означення простору Соболєва – Слободецького і норми у ньому випливає, що

$$\|f\|_{s+1,p} \le \|f\|_p + \|f'\|_{s,p} \le 2\|f\|_{s+1,p},$$
$$W_p^{s+1} = \{f \in W_p^1 : f' \in W_p^s\}.$$

Якщо $0 \le s_0 < s_1$, то виконується неперервне вкладення $W_p^{s_1} \subset W_p^{s_0}$.

Позначимо через $M(W_p^s)$ комплексний лінійний простір усіх функцій $\varphi\colon (a,b) \to \mathbb{C}$ таких, що $f \in W_p^s \Rightarrow \varphi f \in W_p^s$. Функції класу $M(W_p^s)$ називають (поточковими) мультиплікаторами у просторі W_p^s. Лінійний оператор множення на функцію $\varphi \in M(W_p^s)$ є заданим на всьому просторі W_p^s і замкненим у ньому. Тому на підставі теореми про замкнений графік цей оператор обмежений на W_p^s, тобто

$$\|\varphi\|_{M;s,p} := \sup\left\{\frac{\|\varphi f\|_{s,p}}{\|f\|_{s,p}} : f \in W_p^s,\ f \ne 0\right\} < \infty.$$

Простір $M(W_p^s)$ наділений нормою $\|\cdot\|_{M,s,p}$ та є повним відносно неї.

Лема 1. *Нехай* $0 < s < 1$. *Тоді* $W_p^1 \subset M(W_p^s)$, *причому існує таке число* $c > 0$, *що*

$$\|\varphi\|_{M;s,p} \le c\,\|\varphi\|_{1,p} \quad \textit{для довільного} \quad \varphi \in M(W_p^s). \tag{1}$$

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли $p > 1$. Нехай $\varphi \in W_p^1$. Оскільки W_p^1 — банахова алгебра, то знайдеться таке число $c_1 > 0$, що $\|\varphi f\|_{1,p} \le c_1\|f\|_{1,p}$ для довільного $f \in W_p^1$. Зауважимо, що $\varphi \in W_p^1 \subset W_1^1 \subset C[a,b]$. Отже, $\|\varphi f\|_p \le c_2\|f\|_p$ для будь-якого $f \in L_p$, де c_2 — супремум-норма функції φ на відрізку $[a,b]$. Таким чином, оператор множення на функцію φ є обмеженим на кожному з просторів W_p^1 і L_p. Простір W_p^s, де $0 < s < 1$, є результатом дійсної інтерполяції між W_p^1 і L_p (див., наприклад, [23], теорема 4.3.1/1). Тому цей оператор обмежений і на W_p^s, тобто $\varphi \in M(W_p^s)$. Отже, $W_p^1 \subset M(W_p^s)$ у розглянутому випадку. Якщо $p = 1$, це вкладення виконується згідно з наслідком 3.3.1 [21]. Нерівність (1) випливає тепер з повноти просторів W_p^1, $M(W_p^s)$ і узгодженості норм у них (остання справджується, оскільки ці простори неперервно вкладені в W_p^s).

Лему 1 доведено.

3. Теорема про гомеоморфізми. Позначимо через $Y(\cdot) \in (AC[a,b])^{m\times m}$ єдиний розв'язок матричної задачі Коші

$$Y'(t) + A(t)Y(t) = 0 \quad \text{для м.в.} \quad t \in (a,b), \tag{2}$$

$$Y(a) = I_m, \tag{3}$$

де коефіцієнт $A(\cdot) \in \left(W_p^s\right)^{m\times m}$. Тут I_m — одинична матриця порядку m, а $(AC[a,b])^{m\times m}$ — комплексний простір усіх $(m\times m)$-матриць-функцій, елементи яких є абсолютно неперервними скалярними функціями на відрізку $[a,b]$. Похідна матриці-функції класу $(AC[a,b])^{m\times m}$ означена у майже всіх (м.в.) точках цього відрізка. Як відомо, числова матриця $Y(t)$ невироджена у кожній точці $t \in [a,b]$.

Розглянемо питання про однозначну розв'язність задачі (2), (3) у просторі $(W_p^{s+1})^{m\times m}$. Введемо метричний простір матриць-функцій

$$(\mathcal{Y}_p^{s+1}) := \left\{Y(\cdot) \in (W_p^{s+1})^{m\times m} :\ Y(a) = I_m,\, \det Y(t) \neq 0\right\},$$

наділений метрикою

$$d_p^{s+1}(Y,Z) := \|Y(\cdot) - Z(\cdot)\|_{s+1,p}.$$

Теорема 1. *Нелінійне відображення* $\gamma\colon A \mapsto Y$, *де* $A(\cdot) \in (W_p^s)^{m\times m}$, *а* $Y(\cdot) \in (AC[a,b])^{m\times m}$ *— розв'язок задачі Коші* (2), (3), *є гомеоморфізмом банахового простору* $(W_p^s)^{m\times m}$ *на метричний простір* $(\mathcal{Y}_p^{s+1})$.

Доведення теореми розіб'ємо на три кроки.

Крок 1. Покажемо, що γ — бієкція між множинами $(W_p^s)^{m\times m}$ і $(\mathcal{Y}_p^{s+1})$. Спочатку доведемо індукцією за цілим $[s] \geq 0$, що

$$A(\cdot) \in (W_p^s)^{m\times m} \Longrightarrow Y(\cdot) \in (W_p^{s+1})^{m\times m}. \tag{4}$$

Обґрунтуємо цю імплікацію у випадку, коли $[s] = 0$. Якщо $A(\cdot) \in (W_p^s)^{m\times m}$, то $Y'(\cdot) = -A(\cdot)Y(\cdot) \in (L_p)^{m\times m}$, оскільки всі елементи матриці-функції $Y(\cdot)$ обмежені на $[a,b]$. Отже, $Y(\cdot) \in (W_p^1)^{m\times m}$ і тому $Y'(\cdot) = -A(\cdot)Y(\cdot) \in (W_p^s)^{m\times m}$ за лемою 1. Звідси $Y(\cdot) \in (W_p^{s+1})^{m\times m}$, тобто ми довели (4) у вказаному випадку.

Припустимо тепер, що імплікація (4) істинна для деякого цілого числа $[s] = k \geq 0$. Доведемо її у випадку, коли $[s] = k+1$. Якщо справджується включення $A(\cdot) \in (W_p^s)^{m\times m} \subset (W_p^{s-1})^{m\times m}$, то $Y(\cdot) \in (W_p^s)^{m\times m}$ за індуктивним припущенням, бо $[s-1] = k$. Отже, матриця-функція $Y'(\cdot) = -A(\cdot)Y(\cdot)$ належить до $(W_p^s)^{m\times m}$, оскільки W_p^s — алгебра у розглянутому випадку. Звідси $Y(\cdot) \in (W_p^{s+1})^{m\times m}$, тобто ми довели (4) у випадку, коли $[s] = k+1$. Таким чином, згідно з принципом математичної індукції імплікація (4) істинна для будь-якого цілого числа $[s] \geq 0$.

Отже, відображення γ діє на парі просторів $(W_p^s)^{m\times m}$ і $(\mathcal{Y}_p^{s+1})$. Воно ін'єктивне, оскільки $A(\cdot) = -Y'(\cdot)Y^{-1}(\cdot)$. Покажемо, що воно і сюр'єктивне. Для довільно вибраної матриці-функції $Y(\cdot) \in (\mathcal{Y}_p^{s+1})$ покладемо $A(\cdot) := -Y'(\cdot)Y^{-1}(\cdot)$. Оскільки $Y'(\cdot) \in (W_p^s)^{m\times m}$ і $Y^{-1}(\cdot) \in \in (W_p^{s+1})^{m\times m}$, то $Y'(\cdot)Y^{-1}(\cdot) \in (W_p^s)^{m\times m}$. Цей висновок робимо на підставі леми 1, якщо $0 < s < 1$, або з огляду на те, що простір $(W_p^s)^{m\times m}$ — банахова алгебра, якщо $s > 1/p$. Отже, $A(\cdot) \in (W_p^s)^{m\times m}$. Оскільки $Y(\cdot)$ — розв'язок задачі Коші (2), (3), то $\gamma(A(\cdot)) = Y(\cdot)$. Ми довели сюр'єктивність відображення

$$\gamma\colon (W_p^s)^{m\times m} \to (\mathcal{Y}_p^{s+1}). \tag{5}$$

Таким чином, воно є бієкцією.

Крок 2. Покажемо, що відображення (5) неперервне. Розглянемо параметризовані числом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ матричні задачі Коші вигляду

$$Y'(t;\varepsilon) = -A(t;\varepsilon)Y(t;\varepsilon) \quad \text{для м.в.} \quad t \in (a,b), \tag{6}$$

$$Y(a;\varepsilon) = I_m, \tag{7}$$

де $A(\cdot;\varepsilon) \in (W_p^s)^{m\times m}$. Усі границі розглядаємо при $\varepsilon \to 0+$. Припустимо, що

$$\|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\|_{s,p} \to 0. \tag{8}$$

Потрібно довести, що тоді (єдині) розв'язки задач (6), (7) задовольняють умову

$$\|Y(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)\|_{s+1,p} \to 0. \tag{9}$$

Розглянемо спочатку випадок, коли $[s] = 0$. Оскільки

$$\|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\|_p \to 0$$

згідно з нашим припущенням, то

$$\|Y(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)\|_{1,p} \to 0 \tag{10}$$

на підставі теореми 2.1 [18]. Крім того,

$$\begin{gathered}\|Y'(\cdot;\varepsilon) - Y'(\cdot;0)\|_{s,p} = \|A(\cdot;\varepsilon)Y(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)Y(\cdot;0)\|_{s,p} \le \\ \le \|A(\cdot;\varepsilon)Y(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;\varepsilon)Y(\cdot;0)\|_{s,p} + \|A(\cdot;\varepsilon)Y(\cdot;0) - A(\cdot;0)Y(\cdot;0)\|_{s,p} \le \\ \le c\,\|A(\cdot;\varepsilon)\|_{s,p}\,\|Y(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)\|_{1,p} + c\,\|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\|_{s,p}\,\|Y(\cdot;0)\|_{1,p} \to 0\end{gathered}$$

на підставі леми 1, припущення (8) і властивості (10). Отже,

$$\|Y(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)\|_{s+1,p} \le \|Y(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)\|_p + \|Y'(\cdot;\varepsilon) - Y'(\cdot;0)\|_{s,p} \to 0.$$

Розглянемо тепер випадок, коли $[s] \ge 1$. У цьому випадку з умови (8) випливає співвідношення

$$\|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\|_{[s],p} \to 0, \tag{11}$$

а з нього — властивість

$$\|Y(\cdot;\varepsilon)-Y(\cdot;0)\|_{s,p}\leq\|Y(\cdot;\varepsilon)-Y(\cdot;0)\|_{[s+1],p}\to 0$$

на підставі теореми 2.1 [18]. Тому

$$\|Y'(\cdot;\varepsilon)-Y'(\cdot;0)\|_{s,p}=\|A(\cdot;\varepsilon)Y(\cdot;\varepsilon)-A(\cdot;0)Y(\cdot;0)\|_{s,p}\leq$$
$$\leq\|A(\cdot;\varepsilon)-A(\cdot;0)\|_{s,p}\,\|Y(\cdot;\varepsilon)\|_{s,p}+\|Y(\cdot;\varepsilon)-Y(\cdot;0)\|_{s,p}\,\|A(\cdot;0)\|_{s,p}\to 0,$$

оскільки $s>1$. Отже,

$$\|Y(\cdot;\varepsilon)-Y(\cdot;0)\|_{s+1,p}\leq\|Y(\cdot;\varepsilon)-Y(\cdot;0)\|_{p}+\|Y'(\cdot;\varepsilon)-Y'(\cdot;0)\|_{s,p}\to 0.$$

Ми довели неперервність відображення (5).

Крок 3. Доведемо неперервність оберненого відображення. Припустимо, що виконується співвідношення (9). Тоді

$$\|Y'(\cdot;\varepsilon)-Y'(\cdot;0)\|_{s,p}\to 0.$$

Крім того,

$$\|Y^{-1}(\cdot;\varepsilon)-Y^{-1}(\cdot;0)\|_{s+1,p}\to 0,$$

оскільки $(W_p^{s+1})^{m\times m}$ — банахова алгебра. Отже,

$$\|A(\cdot;\varepsilon)-A(\cdot;0)\|_{s,p}=\|Y'(\cdot;\varepsilon)Y^{-1}(\cdot;\varepsilon)-Y'(\cdot;0)Y^{-1}(\cdot;0)\|_{s,p}\to 0.$$

Ми довели неперервність відображення, оберненого до (5).

Теорему 1 доведено.

4. Фредгольмовість і розв'язність крайових задач. Розглянемо таку лінійну крайову задачу для системи m диференціальних рівнянь першого порядку:

$$y'(t)+A(t)y(t)=f(t),\quad t\in(a,b), \tag{12}$$

$$By=c. \tag{13}$$

Тут довільно вибрано матрицю-функцію $A(\cdot)\in(W_p^s)^{m\times m}$, вектор-функцію $f(\cdot)\in(W_p^s)^m$, вектор $c\in\mathbb{C}^m$ і лінійний неперервний оператор

$$B\colon(W_p^{s+1})^m\to\mathbb{C}^m.$$

Розв'язок $y(\cdot)$ цієї задачі розглядається у класі $(W_p^{s+1})^m$. Якщо $s>1/p$, то кожна функція з цього класу неперервно диференційовна на $[a,b]$, і тому рівняння (12) задане на всьому інтервалі (a,b). Якщо $0<s\leq 1/p$, то вона абсолютно неперервна на $[a,b]$, й тому рівняння (12) задане у майже всіх точках цього інтервалу.

Запишемо крайову задачу (12), (13) у вигляді операторного рівняння

$$(L,B)y=(f,c),$$

де $Ly:=y'+Ay$ для довільної вектор-функції $y\in(W_p^{s+1})^m$.

Теорема 2. *Лінійне відображення $y \mapsto (L,B)y$ є обмеженим оператором на парі банахових просторів*

$$(L,B)\colon (W_p^{s+1})^m \to (W_p^s)^m \times \mathbb{C}^m. \tag{14}$$

Цей оператор фредгольмів з індексом нуль.

Доведення. Обмеженість диференціального оператора L на парі просторів $(W_p^{s+1})^m$ і $(W_p^s)^m$ випливає з їхнього означення, а також з леми 1, якщо $0 < s \leq 1/p$, або з того факту, що W_p^s — банахова алгебра, якщо $s > 1/p$. Крім того, оператор B обмежений на парі просторів $(W_p^{s+1})^m$ і $\mathbb{C}^m$ за умовою крайової задачі. Доведемо фредгольмовість обмеженого оператора (14).

Відображення $C\colon y \mapsto y(a)$ є обмеженим оператором на парі просторів $(W_p^{s+1})^m$ і $\mathbb{C}^m$. Задача Коші $(L,C)y = (f,c)$ має єдиний розв'язок $y \in (AC[a,b])^m$ для будь-яких $f \in (W_p^s)^m$ і $c \in \mathbb{C}^m$. Як і на першому кроці доведення теореми 1, обґрунтовується, що $y \in (W_p^{s+1})^m$. Отже, лінійний обмежений оператор

$$(L,C)\colon (W_p^{s+1})^m \to (W_p^s)^m \times \mathbb{C}^m \tag{15}$$

є бієкцією. Тому він оборотний за теоремою Банаха про обернений оператор.

Оператор (14) є сумою оборотного оператора (15) і скінченновимірного оператора $(0, B - C)$. Тому перший оператор фредгольмів з індексом нуль на підставі теореми Нікольського [24] (§ 21.5).

Теорему 2 доведено.

Сформулюємо критерій оборотності оператора (14), тобто умови коректної розв'язності (за Адамаром) крайової задачі (12), (13) у просторі $(W_p^{s+1})^m$. Нехай $Y(\cdot)$ — матрицант диференціального рівняння (12), тобто $Y(\cdot)$ — єдиний розв'язок матричної задачі Коші (2), (3). Покладемо

$$[BY] := \left(B \begin{pmatrix} y_{1,1}(\cdot) \\ \vdots \\ y_{m,1}(\cdot) \end{pmatrix} \ldots B \begin{pmatrix} y_{1,m}(\cdot) \\ \vdots \\ y_{m,m}(\cdot) \end{pmatrix} \right),$$

де $Y(t) = (y_{ij}(t))_{i,j=1}^m$. Таким чином, стовпці числової $(m \times m)$-матриці $[BY]$ є результатом дії оператора B на відповідні стовпці матриці-функції $Y(\cdot)$. Безпосередньо перевіряється, що

$$B(Yq) = [BY]q \quad \text{для довільного} \quad q \in \mathbb{C}^m. \tag{16}$$

Теорема 3. *Оператор* (14) *оборотний тоді і лише тоді, коли матриця* $[BY]$ *невироджена.*

Доведення. Позначимо через N ядро оператора (14). За теоремою 2 оборотність цього оператора еквівалентна рівності $N = \{0\}$. Згідно з (16) включення $y(\cdot) \in N$ рівносильне тому, що $y(\cdot) = Y(\cdot)q$ і $[BY]q = 0$ для деякого $q \in \mathbb{C}^m$. Отже, $N = \{0\}$ тоді і лише тоді, коли матриця $[BY]$ невироджена.

Теорему 3 доведено.

5. Крайові задачі з параметром. Розглянемо параметризовані числом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ крайові задачі

$$y'(t;\varepsilon) + A(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon) = f(t;\varepsilon), \quad t \in (a,b), \tag{17}$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot;\varepsilon) = c(\varepsilon), \tag{18}$$

де задано $A(\cdot;\varepsilon) \in (W_p^s)^{m\times m},\ f(\cdot;\varepsilon) \in (W_p^s)^m,\ c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$ і лінійний неперервний оператор

$$B(\varepsilon)\colon (W_p^{s+1})^m \to \mathbb{C}^m.$$

Розв'язок $y(\cdot;\varepsilon)$ розглядається у класі $(W_p^{s+1})^m$. Як і раніше, $Y(\cdot;\varepsilon)$ — розв'язок матричної задачі Коші (6), (7).

Крайову задачу, яка відповідає значенню $\varepsilon = 0$, вважаємо граничною для сім'ї задач (17), (18). Усі границі розглядаємо при $\varepsilon \to 0+$, якщо не вказано інше.

Зробимо таке припущення.

Припущення (0). *Гранична однорідна крайова задача має лише тривіальний розв'язок.*

З цього припущення і теореми 2 випливає, що неоднорідна гранична крайова задача має єдиний розв'язок $y(\cdot;0) \in (W_p^{s+1})^m$ для будь-яких правих частин $f(\cdot;0) \in (W_p^s)^m$ і $c(0) \in \mathbb{C}^m$.

Теорема 4. *Нехай крайові задачі* (17), (18) *задовольняють такі умови*:

1) $\|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\|_{s,p} \to 0,$

2) $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ *для довільного* $y \in (W_p^{s+1})^m$.

Тоді обмежений оператор

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon))\colon (W_p^{s+1})^m \to (W_p^s)^m \times \mathbb{C}^m \tag{19}$$

є оборотним для достатньо малих $\varepsilon > 0$.

Якщо, крім цього,

3) $\|f(\cdot;\varepsilon) - f(\cdot;0)\|_{s,p} \to 0, \quad c(\varepsilon) \to c(0),$

то розв'язок $y(\cdot,\varepsilon)$ *задовольняє граничне співвідношення*

$$\|y(\cdot,\varepsilon) - y(\cdot,0)\|_{s+1,p} \to 0. \tag{20}$$

Попередньо доведемо кілька допоміжних тверджень.

Лема 2. *Нехай виконуються умови* 1, 2 *теореми* 4. *Тоді оператор* (19) *є оборотним для достатньо малих* $\varepsilon > 0$.

Доведення. З умови 1 на підставі теореми 1 випливає, що

$$\|Y(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)\|_{s+1,p} \to 0. \tag{21}$$

Тому за умовою 2 виконується така збіжність числових матриць:

$$[B(\varepsilon)Y(\cdot,\varepsilon)] \to [B(0)Y(\cdot,0)]\,. \tag{22}$$

Тут гранична матриця невироджена на підставі припущення (0) і теореми 3. Отже, і матриця $[B(\varepsilon)Y(\cdot,\varepsilon)]$ невироджена для достатньо малих $\varepsilon \geq 0$. Звідси за теоремою 3 випливає оборотність оператора (19) для цих ε.

Лему 2 доведено.

Розглянемо поряд із задачею (17), (18) такі крайові задачі:

$$v'(t;\varepsilon) = -A(t;\varepsilon)v(t;\varepsilon), \quad B(\varepsilon)v(\cdot;\varepsilon) = c(\varepsilon), \tag{23}$$

$$x'(t;\varepsilon) + A(t;\varepsilon)x(t;\varepsilon) = f(t;\varepsilon), \quad x(a;\varepsilon) = 0, \tag{24}$$

$$w'(t;\varepsilon) + A(t;\varepsilon)w(t;\varepsilon) = f(t;\varepsilon), \quad B(\varepsilon)w(\cdot;\varepsilon) = 0. \tag{25}$$

Як зазначалося, задача Коші (24) має єдиний розв'язок $x(\cdot;\varepsilon) \in (W_p^{s+1})^m$.

Згідно з лемою 2 крайові задачі (23) і (25) мають для достатньо малих $\varepsilon \geq 0$ єдині розв'язки $v(\cdot;\varepsilon)$ і $w(\cdot;\varepsilon)$ із класу $(W_p^{s+1})^m$. Звісно,

$$y(\cdot;\varepsilon) = v(\cdot;\varepsilon) + w(\cdot;\varepsilon) \tag{26}$$

для цих ε. Тому для доведення теореми 4 достатньо показати, що за умов 1 – 3 виконуються граничні співвідношення

$$\|v(\cdot;\varepsilon) - v(\cdot;0)\|_{s+1,p} \to 0, \tag{27}$$

$$\|w(\cdot;\varepsilon) - w(\cdot;0)\|_{s+1,p} \to 0. \tag{28}$$

Лема 3. *Нехай виконуються умови* 1 – 3 *теореми* 4. *Тоді розв'язок крайової задачі* (23) *має граничну властивість* (27).

Доведення. Цей розв'язок має дві властивості: $v(\cdot;\varepsilon) = Y(\cdot;\varepsilon)\widetilde{c}(\varepsilon)$ для деякого вектора $\widetilde{c}(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$ і $[B(\varepsilon)Y(\cdot;\varepsilon)]\widetilde{c}(\varepsilon) = c(\varepsilon)$ з огляду на формулу (16). Тому на підставі властивості (22) і умови 3 маємо збіжність

$$\widetilde{c}(\varepsilon) = [B(\varepsilon)Y(\cdot;\varepsilon)]^{-1}c(\varepsilon) \to [B(0)Y(\cdot;0)]^{-1}c(0) = \widetilde{c}(0).$$

Звідси та з (21) випливає співвідношення (27).

Лему 3 доведено.

Лема 4. *Нехай виконуються умови* 1 – 3 *теореми* 4. *Тоді розв'язок задачі Коші* (24) *має граничну властивість*

$$\|x(\cdot;\varepsilon) - x(\cdot;0)\|_{s+1,p} \to 0. \tag{29}$$

Доведення. Як відомо, розв'язок задачі Коші зображується у вигляді

$$x(t;\varepsilon) = Y^{-1}(t;\varepsilon)\int\limits_a^t Y(s;\varepsilon)f(s;\varepsilon)ds.$$

З властивості (21) і умови 3 випливає співвідношення

$$\|Y(\cdot;\varepsilon)f(\cdot;\varepsilon) - Y(\cdot;0)f(\cdot;0)\|_{s,p} \to 0. \tag{30}$$

Тут ми скористалися лемою 1, якщо $0 < s \leq 1/p$, або тим фактом, що W_p^s — банахова алгебра, коли $s > 1/p$. Звідси випливає формула (29), якщо знову скористатися (21).

Лему 4 доведено.

Лема 5. *Нехай виконуються умови* 1 – 3 *теореми* 4. *Тоді розв'язок крайової задачі* (25) *має граничну властивість* (28).

Доведення. Вектор-функція $u(\cdot;\varepsilon) = x(\cdot;\varepsilon) - w(\cdot;\varepsilon)$ є розв'язком крайової задачі вигляду (23):

$$u'(t;\varepsilon) = -A(t;\varepsilon)u(t;\varepsilon), \qquad B(\varepsilon)u(\cdot;\varepsilon) = \widetilde{c}(\varepsilon), \tag{31}$$

де покладаємо $\widetilde{c}(\varepsilon) := B(\varepsilon)x(\cdot;\varepsilon)$. Зауважимо, що $\widetilde{c}(\varepsilon) \to \widetilde{c}(0)$ на підставі властивості 2 і леми 4. Тому

$$\|u(\cdot;\varepsilon) - u(\cdot;0)\|_{s+1,p} \to 0 \tag{32}$$

згідно з лемою 3. Властивість (28) випливає з рівності $w(\cdot;\varepsilon) = x(\cdot;\varepsilon) - u(\cdot;\varepsilon)$ та формул (29) і (32).

Лему 5 доведено.

***Теорема* 4** є безпосереднім наслідком рівності (26) і лем 3, 5.

Зазначимо, що в умовах теореми 4 оператор $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ збігається до оператора $(L(0), B(0))$ у сильній операторній топології, але, взагалі кажучи, не за нормою операторів. Отже, теорема 4 не є наслідком відомої теореми про мале збурення оборотного оператора. У випадку, коли $p > 1$, цю теорему доведено у роботі Є. Гнип [25].

6. Критерій неперервності розв'язків за параметром.

Означення 1. *Говоримо, що розв'язок крайової задачі* (17), (18) *неперервно залежить від параметра* ε *при* $\varepsilon = 0$, *якщо виконуються такі умови*:

1) *існує додатне число* $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ *таке, що для кожного* $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$ *і будь-яких правих частин* $f(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^s)^m$ *і* $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$ *ця задача має єдиний розв'язок* $y(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^{s+1})^m$;

2) *збіжність правих частин* $f(\cdot,\varepsilon) \to f(\cdot,0)$ *в* $(W_p^s)^m$ *та* $c(\varepsilon) \to c(0)$ *в* $\mathbb{C}^{rm}$ *обумовлює збіжність розв'язків*

$$y(\cdot,\varepsilon) \to y(\cdot,0) \quad \textit{в} \quad (W_p^{s+1})^m. \tag{33}$$

Теорема 5. *Розв'язок крайової задачі* (17), (18) *неперервно залежить від параметра* ε *при* $\varepsilon = 0$ *тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє припущення* (0) *та умови* 1, 2 *теореми* 4.

Доведення. *Достатність* доведено в теоремі 4. Доведемо *необхідність*. Припустимо, що задача (17), (18) задовольняє означення 1. Тоді виконується умова (0). Залишилося показати, що задача задовольняє умови 1, 2. Доведення розіб'ємо на три кроки.

Крок 1. Доведемо, що ця задача задовольняє умову 1. За умовою 1 означення обмежений оператор

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon))\colon (W_p^{s+1})^m \to (W_p^s)^m \times \mathbb{C}^m \tag{34}$$

оборотний для будь якого $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$. Для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$ розглянемо матричну крайову задачу

$$Y'(t,\varepsilon) + A(t,\varepsilon)Y(t,\varepsilon) = 0 \cdot I_m, \quad t \in [a,b], \tag{35}$$

$$[BY(\cdot,\varepsilon)] = I_m. \tag{36}$$

Вона є сукупністю m крайових задач (17), (18), у яких праві частини не залежать від ε. Тому, за припущенням, вона має єдиний розв'язок $Y(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^{s+1})^{m\times m}$, і він задовольняє умову (21). Зауважимо, що матриця $Y(t,\varepsilon)0$ невироджена для довільного $t \in [a,b]$, бо у протилежному випадку стовпці-функції матриці $Y(\cdot,\varepsilon)$ будуть лінійно залежними, що суперечитиме умові $[BY(\cdot,\varepsilon)] = I_m$. Тому

$$A(\cdot,\varepsilon) = -Y'(\cdot,\varepsilon)(Y(\cdot,\varepsilon))^{-1} \to -Y'(\cdot,0)(Y(\cdot,0))^{-1} = A(\cdot,0)$$

у просторі $(W_p^{s+1})^{m\times m}$, тобто умова 1 виконується.

Крок 2. Покажемо, що $\|B(\varepsilon)\| = O(1)$ при $\varepsilon \to 0+$, де $\|\cdot\|$ — норма обмеженого оператора $B(\varepsilon)\colon (W_p^{s+1})^m \to \mathbb{C}^m$. Припустимо супротивне: існує числова послідовність $(\varepsilon^{(k)})_{k=1}^{\infty} \subset \subset (0,\varepsilon_1)$ така, що $\varepsilon^{(k)} \to 0$ і $0 < \|B(\varepsilon^{(k)})\| \to \infty$. Для кожного номера k виберемо функцію $x_k \in (W_p^{s+1})^m$, підпорядковану умовам

$$\|x_k\|_{s+1,p} = 1 \quad \text{і} \quad \|B(\varepsilon^{(k)})x_k\|_{\mathbb{C}^m} \geq \frac{1}{2}\|B(\varepsilon^{(k)})\|.$$

Покладемо

$$y(\cdot,\varepsilon^{(k)}) := \|B(\varepsilon^{(k)})\|^{-1}x_k, \quad f(\cdot,\varepsilon^{(k)}) := L(\varepsilon^{(k)})\,y(\cdot,\varepsilon^{(k)}), \quad c(\varepsilon^{(k)}) := B(\varepsilon^{(k)})\,y(\cdot,\varepsilon^{(k)}).$$

Оскільки $y(\cdot,\varepsilon^{(k)}) \to 0$ у просторі $(W_p^{s+1})^m$, то $f(\cdot,\varepsilon^{(k)}) \to 0$ в $(W_p^s)^m$, бо за доведеним на першому кроці матриця-функція $A(\cdot,\varepsilon)$ задовольняє умову 1. Оскільки $1/2 \leq \|c(\varepsilon^{(k)})\|_{\mathbb{C}^m} \leq 1$, то, перейшовши до підпослідовності чисел $\varepsilon^{(k)}$, можна вважати, що $c(\varepsilon^{(k)}) \to c(0)$ при $k \to \infty$, де $c(0)$ — деякий ненульовий вектор у просторі $\mathbb{C}^m$. Таким чином, для кожного номера k вектор-функція $y(\cdot,\varepsilon^{(k)}) \in (W_p^{n+1})^m$ є єдиним розв'язком крайової задачі

$$L(\varepsilon^{(k)})\,y(t,\varepsilon^{(k)}) = f(t,\varepsilon^{(k)}), \quad t \in [a,b],$$
$$B(\varepsilon^{(k)})\,y(\cdot,\varepsilon^{(k)}) = c(\varepsilon^{(k)}).$$

Тут $f(\cdot,\varepsilon^{(k)}) \to 0$ в $(W_p^{n+1})^m$ і $c(\varepsilon^{(k)}) \to c(0) \neq 0$ при $k \to \infty$. Тому на підставі умови 2 означення $y(\cdot,\varepsilon^{(k)}) \to y(\cdot,0)$ у просторі $(W_p^{n+1})^m$, де $y(\cdot,0)$ — єдиний розв'язок граничної крайової задачі

$$L(0)y(t,0) = 0, \quad t \in [a,b],$$
$$B(0)y(\cdot,0) = c(0).$$

Але $y(\cdot,\varepsilon^{(k)}) \to 0$ у тому ж просторі. Тому $y(\cdot,0) \equiv 0$, що суперечить крайовій умові. Отже, зроблене припущення є хибним, тобто $\|B(\varepsilon)\| = O(1)$ при $\varepsilon \to 0+$.

Крок 3. Покажемо, що задача (17), (18) задовольняє умову 2. За доведеним у кроках 1, 2 існують числа $\gamma' > 0$ і $\varepsilon' \in (0,\varepsilon_1)$ такі, що $\|(L(\varepsilon),B(\varepsilon))\| \leq \gamma'$ для будь-якого $\varepsilon \in [0,\varepsilon')$. Тут $\|\cdot\|$ — норма обмеженого оператора пари просторів $(W_p^{n+1})^m$ і $(W_p^n)^m \times \mathbb{C}^m$. Виберемо довільно функцію $y \in (W_p^{n+1})^m$ і покладемо $f(\cdot,\varepsilon) := L(\varepsilon)y$ і $c(\varepsilon) := B(\varepsilon)y$ для кожного $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$. Тоді

$$\big\|B(\varepsilon)y - B(0)y\big\|_{\mathbb{C}^m} \leq \big\|(f(\cdot,\varepsilon),c(\varepsilon)) - (f(\cdot,0),c(0))\big\|_{(W_p^s)^m\times\mathbb{C}^m} \leq$$
$$\leq \gamma'\,\big\|(L(\varepsilon),B(\varepsilon))^{-1}\big((f(\cdot,\varepsilon),c(\varepsilon)) - (f(\cdot,0),c(0))\big)\big\|_{s+1,p} =$$
$$= \gamma'\,\big\|(L(0),B(0))^{-1}(f(\cdot,0),c(0)) - (L(\varepsilon),B(\varepsilon))^{-1}(f(\cdot,0),c(0))\big\|_{s+1,p} \to 0$$

за умовою 2 означення. Таким чином, крайова задача (17), (18) задовольняє умову 2.

Теорему 5 доведено.

Література

1. И. И. Гихман, *По поводу одной теоремы Н. Н. Боголюбова*, Укр. мат. журн., № 4, 215 – 219 (1952).
2. М. А. Красносельский, С. Г. Крейн, *О принципе усреднения в нелинейной механике*, Успехи мат. наук, **3**, № 10, 147 – 153 (1955).
3. Я. Курцвейль, З. Ворель, *О непрерывной зависимости решений линейных уравнений от параметра*, Чехосл. мат. журн., **7**, № 4, 568 – 583 (1957).
4. А. М. Самойленко, *Об одном случае непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра*, Укр. мат. журн., **14**, № 3, 289 – 298 (1962).
5. А. Ю. Левин, *Предельный переход для несингулярных систем* $\dot{X} = A_n(t)X$, Докл. АН СССР, **176**, № 4, 774 – 777 (1967).
6. А. Ю. Левин, *Вопросы теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения*, Вестн. Ярослав. ун-та, № 5, 105 – 132 (1973).
7. Z. Opial, *Continuous parameter dependence in linear systems of differential equations*, J. Different. Equat., **3**, № 4, 571 – 579 (1967).
8. W. T. Reid, *Some limit theorems for ordinary differential systems*, J. Different. Equat., **3**, № 3, 423 – 439 (1967).
9. Нгуен Тхе Хоан, *О зависимости от параметра решений линейной системы дифференциальных уравнений*, Дифференц. уравнения, **29**, № 6, 970 – 975 (1993).
10. И. Т. Кигурадзе, *Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений*, Изд-во Тбил. ун-та, Тбилиси (1975).
11. И. Т. Кигурадзе, *Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений*, Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Новейшие достижения, **30**, 3 – 103 (1987).
12. M. Ashordia, *Criteria of correctness of linear boundary value problems for systems of generalized ordinary differential equations*, Czechословак Math. J., **46**, № 3, 385 – 404 (1996).
13. В. А. Михайлец, О. Б. Пелехата, Н. В. Рева, *О теореме Кигурадзе для линейных краевых задач*, Доп. НАН України, № 12, 8 – 13 (2017).
14. V. A. Mikhailets, O. B. Pelekhata, N. V. Reva, *Limit theorems for the solutions of boundary-value problems*, Ukr. Math. J., **70**, № 2, 243 – 251 (2018).
15. E. Hnyp, V. A. Mikhailets, A. A. Murach, *Parameter-dependent one-dimensional boundary-value problems in Sobolev spaces*, Electron. J. Different. Equat., № 81, 1 – 13 (2017).
16. V. A. Mikhailets, A. A. Murach, V. Soldatov, *Continuity in a parameter of solutions to generic boundary-value problems*, Electron. J. Qual. Theory Different. Equat., № 87, 1 – 16 (2016).
17. E. V. Gnyp, T. I. Kodlyuk, V. A. Mikhailets, *Fredholm boundary-value problems with parameter in Sobolev spaces*, Ukr. Math. J., **67**, № 5, 658 – 667 (2015).
18. T. Kodlyuk, V. Mikhailets, *Solutions of one-dimensional boundary-value problems with a parameter in Sobolev spaces*, J. Math. Sci., **190**, № 4, 589 – 599 (2013).
19. O. M. Atlasiuk, V. A. Mikhailets, *Fredholm one-dimensional boundary-value problems in Sobolev spaces*, Ukr. Math. J., **70**, № 10, 1526 – 1537 (2019).
20. O. M. Atlasiuk, V. A. Mikhailets, *Fredholm one-dimensional boundary-value problems with parameter in Sobolev spaces*, Ukr. Math. J., **70**, № 11, 1677 – 1687 (2019).
21. В. Г. Мазья, *Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций*, Изд-во Ленингр. ун-та, Ленинград (1986).
22. Л. Д. Кудрявцев, С. М. Никольский, *Пространства дифференцируемых функций многих переменных и теоремы вложения*, Совр. проблемы математики. Фундам. направления, **26**, 5 – 157 (1988).
23. Х. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, Мир, Москва (1980).
24. В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Наука, Москва (1980).
25. E. V. Gnip, *Continuity with respect to the parameter of the solutions of one-dimensional boundary-value problems in Slobodetskii spaces*, Ukr. Math. J., **68**, № 6, 849 – 861 (2016).

Одержано 10.04.21