DOI: 10.37863/umzh.v73i6.6688

УДК 512.554

Л. А. Курдаченко, О. О. Пипка (Дніпр. нац. ун-т ім. О. Гончара),
І. Я. Субботін (Нац. ун-т, Лос-Анджелес, США)

ПРО АЛГЕБРИ ЛЕЙБНІЦА, ПІДАЛГЕБРИ ЯКИХ АБО Є ІДЕАЛАМИ, АБО САМОІДЕАЛІЗОВНІ

A subalgebra S of a Leibniz algebra L is called self-idealizing in L if it coincides with its idealizer $\mathrm{I}_L(S)$. In this paper we study the structure of Leibniz algebras whose subalgebras are either ideals or self-idealizing.

Підалгебру S алгебри Лейбніца L називатимемо самоідеалізовною в L, якщо вона збігається зі своїм ідеалізатором $\mathrm{I}_L(S)$. У статті досліджується будова алгебр Лейбніца, підалгебри яких або є ідеалами, або самоідеалізовні.

1. Вступ. Нехай L — алгебра над полем F із двома бінарними операціями $+$ і $[\,,\,]$. Тоді L називатимемо *лівою алгеброю Лейбніца*, якщо вона задовольняє ліву тотожність Лейбніца

$$[[a,b],c] = [a,[b,c]] - [b,[a,c]]$$

для всіх $a,b,c \in L$. Будемо використовувати також іншу форму запису цієї тотожності:

$$[a,[b,c]] = [[a,b],c] + [b,[a,c]].$$

Вперше алгебри Лейбніца з'явилися в статті А. Блоха [3], в якій він назвав їх D-*алгебрами*. Проте у той час вони не викликали значного інтересу і не отримали належного розвитку. Цими алгебрами зацікавилися лише через два десятиліття. Термін „алгебра Лейбніца" з'явився в монографії Ж.-Л. Лоде [13] та його статті [14]. У роботі [15] Ж.-Л. Лоде та Т. Пірашвілі почали вивчати властивості алгебр Лейбніца. Теорія алгебр Лейбніца розвивається дуже інтенсивно в багатьох різних напрямках досліджень. Деякі з результатів цієї теорії наведено у монографії [1]. Зазначимо, що алгебри Лі є частинним випадком алгебр Лейбніца. І навпаки, якщо L — алгебра Лейбніца, в якій $[a,a]=0$ для кожного елемента $a \in L$, то вона є алгеброю Лі. Таким чином, алгебри Лі можна характеризувати як антикомутативні алгебри Лейбніца. У зв'язку з цим на думку спадає паралель з асоціативними структурами, такими як, наприклад, групи та асоціативні кільця. Там ми можемо помітити суттєву відмінність між абелевими та неабелевими групами, між комутативними та некомутативними кільцями. Відмінність між алгебрами Лі та алгебрами Лейбніца стає помітною вже при розгляді перших природних типів алгебр Лейбніца. Наприклад, циклічні алгебри Лі мають вимірність 1, проте структура циклічних алгебр Лейбніца є набагато складнішою [4]. Інший приклад такого ж характеру: алгебри Лі, кожна підалгебра яких є ідеалом, абелеві, тоді як у випадку алгебр Лейбніца маємо іншу значно складнішу картину [8]. Такі ж ситуації спостерігаються при вивченні інших типів алгебр Лейбніца (див., наприклад, [7, 10–12]).

У цій статті термін „алгебра Лейбніца" означає ліву алгебру Лейбніца, яка не є алгеброю Лі.

Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F, A та K — підалгебри алгебри L. *Лівий ідеалізатор* підалгебри A в K визначають за правилом

$$\mathrm{I}_K^{\mathrm{left}}(A) = \{x \in K \mid [x,a] \in A \text{ для всіх елементів } a \in A\}.$$

Лівий ідеалізатор A в K є підалгеброю в K. Справді, нехай $x, y \in \mathrm{I}_K^{\mathrm{left}}(A),\ a \in A,\ \alpha \in F$. Тоді

$$[x - y, a] = [x, a] - [y, a] \in A, \quad [\alpha x, a] = \alpha[x, a] \in A,$$

$$[[x, y], a] = [x, [y, a]] - [y, [x, a]] \in A.$$

За аналогічним правилом визначають *правий ідеалізатор* підалгебри A в K:

$$\mathrm{I}_K^{\mathrm{right}}(A) = \{x \in K|\ [a, x] \in A \text{ для всіх елементів } a \in A\}.$$

На відміну від лівого ідеалізатора правий ідеалізатор A в K вже не обов'язково є підалгеброю. Це ілюструє приклад 1.7 зі статті [2].

Ідеалізатор підалгебри A в K визначають за правилом

$$\mathrm{I}_K(A) = \{x \in K|\ [x, a], [a, x] \in A \text{ для всіх елементів } a \in A\} = \mathrm{I}_K^{\mathrm{left}}(A) \cap \mathrm{I}_K^{\mathrm{right}}(A).$$

Ідеалізатор A в K є підалгеброю в K. Справді, нехай $x, y \in \mathrm{I}_K(A),\ a \in A,\ \alpha \in F$. Як і раніше, можна довести, що $x - y, \alpha x \in \mathrm{I}_K(A)$. Більше того,

$$[[x, y], a] = [x, [y, a]] - [y, [x, a]] \in A,$$

$$[a, [x, y]] = [[a, x], y] + [x, [a, y]] \in A.$$

Для довільної підалгебри A алгебри Лейбніца L маємо такий зростаючий ряд:

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \ldots A_\alpha \leq A_{\alpha+1} \leq \ldots A_\gamma,$$

де $A_1 = \mathrm{I}_L(A),\ A_{\alpha+1} = \mathrm{I}_L(A_\alpha)$ для всіх порядкових чисел $\alpha,\ A_\lambda = \bigcup_{\mu<\lambda} A_\mu$ для всіх граничних порядкових чисел λ й $A_\gamma = \mathrm{I}_L(A_\gamma)$. Цей ряд називають *верхнім ідеалізаторним рядом* підалгебри A в L. Якщо $\gamma = 1$, то отримуємо два випадки:

$$A_1 = \mathrm{I}_L(A) = L \text{ або } A_1 = \mathrm{I}_L(A) = A.$$

Наступні типи підалгебр відповідають цим двом випадкам: A — ідеал алгебри L, A самоідеалізовна в L (тобто $A = \mathrm{I}_L(A)$). Тому виникає природне питання: *що можна сказати про алгебру Лейбніца, у якої кожна підалгебра або є ідеалом, або самоідеалізовна*?

Метою цієї статті є детальний опис таких алгебр Лейбніца.

Першим типом таких алгебр є алгебри Лейбніца, всі підалгебри яких є ідеалами. Опис таких алгебр наведено у статті [8].

Алгебру Лейбніца L називатимемо *екстраспеціальною*, якщо вона задовольняє такі умови:

(i) центр $\zeta(L)$ алгебри L нетривіальний і має вимірність 1,

(ii) фактор-алгебра $L/\zeta(L)$ є абелевою.

Екстраспеціальну алгебру E називатимемо *сильно екстраспеціальною*, якщо

$$[x, x] \neq 0$$

для кожного елемента $x \notin \zeta(E)$.

Алгебра Лейбніца L, усі підалгебри якої є ідеалами, має таку будову: $L = E \oplus Z$, де Z — підалгебра центра алгебри L, а E — сильно екстраспеціальна алгебра.

Дослідження алгебр Лейбніца, підалгебри яких або є ідеалами, або самоідеалізовні, складається з таких етапів.

Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F. Тоді L містить найбільший локально нільпотентний ідеал [9] (наслідок C1). Цей ідеал називають *локально нільпотентним радикалом* алгебри L і позначають $\mathrm{Ln}(L)$.

На першому етапі досліджуються алгебри Лейбніца, у яких локально нільпотентний радикал абелевий і нециклічний.

Теорема A. *Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F, підалгебри якої або є ідеалами, або самоідеалізовні. Припустимо, що локально нільпотентний радикал A алгебри L абелевий і нециклічний. Тоді виконуються такі умови*:

(i) $A = \zeta^{\mathrm{left}}(L)$;

(ii) $L = A \oplus W$, *де W — підалгебра вимірності* 1, $W = Fw$, $W = \mathrm{I}_L(W)$;

(iii) *існує такий ненульовий елемент $\sigma \in F$, що $[w, a] = \sigma a$ для кожного елемента $a \in A$.*

І навпаки, якщо алгебра Лейбніца L задовольняє ці умови, то кожна підалгебра алгебри L або є ідеалом в L, або самоідеалізовна в L.

На наступному етапі природно дослідити випадок, коли локально нільпотентний радикал неабелевий і нециклічний. Тут отримано такі результати.

Теорема B1. *Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F, підалгебри якої або є ідеалами, або самоідеалізовні. Припустимо, що $L \neq \mathrm{Ln}(L)$, а локально нільпотентний радикал $\mathrm{Ln}(L)$ неабелевий і нециклічний. Якщо $[\mathrm{Ln}(L), \mathrm{Ln}(L)] \leq \zeta(L)$, то $\mathrm{char}(F) = 2$ і виконуються такі умови*:

(i) $K = \mathrm{Ln}(L)$ — *сильно екстраспеціальна підалгебра; більше того, $[x, x] \neq 0$ для кожного елемента $x \notin \mathrm{Leib}(L)$*;

(ii) $[K, K] = \zeta(L) = \mathrm{Leib}(L)$;

(iii) $L = K + \langle v \rangle$, *де $[v, v] = \eta z$ для деякого ненульового елемента $\eta \in F$, $[v + \zeta(K), x + \zeta(K)] = x + \zeta(K)$ для кожного елемента $x \in K \setminus \zeta(K)$.*

Теорема B2. *Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F, підалгебри якої або є ідеалами, або самоідеалізовні. Припустимо, що локально нільпотентний радикал $\mathrm{Ln}(L) = K \neq L$ неабелевий і нециклічний. Якщо $\zeta(L)$ не містить $[K, K]$, то виконуються такі умови*:

(i) $\mathrm{char}(F) \neq 2$;

(ii) *кожна підалгебра з K є ідеалом алгебри L*;

(iii) $\mathrm{Ln}(L)$ — *сильно екстраспеціальна підалгебра*;

(iv) $[K, K] = \zeta(K) = \mathrm{Leib}(L) = \langle z \rangle$ *має вимірність* 1;

(v) $L = K + \langle v \rangle$, *де $[v + \zeta(K), x + \zeta(K)] = x + \zeta(K)$ для кожного елемента $x \in K \setminus \zeta(K)$, $[v, z] = 2z$ і $[v, v] = \nu z$ для деякого елемента $\nu \in F$ (ν може бути нульовим).*

Останнім кроком є дослідження випадку, коли локально нільпотентний радикал є циклічним. У цьому випадку його вимірність дорівнює 1 або 2. Наступна теорема описує другий випадок.

Теорема C. *Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F, підалгебри якої або є ідеалами, або самоідеалізовні. Припустимо, що локально нільпотентний радикал $\mathrm{Ln}(L)$ циклічний і має вимірність 2. Тоді або $L \neq \mathrm{Ln}(L)$, або $\mathrm{char}(F) = 2$ і L має такий базис $\{z, a, v\}$, що*

$[z, z] = [z, a] = [a, z] = [z, v] = [v, z] = 0,\ [a, a] = z,\ [v, v] = \eta z,\ [v, a] = a + \lambda z,\ [a, v] = a + \mu z,$ $\eta, \lambda, \mu \in F$, *а поліном* $X^2 + (\mu + \lambda)X + \eta$ *не має розв'язків у полі* F.

Випадок, коли вимірність локально нільпотентного радикала дорівнює 1, зводиться до вивчення алгебр Лі, абелеві підалгебри яких мають вимірність 1. Цей випадок потребує окремого розгляду. У зв'язку з цим зазначимо, що нескінченновимірна алгебра Лі, власні підалгебри якої мають вимірність 1, є у певному сенсі аналогом так званого монстра Тарського з теорії груп. Проблема існування таких алгебр Лі є однією з найцікавіших і найскладніших нерозв'язаних задач у загальній теорії алгебр Лі.

2. Алгебри Лейбніца, підалгебри яких або є ідеалами, або самоідеалізовні. Випадок, коли локально нільпотентний радикал є абелевим. Кожна алгебра Лейбніца L містить специфічний ідеал. Позначимо через $\mathrm{Leib}(L)$ підпростір, породжений усіма елементами $[a, a]$, $a \in L$. Можна показати, що $\mathrm{Leib}(L)$ є ідеалом алгебри L. Його називають *ядром Лейбніца* алгебри L.

Зазначимо, що фактор-алгебра $L/\mathrm{Leib}(L)$ є алгеброю Лі. І навпаки, якщо H — такий ідеал алгебри L, що фактор-алгебра L/H лієвська, то $\mathrm{Leib}(L) \leq H$.

Лема 2.1. *Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F, підалгебри якої або є ідеалами, або самоідеалізовні. Припустимо, що A та B є такими підалгебрами алгебри L, що B — ідеал в A. Якщо фактор-алгебра A/B нетривіальна і циклічна, то або* $\dim_F(A/B) = 1$, *або* $A/B = Fa_1 \oplus Fa_2$ *і* $[a_1, a_1] = a_2,\ [a_2, a_1] = [a_2, a_2] = 0,\ [a_1, a_2] = \lambda a_2$, *де* $\lambda \in \{0, 1\}$.

Доведення. Оскільки B — ідеал в A, то $A \leq \mathrm{I}_L(B)$, тобто $B \neq \mathrm{I}_L(B)$, а тому B є ідеалом алгебри L. Нехай a — такий елемент з A, що $A/B = \langle a + B\rangle$. Якщо $[a, a] \in B$, то циклічна підалгебра $\langle a + B\rangle$ має вимірність 1. Припустимо тепер, що $d = [a, a] \notin B$. Це означає, що ядро $\mathrm{Leib}(A/B)$ нетривіальне. Ця підалгебра абелева, зокрема кожен її підпростір є підалгеброю. Якщо припустити, що $\dim_F(\mathrm{Leib}(A/B)) > 1$, то $\langle d + B\rangle \neq \mathrm{Leib}(A/B)$. У цьому випадку циклічна підалгебра $\langle d + B\rangle$ не може бути самоідеалізовною. Тоді $\langle d, B\rangle$ також не може бути самоідеалізовною. Це означає, що $\langle d, B\rangle$ є ідеалом алгебри L. Тоді $\langle d + B\rangle$ — ідеал у фактор-алгебрі L/B. У цьому випадку $[a + B, d + B], [d + B, a + B] \in \langle d + B\rangle$. Це означає, що $\langle a + B\rangle = F(a + B) \oplus F(d + B)$, зокрема $\dim_F(\langle a + B\rangle) = 2$. Тепер можемо застосувати опис алгебр Лейбніца вимірності 2 (див., наприклад, [5]).

Лему 2.1 доведено.

Лема 2.2. *Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F, підалгебри якої або є ідеалами, або самоідеалізовні. Припустимо, що A та B є такими підалгебрами алгебри L, що B — ідеал в A, а фактор-алгебра A/B локально нільпотентна. Якщо A/B нециклічна, то кожна підалгебра з A, яка містить B, є ідеалом алгебри L. Зокрема, A та B також є ідеалами алгебри L.*

Доведення. Оскільки фактор-алгебра A/B нетривіальна, то, як і в доведенні леми 2.1, можна показати, що B є ідеалом алгебри L. Нехай a — такий довільний елемент з A, що $a \notin B$. Оскільки A/B нециклічна, то $\langle a + B\rangle \neq A/B$. Таким чином, в A можна вибрати такий елемент b, що $b \notin \langle a, B\rangle$. Оскільки A/B локально нільпотентна, то $\langle a + B, b + B\rangle/B = (\langle a, b\rangle + B)/B$ нільпотентна. Тоді $\mathrm{I}_{(\langle a,b\rangle + B)/B}(\langle a + B\rangle/B) \neq \langle a + B\rangle/B$ [2]. Це означає, що $\mathrm{I}_A(\langle a, B\rangle) \neq \langle a, B\rangle$, тобто $\langle a, B\rangle$ є ідеалом алгебри L.

Нехай

$$\mathfrak{S} = \{V \mid V \text{ — така підалгебра з } A, \text{ що } B \leq V \text{ і } V/B \text{ циклічна}\}.$$

Якщо $V \in \mathfrak{S}$, то за доведеним вище V є ідеалом алгебри L. Очевидно, підалгебри з $\mathfrak{S}$ породжують A. Це означає, що A є ідеалом алгебри L.

Лему 2.2 доведено.

***Наслідок* 2.1.** *Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F, підалгебри якої або є ідеалами, або самоідеалізовні. Припустимо, що A та B є такими підалгебрами алгебри L, що B — ідеал в A, а фактор-алгебра A/B абелева. Якщо $\dim_F(A/B) > 1$, то кожна підалгебра з A, яка містить B, є ідеалом алгебри L. Зокрема, A та B також є ідеалами алгебри L.*

***Наслідок* 2.2.** *Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F, підалгебри якої або є ідеалами, або самоідеалізовні. Якщо A є такою абелевою підалгеброю алгебри L, що $\dim_F(A) > 1$, то кожна підалгебра з A є ідеалом алгебри L. Зокрема, A також є ідеалом алгебри L.*

***Наслідок* 2.3.** *Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F, підалгебри якої або є ідеалами, або самоідеалізовні. Припустимо, що A є локально нільпотентною підалгеброю алгебри L. Якщо A нециклічна, то кожна підалгебра з A є ідеалом алгебри L. Зокрема, A також є ідеалом алгебри L.*

Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F, M — непорожня підмножина з L, а H — підалгебра алгебри L. Покладемо

$$\mathrm{Ann}_H^{\mathrm{left}}(M) = \{a \in H |\ [a, M] = \langle 0 \rangle\},$$
$$\mathrm{Ann}_H^{\mathrm{right}}(M) = \{a \in H |\ [M, a] = \langle 0 \rangle\}.$$

Підмножину $\mathrm{Ann}_H^{\mathrm{left}}(M)$ називатимемо *лівим анулятором* підмножини M в H, підмножину $\mathrm{Ann}_H^{\mathrm{right}}(M)$ — *правим анулятором* підмножини M в H. Перетин

$$\mathrm{Ann}_H(M) = \mathrm{Ann}_H^{\mathrm{left}}(M) \cap \mathrm{Ann}_H^{\mathrm{right}}(M) = \{a \in H |\ [a, M] = [M, a] = \langle 0 \rangle\}$$

називатимемо *анулятором* підмножини M в H.

Легко показати, що всі ці підмножини є підалгебрами алгебри L. Більше того, якщо M — лівий ідеал алгебри L, то нескладно довести, що $\mathrm{Ann}_L^{\mathrm{left}}(M)$ є ідеалом алгебри L. Також можна довести, що якщо M — ідеал в L, то $\mathrm{Ann}_L^{\mathrm{right}}(M)$ є лівим ідеалом алгебри L. Нарешті, $\mathrm{Ann}_L(M)$ є ідеалом алгебри L.

Лівий (відповідно *правий*) *центр* $\zeta^{\mathrm{left}}(L)$ (відповідно $\zeta^{\mathrm{right}}(L)$) алгебри Лейбніца L визначають за правилом

$$\zeta^{\mathrm{left}}(L) = \{x \in L |\ [x, y] = 0 \text{ для кожного елемента } y \in L\}$$

(відповідно

$$\zeta^{\mathrm{right}}(L) = \{x \in L |\ [y, x] = 0 \text{ для кожного елемента } y \in L\}).$$

Легко довести, що лівий центр алгебри L є ідеалом в L. Проте цього не можна сказати у загальному випадку про правий центр. Більше того, $\mathrm{Leib}(L) \leq \zeta^{\mathrm{left}}(L)$, а тому $L/\zeta^{\mathrm{left}}(L)$ є алгеброю Лі. Правий центр є підалгеброю алгебри L. У загальному випадку лівий і правий центри різні, і вони навіть можуть мати різні вимірності (див. [6]).

Центр $\zeta(L)$ алгебри L визначають за правилом

$$\zeta(L) = \{x \in L |\ [x, y] = [y, x] = 0 \text{ для кожного елемента } y \in L\}.$$

Центр є ідеалом алгебри L.

Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F. Лінійне перетворення f алгебри L називатимемо *диференціюванням*, якщо

$$f([a,b]) = [f(a), b] + [a, f(b)]$$

для всіх $a, b \in L$. Позначимо через $\mathrm{End}_F(L)$ множину всіх лінійних перетворень алгебри L. Тоді $\mathrm{End}_F(L)$ — асоціативна алгебра відносно операцій $+$ і $\circ$. Як завжди, $\mathrm{End}_F(L)$ є алгеброю Лі відносно операцій $+$ і $[\,,\,]$, де $[f,g] = f \circ g - g \circ f$ для всіх $f, g \in \mathrm{End}_F(L)$. Можна показати, що підмножина $\mathrm{Der}(L)$ усіх диференціювань алгебри L є підалгеброю лієвської алгебри $\mathrm{End}_F(L)$ (див., наприклад, [5]).

Лема 2.3. *Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F, A — абелевий ідеал алгебри L. Якщо кожна підалгебра з A є ідеалом алгебри L, то для кожного елемента $x \in L$ існують такі елементи $\lambda_x, \rho_x \in F$, що $[x,a] = \lambda_x a$ та $[a,x] = \rho_x a$ для кожного елемента $a \in A$.*

Доведення. Якщо $\dim_F(A) = 1$, то все очевидно. Припустимо, що $\dim_F(A) > 1$. Оскільки ідеал A абелевий, то підпростір Fa є підалгеброю в A для кожного елемента $a \in A$. Таким чином, циклічна підалгебра $\langle a \rangle = Fa$ є ідеалом алгебри L. Якщо $x \in L$, то $[x,a] = \alpha a$ (відповідно $[a,x] = \beta a$) для деяких елементів $\alpha, \beta \in F$. Оскільки $\dim_F(A) > 1$, то ми можемо вибрати такий елемент $c \in A$, що a та c лінійно незалежні. Аналогічними міркуваннями для елемента c отримуємо, що $[x,c] = \gamma c$ (відповідно $[c,x] = \sigma c$) для деяких елементів $\gamma, \sigma \in F$. Тоді

$$[x, a-c] = [x,a] - [x,c] = \alpha a - \gamma c \text{ (відповідно } [a-c, x] = [a,x] - [c,x] = \beta a - \sigma c).$$

З іншого боку, $a - c \in A$, тому $F(a-c)$ є ідеалом алгебри L. Отже,

$$[x, a-c] = \eta(a-c) = \eta a - \eta c \text{ (відповідно } [a-c, x] = \mu(a-c) = \mu a - \mu c)$$

для деяких $\eta, \mu \in F$. Це означає, що $\alpha a - \gamma c = \eta a - \eta c$ (відповідно $\beta a - \sigma c = \mu a - \mu c$). Таким чином, $\alpha = \eta = \gamma$ (відповідно $\beta = \mu = \sigma$).

Інакше кажучи, для кожного елемента $x \in L$ існують такі елементи $\lambda_x, \rho_x \in F$, що $[x,a] = \lambda_x a$ та $[a,x] = \rho_x a$ для кожного $a \in A$.

Лему 2.3 доведено.

Лема 2.4. *Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F, підалгебри якої або є ідеалами, або самоідеалізовні, A — максимальний абелевий ідеал алгебри L, який містить* $\mathrm{Leib}(L)$. *Припустимо, що* $\dim_F(A) > 1$. *Тоді виконуються такі умови*:

(i) $A = \zeta^{\mathrm{left}}(L)$;

(ii) $L/\mathrm{Ann}_L(A)$ *має вимірність* 1;

(iii) *для кожного $x \in L$ існує такий елемент $\sigma_x \in F$, що $[x,a] = \sigma_x a$ для кожного $a \in A$*;

(iv) *кожна підалгебра з* $\mathrm{Ann}_L(A)$ *є ідеалом алгебри* L.

Доведення. Для елемента $x \in L$ розглянемо відображення $\mathrm{l}_x : A \to A$, визначене за таким правилом: $\mathrm{l}_x(a) = [x,a]$ для кожного елемента $a \in A$. Тоді відображення l_x є диференціюванням ідеалу A, а множина $\{\mathrm{l}_x |\ x \in L\}$ — підалгеброю алгебри $\mathrm{Der}(A)$ всіх диференціювань ідеалу A (див., наприклад, [5]).

За наслідком 2.2 кожна підалгебра з A є ідеалом алгебри L. Тоді з леми 2.3 випливає, що для кожного елемента $x \in L$ існують такі елементи $\sigma_x, \rho_x \in F$, що $[x,a] = \sigma_x a$ та $[a,x] = \rho_x a$ для кожного елемента $a \in A$.

Оскільки $\mathrm{Leib}(L) \leq \zeta^{\mathrm{left}}(L)$, то A містить такий елемент a_0, що $[a_0, x] = 0$ для кожного елемента $x \in L$. Це означає, що $[a, x] = 0$ для кожного елемента $a \in A$. Оскільки це виконується для кожного елемента $x \in L$, то $A \leq \zeta^{\mathrm{left}}(L)$. З того, що $\zeta^{\mathrm{left}}(L)$ — абелевий ідеал алгебри L і A — максимальний абелевий ідеал алгебри L, випливає, що $A = \zeta^{\mathrm{left}}(L)$.

Розглянемо відображення $\delta : L \to F$, визначене за таким правилом: $\delta(x) = \sigma_x$ для кожного елемента $x \in L$. Для елементів $x, y \in L$ маємо

$$\sigma_{x+y}a = [x + y, a] = [x, a] + [y, a] = \sigma_x a + \sigma_y a = (\sigma_x + \sigma_y)a,$$
$$\sigma_{\beta x}a = [\beta x, a] = \beta[x, a] = \beta(\sigma_x a) = (\beta\sigma_x)a,$$

звідки випливає, що $\sigma_{x+y} = \sigma_x + \sigma_y$ і $\sigma_{\beta x} = \beta\sigma_x$ для всіх $x, y \in L$, $\beta \in F$. Це означає, що відображення δ лінійне. Більше того,

$$\mathrm{Ker}(\delta) = \{x \in L |\ \delta(x) = \sigma_x = 0\}.$$

Тобто $[x, a] = 0$ для кожного елемента $x \in A$. Інакше кажучи, $\mathrm{Ker}(\delta) \leq \mathrm{Ann}_L^{\mathrm{left}}(A)$. Обернене включення є очевидним, тому $\mathrm{Ker}(\delta) = \mathrm{Ann}_L^{\mathrm{left}}(A)$. Як було зазначено, $\mathrm{Ann}_L^{\mathrm{left}}(A)$ є двостороннім ідеалом алгебри L, тому фактор-алгебра $L/\mathrm{Ann}_L^{\mathrm{left}}(A)$ ізоморфна до F. Зокрема, вона має вимірність 1.

З рівності $A = \zeta^{\mathrm{left}}(L)$ випливає, що $L = \mathrm{Ann}_L^{\mathrm{right}}(A)$. Таким чином, $\mathrm{Ann}_L^{\mathrm{left}}(A) = \mathrm{Ann}_L(A)$.

Нехай $z \in \mathrm{Ann}_L(A)$. Якщо $z \in A$, то, як зазначено вище, підалгебра $\langle z\rangle$ є ідеалом алгебри L. Припустимо, що $z \notin A$. За лемою 2.1 циклічна підалгебра $\langle a\rangle$ має вимірність, не більшу за 2. Якщо $\dim_F(\langle z\rangle) = 1$, то $\langle z\rangle = Fz$ і $\langle z\rangle \cap A = \langle 0\rangle$. Тоді для кожного ненульового елемента $a \in A$ отримуємо $[a, z] = [z, a] = 0$. Це означає, що $a \in \mathrm{I}_L(\langle z\rangle)$, зокрема $\mathrm{I}_L(\langle z\rangle) \neq \langle z\rangle$. У такому випадку $\langle z\rangle$ є ідеалом алгебри L. Припустимо тепер, що $\dim_F(\langle z\rangle) = 2$. Якщо покласти $v = [z, z]$, то $v \in A$. Оскільки $\dim_F(A) > 1$, можна вибрати такий елемент $d \in A$, що $Fv \cap Fd = \langle 0\rangle$. Тоді $Fd \cap \langle z\rangle = \langle 0\rangle$. Отже, знову отримуємо $[d, z] = [z, d] = 0$. Це означає, що $d \in \mathrm{I}_L(\langle z\rangle)$, тому $\mathrm{I}_L(\langle z\rangle) \neq \langle z\rangle$. Інакше кажучи, $\langle z\rangle$ є ідеалом алгебри L. Таким чином, кожна циклічна підалгебра з $\mathrm{Ann}_L(A)$ є ідеалом алгебри L. Це означає, що кожна підалгебра з $\mathrm{Ann}_L(A)$ — ідеал алгебри L.

Лему 2.4 доведено.

***Наслідок* 2.4.** *Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F, підалгебри якої або є ідеалами, або самоідеалізовні. Припустимо, що* $\dim_F(\mathrm{Leib}(L)) > 1$. *Тоді фактор-алгебра $L/\mathrm{Ln}(L)$ має вимірність, не більшу за* 1, *а кожна підалгебра з $\mathrm{Ln}(L)$ є ідеалом алгебри L.*

Доведення. Нехай A — максимальний абелевий ідеал з L, який містить $\mathrm{Leib}(L)$. За лемою 2.4 кожна підалгебра з $\mathrm{Ann}_L(A)$ є ідеалом алгебри L. Тоді анулятор $\mathrm{Ann}_L(A)$ нільпотентний [8], тому

$$\mathrm{Ann}_L(A) \leq \mathrm{Ln}(L).$$

За лемою 2.4 фактор-алгебра $L/\mathrm{Ln}(L)$ має вимірність, не більшу за 1, а кожна підалгебра з $\mathrm{Ln}(L)$ є ідеалом алгебри L.

***Доведення теореми* A.** З того факту, що ядро $\mathrm{Leib}(L)$ абелеве, випливає, що $\mathrm{Leib}(L) \leq A$. Локально нільпотентний радикал A нециклічний, тому $\dim_F(A) > 1$. Оскільки A — максимальний локально нільпотентний ідеал, то A є максимальним абелевим ідеалом алгебри L. За лемою 2.4 кожна підалгебра з A є ідеалом алгебри L, а фактор-алгебра L/A має вимірність, не більшу за 1. Припустимо, що $L \neq A$. Виберемо такий елемент v, що $L = A \oplus Fv$. Лема 2.4 показує, що $A = \zeta^{\text{left}}(L)$. Також з леми 2.4 випливає, що існує такий елемент $\sigma \in F$, що $[v, a] = \sigma a$ для кожного елемента $a \in A$. Оскільки $A \neq L$, то $\sigma \neq 0$. Нехай b — довільний елемент з A. Як зазначено вище, підалгебра Fb є ідеалом алгебри L. Якщо d — довільний елемент з Fb, то $d = \lambda b$ для деякого $\lambda \in F$. Тоді

$$d = \lambda(\sigma^{-1}\sigma)b = \lambda\sigma^{-1}(\sigma b) = \lambda\sigma^{-1}[v, b] = [v, \lambda\sigma^{-1}b] \in [v, Fb].$$

Це означає, що $[v, Fb] = Fb$. Оскільки це виконується для кожної одновимірної підалгебри з A, то $A = [v, A]$.

Нехай x — довільний елемент алгебри L. З того факту, що $\dim_F(L/A) = 1$, випливає, що фактор-алгебра L/A абелева. Це означає, що $[v, x] = c \in A$. За доведеним вище A містить такий елемент u, що $c = [v, u]$. Тоді $[v, x] = [v, u]$, а тому $[v, x - u] = 0$. Це означає, що $x - u \in \mathrm{Ann}_L^{\text{right}}(v)$, тобто $x \in A + \mathrm{Ann}_L^{\text{right}}(v)$. Оскільки x — довільний елемент з L, то

$$L = A + \mathrm{Ann}_L^{\text{right}}(v).$$

Нехай $a \in A \cap \mathrm{Ann}_L^{\text{right}}(v)$ і $a \neq 0$. Тоді $[v, a] = 0$. З іншого боку, $[v, a] = \sigma a$, де σ ненульове. Отримали суперечність. Це доводить, що $A \cap \mathrm{Ann}_L^{\text{right}}(v) = \langle 0 \rangle$. Якщо покласти $W = \mathrm{Ann}_L^{\text{right}}(v)$, то $L = A \oplus W$. З ізоморфізму $W \cong L/A$ випливає, що підалгебра W абелева і має вимірність 1, тобто $W = Fw$. Також $w = \lambda v + a_1$ для деякого елемента $\lambda \in F$ і $a_1 \in A$. Оскільки $w \notin A$, то $\lambda \neq 0$. Замінюючи w на $\lambda^{-1}w$, можемо припустити, що $w = v + a_2$. Тоді $[w, a] = [v, a] = \sigma a$ для кожного елемента $a \in A$.

Якщо припустити, що $\mathrm{I}_L(W) \neq W$, то підалгебра W є ідеалом. Але у цьому випадку алгебра L абелева, що неможливо. Ця суперечність показує, що підалгебра W самоідеалізовна.

І навпаки, нехай тепер L — алгебра Лейбніца, яка задовольняє всі перелічені умови. З умов (i) та (iii) випливає, що кожна циклічна підалгебра з A є ідеалом алгебри L. Це означає, що кожна підалгебра з A є ідеалом алгебри L.

Нехай S — довільна підалгебра алгебри L. Якщо A містить S, то за доведеним вище S є ідеалом алгебри L. Тому припустимо, що A не містить S. Тоді S містить елемент $\mu w + e$, де $0 \neq \mu \in F$ і $e \in A$. Маємо $L = A + S$. Якщо припустити, що $\mathrm{I}_L(S) \neq S$, то можемо вибрати такий елемент $a \in A$, що $[S, a] \leq S$ і $a \notin S$. Тоді

$$[\mu w + e, a] = \mu[w, a] = \mu\sigma a \in S.$$

Оскільки $\mu\sigma \neq 0$, то $a \in S$, що неможливо. Ця суперечність показує, що $\mathrm{I}_L(S) = S$.

Теорему А доведено.

3. Алгебри Лейбніца, підалгебри яких або є ідеалами, або самоідеалізовні. Випадок, коли локально нільпотентний радикал є неабелевим.

Лема 3.1. *Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F, f — диференціювання алгебри L. Тоді $f(\zeta^{\text{left}}(L)) \leq \zeta^{\text{left}}(L)$, $f(\zeta^{\text{right}}(L)) \leq \zeta^{\text{right}}(L)$ і $f(\zeta(L)) \leq \zeta(L)$.*

Доведення. Нехай x — довільний елемент алгебри L і $z \in \zeta^{\text{left}}(L)$. Тоді $[z, x] = 0$. Оскільки диференціювання є лінійним відображенням, то $f([z, x]) = 0$. З іншого боку,

$$0 = f(0) = f([z, x]) = [f(z), x] + [z, f(x)] = [f(z), x],$$

тобто $f(z) \in \zeta^{\text{left}}(L)$. Нехай $z \in \zeta^{\text{right}}(L)$. Тоді $[x, z] = 0$ та

$$0 = f(0) = f([x, z]) = [f(x), z] + [x, f(z)] = [x, f(z)],$$

тобто $f(z) \in \zeta^{\text{right}}(L)$. Поєднуючи два результати, отримуємо, що $f(\zeta(L)) \leq \zeta(L)$.

Лему 3.1 доведено.

Лема 3.2. *Нехай* L — *алгебра Лейбніца над полем* F, *де* $\mathrm{char}(F) \neq 2$, $L = Fa_1 \oplus Fa_2$ *й* $[a_1, a_1] = a_2$, $[a_1, a_2] = [a_2, a_1] = [a_2, a_2] = 0$. *Лінійне відображення* f *є диференціюванням алгебри* L *тоді й тільки тоді, коли* $f(a_1) = \alpha a_1 + \beta a_2$ *для деяких елементів* $\alpha, \beta \in F$ *і* $f(a_2) = 2\alpha a_2$.

Доведення. З рівності $\zeta(L) = Fa_2$ та леми 3.1 випливає, що $f(a_2) = \gamma a_2$ для деякого елемента $\gamma \in F$. Тоді

$$\gamma a_2 = f(a_2) = f([a_1, a_1]) = [f(a_1), a_1] + [a_1, f(a_1)] =$$

$$= [\alpha a_1 + \beta a_2, a_1] + [a_1, \alpha a_1 + \beta a_2] = \alpha[a_1, a_1] + \alpha[a_1, a_1] = 2\alpha a_2.$$

Це означає, що $f(a_2) = 2\alpha a_2$.

Нехай $f(a_1) = \alpha a_1 + \beta a_2$, x, y — довільні елементи алгебри L. Тоді $x = \lambda a_1 + \mu a_2$, $y = \sigma a_1 + \rho a_2$, звідки випливає, що

$$[x, y] = [\lambda a_1 + \mu a_2, \sigma a_1 + \rho a_2] = \lambda\sigma[a_1, a_1] + \lambda\rho[a_1, a_2] + \mu\sigma[a_2, a_1] + \mu\rho[a_2, a_2] =$$

$$= \lambda\sigma a_2,$$

$$f(x) = f(\lambda a_1 + \mu a_2) = \lambda f(a_1) + \mu f(a_2) = \lambda(\alpha a_1 + \beta a)_2) + \mu(2\alpha a_2) =$$

$$= \lambda\alpha a_1 + \lambda\beta a_2 + 2\mu\alpha a_2 = \lambda\alpha a_1 + (\lambda\beta + 2\mu\alpha)a_2,$$

$$f(y) = f(\sigma a_1 + \rho a_2) = \sigma f(a_1) + \rho f(a_2) = \sigma(\alpha a_1 + \beta a_2) + \rho(2\alpha a_2) =$$

$$= \sigma\alpha a_1 + \sigma\beta a_2) + 2\rho\alpha a_2 = \sigma\alpha a_1 + (\sigma\beta + 2\rho\alpha)a_2,$$

$$2\alpha\lambda\sigma a_2 = \lambda\sigma f(a_2) = f(\lambda\sigma a_2) = f([x, y]) = [f(x), y] + [x, f(y)] =$$

$$= [\lambda\alpha a_1 + (\lambda\beta + 2\mu\alpha)a_2, \sigma a_1 + \rho a_2] + [\lambda a_1 + \mu a_2, \sigma\alpha a_1 + (\sigma\beta + 2\rho\alpha)a_2] =$$

$$= \lambda\alpha\sigma[a_1, a_1] + \lambda\sigma\alpha[a_1, a_1] = 2\alpha\lambda\sigma a_2.$$

Таким чином, кожне лінійне перетворення f алгебри L, яке задовольняє умови $f(a_1) = \alpha a_1 + \beta a_2$ і $f(a_2) = 2\alpha a_2$, є диференціюванням алгебри L.

Лему 3.2 доведено.

Використовуючи аналогічні міркування, можна довести таке твердження.

Лема 3.3. *Нехай* L — *алгебра Лейбніца над полем* F, *де* $\mathrm{char}(F) = 2$, $L = Fa_1 \oplus Fa_2$ *й* $[a_1, a_1] = a_2$, $[a_1, a_2] = [a_2, a_1] = [a_2, a_2] = 0$. *Лінійне відображення* f *є диференціюванням алгебри* L *тоді й тільки тоді, коли* $f(a_2) = 0$.

Наслідок **3.1.** *Нехай* L — *алгебра Лейбніца над полем* F, *де* $\mathrm{char}(F) = 2$, $L = Fa_1 \oplus Fa_2$ *й* $[a_1, a_1] = a_2$, $[a_1, a_2] = [a_2, a_1] = [a_2, a_2] = 0$. *Тоді алгебра диференціювань алгебри* L *ізоморфна підалгебрі матриць з* $M_2(F)$, *які мають вигляд* $\alpha E_{11} + \beta E_{21}$, $\alpha, \beta \in F$. *Зокрема, вона абелева і має вимірність* 2.

Доведення. Якщо f є диференціюванням алгебри L, то за лемою 3.3 $f(a_1) = \alpha a_1 + \beta a_2$ і $f(a_2) = 0$ для деяких елементів $\alpha, \beta \in F$. Таким чином, матриця відображення f у базисі $\{a_1, a_2\}$ є такою: $\alpha E_{11} + \beta E_{21}$, $\alpha, \beta \in F$. І навпаки, якщо лінійне відображення f має у базисі $\{a_1, a_2\}$ таку матрицю, то f є диференціюванням алгебри L. Це означає, що алгебра диференціювань алгебри L ізоморфна підалгебрі матриць, які мають вигляд $\alpha E_{11} + \beta E_{21}$, $\alpha, \beta \in F$.

Лема 3.4. *Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F, підалгебри якої або є ідеалами, або самоідеалізовні. Припустимо, що A є ідеалом алгебри L, а фактор-алгебра B/A — нетривіальною підалгеброю з L/A. Якщо S/A є такою підалгеброю з L/A, що $S/A \leq \mathrm{Ann}_{L/A}(B/A)$ і S/A не містить B/A, то S є ідеалом алгебри L.*

Доведення. Виберемо у фактор-алгебрі B/A такий елемент zA, що $zA \notin S/A$. Оскільки $S/A \leq \mathrm{Ann}_{L/A}(B/A)$, то $[zA, S/A] = [S/A, zA] = \langle 0 \rangle$. Це означає, що $[z, S], [S, z] \leq A \leq S$. Вибір елемента z вказує на те, що $z \notin S$. Інакше кажучи, $\mathrm{I}_L(S) \neq S$, звідки випливає, що S є ідеалом алгебри L.

Лему 3.4 доведено.

Лема 3.5. *Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F, підалгебри якої або є ідеалами, або самоідеалізовні. Припустимо, що локально нільпотентний радикал $\mathrm{Ln}(L) = K \neq L$ неабелевий і нециклічний. Тоді кожна підалгебра з K є ідеалом алгебри L. Якщо $[K, K] \leq \zeta(L)$, то K є сильно екстраспеціальною алгеброю, $[K, K] = \zeta(K) = \mathrm{Leib}(L) \leq \zeta(L)$.*

Доведення. За наслідком 2.3 кожна підалгебра з K є ідеалом алгебри L. Оскільки радикал K неабелевий, то $K = E \oplus Z$, де Z — підалгебра центра K, а E — сильно екстраспеціальна алгебра. Оскільки радикал K неабелевий, то підалгебра E нетривіальна. Виберемо в E такий елемент y, що $z = [y, y] \neq 0$. Нехай Y — підалгебра, породжена елементом y. Тоді $Y = Fy \oplus Fz$ і $[z, y] = [y, z] = 0$. З огляду на попередні зауваження отримуємо, що Y є ідеалом алгебри L. Оскільки $[K, K] = [E, E]$ має вимірність 1, то з того факту, що $z \in [E, E]$, випливає, що $Fz = [K, K]$, тобто $z \in \zeta(L)$.

Припустимо, що підалгебра Z нетривіальна, і розглянемо підалгебру $\langle z \rangle \oplus Z$. Тоді вона і кожна її підалгебра є ідеалами алгебри L. З леми 2.3 випливає, що $Z \leq \zeta(L)$. Розглянемо фактор-алгебру $L/\langle z \rangle$. Її ідеал $K/\langle z \rangle$ абелевий, а також очевидно, що $\dim_F(K/\langle z \rangle) > 1$. За лемою 2.2 кожна підалгебра з $K/\langle z \rangle$ є ідеалом в $L/\langle z \rangle$. Використовуючи той факт, що фактор $(\langle z \rangle \oplus Z)/\langle z \rangle$ є центральним в L, і лему 2.3, отримуємо, що фактор $K/\langle z \rangle$ є центральним в $L/\langle z \rangle$. Оскільки $L \neq K$, то можна вибрати такий елемент v, що $v \notin K$. За лемою 2.1 підалгебра $V = \langle v \rangle$ має вимірність 1 або 2. Припустимо, що $\dim_F(V) = 1$. Тоді $V \cap K = \langle 0 \rangle$, зокрема $z \notin V$, але $z \in \mathrm{I}_L(V)$. Це означає, що V – ідеал алгебри L. Оскільки $\dim_F(V) = 1$, то підалгебра V абелева. Але у цьому випадку $\mathrm{Ln}(L) = K$ містить V, що неможливо. Нехай тепер $\dim_F(V) = 2$. Якщо $[V, V] \cap K = \langle 0 \rangle$, то знову отримуємо, що $z \notin [V, V]$ і $z \in \mathrm{I}_L([V, V])$. Отже, $[V, V]$ є ідеалом алгебри L. Оскільки $\dim_F([V, V]) = 1$, то підалгебра $[V, V]$ абелева. Але у цьому випадку $\mathrm{Ln}(L) = K$ містить $[V, V]$, що суперечить умові $[V, V] \cap K = \langle 0 \rangle$. Отже, $[V, V] \cap K \neq \langle 0 \rangle$. Якщо $\langle 0 \rangle \neq [V, V] \cap \langle z \rangle$, то оскільки $\dim_F([V, V]) = 1$, $[V, V] = \langle z \rangle$. Отже, $\langle 0 \rangle = V/\langle z \rangle \cap K/\langle z \rangle$. Оскільки фактор $K/\langle z \rangle$ є центральним в $L/\langle z \rangle$, то $\mathrm{I}_L(V) \neq V$, тобто V — ідеал алгебри L. З того факту, що $[V, V] = \langle z \rangle \leq \zeta(L)$, випливає нільпотентність підалгебри V. Але у цьому випадку знову K повинно містити V, що неможливо. Ця суперечність показує, що $\langle 0 \rangle = [V, V] \cap \langle z \rangle$. Тоді $V \cap \langle z \rangle = \langle 0 \rangle$. У цьому випадку $z \notin V$, але $z \in \mathrm{I}_L(V)$. Це означає, що V — ідеал алгебри L. З іншого боку,

$$([V, V] + \langle z \rangle)/\langle z \rangle \leq K/\langle z \rangle \leq \zeta(L/\langle z \rangle).$$

Тобто фактор-алгебра $(V + \langle z \rangle)/\langle z \rangle$ нільпотентна. Включення $\langle z \rangle \leq \zeta(L)$ показує, що $V + \langle z \rangle$ також нільпотентна. Зокрема, сама підалгебра V є нільпотентною. Але у цьому випадку знову отримуємо, що K повинно містити V. Ця суперечність доводить рівність $Z = \langle 0 \rangle$, звідки випливає, що $K = E$ — сильно екстраспеціальна алгебра Лейбніца.

Припустимо тепер, що $\mathrm{Leib}(L) \neq \langle z \rangle$. Оскільки $\mathrm{Leib}(L)$ — абелевий ідеал, то K містить $\mathrm{Leib}(L)$. Тоді $\dim_F(\mathrm{Leib}(L)) > 1$, тобто $\mathrm{Leib}(L)$ повинен містити елемент $u \notin \langle z \rangle$. Оскільки ядро $\mathrm{Leib}(L)$ абелеве, то $[u, u] = 0$. З іншого боку, K є сильно екстраспеціальною алгеброю Лейбніца, а тому $[u, u] \neq 0$. Ця суперечність показує, що $\mathrm{Leib}(L) = \langle z \rangle$.

Лему 3.5 доведено.

***Наслідок* 3.2.** *Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F, підалгебри якої або є ідеалами, або самоідеалізовні. Припустимо, що локально нільпотентний радикал $\mathrm{Ln}(L) = K \neq L$ неабелевий і нециклічний. Якщо $[K, K] \leq \zeta(L)$, то $\mathrm{char}(F) = 2$.*

Доведення. За лемою 3.5 K є сильно екстраспеціальною алгеброю, $[K, K] = \zeta(K) = \mathrm{Leib}(L)$. Оскільки радикал K неабелевий, то підалгебра E нетривіальна. Виберемо в E такий елемент y, що $z = [y, y] \neq 0$. Нехай Y — підалгебра, породжена елементом y. Тоді $Y = Fy \oplus Fz$ і $[z, y] = [y, z] = 0$. За нашими умовами Y є ідеалом алгебри L. Як і в лемі 3.5, можна показати, що $\langle z \rangle = [K, K]$, тому $z \in \zeta(L)$.

Для елемента $x \in L$ розглянемо відображення $\mathrm{l}_x : Y \to Y$, визначене за таким правилом: $\mathrm{l}_x(a) = [x, a]$ для кожного елемента $a \in Y$. Тоді відображення l_x є диференціюванням підалгебри Y.

Припустимо тепер, що $\mathrm{char}(F) \neq 2$. Згідно з лемою 3.2 і тим фактом, що $\mathrm{l}_x(z) = 0$, отримуємо, що $\mathrm{l}_x(y) = \beta z$ для деякого елемента $\beta \in F$. Інакше кажучи, $[x, y] \in \langle z \rangle$ для всіх елементів $x \in L$. Це означає, що

$$Y/\langle z \rangle \leq \zeta^{\mathrm{right}}(L/\langle z \rangle).$$

За лемою 3.5 $\mathrm{Leib}(L) = \langle z \rangle$. Це означає, що $L/\langle z \rangle$ — алгебра Лі. Тоді $\zeta^{\mathrm{right}}(L/\langle z \rangle) = \zeta(L/\langle z \rangle)$, тобто $Y/\langle z \rangle \leq \zeta(L/\langle z \rangle)$. З леми 2.2 випливає, що кожна підалгебра з $K/\langle z \rangle$ є ідеалом в $L/\langle z \rangle$. Застосовуючи лему 2.3, отримуємо, що фактор $K/\langle z \rangle$ є центральним в $L/\langle z \rangle$. Оскільки $L/\langle z \rangle$ — алгебра Лі, то кожна циклічна підалгебра $X/\langle z \rangle$ з $L/\langle z \rangle$ має вимірність 1. Це означає, що або $K/\langle z \rangle$ містить $X/\langle z \rangle$, або $K/\langle z \rangle \cap X/\langle z \rangle = \langle 0 \rangle$. У першому випадку лема 3.5 показує, що X — ідеал алгебри L. У другому випадку лема 3.4 показує, що X — ідеал алгебри L. Отже, кожна циклічна підалгебра з $L/\langle z \rangle$ є ідеалом в $L/\langle z \rangle$. Оскільки $L/\langle z \rangle$ є алгеброю Лі, то фактор-алгебра $L/\langle z \rangle$ абелева. Це означає, що L нільпотентна, що суперечить умові $L \neq K$. Ця суперечність показує, що $\mathrm{char}(F) = 2$.

***Доведення теореми* B1.** За наслідком 3.2 $\mathrm{char}(F) = 2$. Позначимо через K локально нільпотентний радикал алгебри L. Згідно з лемою 3.5 кожна підалгебра з K є ідеалом алгебри L, а K — сильно екстраспеціальною алгеброю. Виберемо в K такий елемент y, що $z = [y, y] \neq 0$. Якщо Y — підалгебра, породжена елементом y, то $Y = Fy \oplus Fz$ і $[z, y] = [y, z] = 0$. Як зазначено раніше, Y є ідеалом алгебри L. Також з леми 3.5 випливає, що $Z = Fz = \langle z \rangle = [K, K] = \mathrm{Leib}(L) \leq \zeta(L)$. Це означає, що фактор-алгебра L/Z неабелева (в іншому випадку алгебра L була б нільпотентною, що суперечило б умові $\mathrm{Ln}(L) \neq L$). З рівності $Z = \mathrm{Leib}(L)$ випливає, що L/Z — алгебра Лі.

Припустимо, що L містить такий елемент $w \notin Z$, що $[w, w] = 0$. Тоді $\langle w \rangle = Fw$ і $\langle w \rangle \cap Z = \langle 0 \rangle$. Із включення $Z \leq \zeta(L)$ випливає, що $z \in \mathrm{I}_L(\langle w \rangle)$, зокрема $\mathrm{I}_L(\langle w \rangle) \neq \langle w \rangle$. Це означає, що $\langle w \rangle$ — ідеал алгебри L. Оскільки підалгебра $\langle w \rangle$ абелева, то $\langle w \rangle \leq \mathrm{Ln}(L)$. З іншого боку, як вже зазначалося, L є сильно екстраспеціальною алгеброю. Ми отримали суперечність. Вона показує, що L задовольняє умову (i).

Оскільки радикал K нециклічний, то $K \neq Y$. Це означає, що $\dim_F(K/Z) > 1$. Нехай $A = \mathrm{Ann}_L^{\mathrm{left}}(Y)$. Оскільки Y — ідеал алгебри L, то A також є ідеалом в L. Із включення $Z \leq \zeta(L)$ випливає, що $Z \leq A$. Очевидно, що $y \notin A$, тому $A \cap Y = Z$. Це означає, що перетин $Y/Z \cap A/Z$ тривіальний. Нехай a — такий довільний елемент з A, що $a \notin Z$. Тоді $a \notin Y$ і $[a, y] = [y, a] = 0$. Це означає, що $\mathrm{I}_L(\langle a \rangle) \neq \langle a \rangle$, і тому $\langle a \rangle$ є ідеалом алгебри L. Оскільки $[a, a] \in Z$, то підалгебра $\langle a \rangle$ нільпотентна, тому $\langle a \rangle \leq \mathrm{Ln}(L)$. Отже, $A \leq \mathrm{Ln}(L)$. Згідно з твердженням 3.2 роботи [6] та наслідком 3.1 $\dim_F(L/A) \leq 2$. Тоді

$$\dim_F(L/(A + Y)) \leq 1.$$

Оскільки $(A + Y) \leq \mathrm{Ln}(L)$ і $L \neq \mathrm{Ln}(L)$, отримуємо, що

$$\dim_F(L/\mathrm{Ln}(L)) = 1.$$

Виберемо такий елемент u, що $u \notin K$. Тоді $L = K \oplus Fu$. З наслідку 2.1 випливає, що кожна підалгебра з K, яка містить Z, є ідеалом алгебри L. За лемою 2.3 існує такий елемент $\alpha \in F$, що $[a + Z, u + Z] = \alpha(a + Z)$ для кожного елемента $a \in K$. Зазначимо, що $\alpha \neq 0$. Тоді $[a, u] = \alpha a + z_a$ для деякого елемента $z_a \in Z$. Нехай a, b — такі елементи з K, що $a, b \notin Z$. Оскільки $[a, b] \in Z$, то $[[a, b], v] = 0$. Тоді

$$0 = [[a, b], u] = [a, [b, u]] - [b, [a, u]] = [a, \alpha b + z_b] - [b, \alpha a + z_a] =$$
$$= \alpha[a, b] - \alpha[b, a] = \alpha([a, b] - [b, a]).$$

Оскільки $\alpha \neq 0$, то $[a, b] = [b, a]$.

За лемою 3.2 $[u, y] = \lambda y + \mu z$. Використовуючи той факт, що кожна підалгебра з K/Z є ідеалом в L/Z, та лему 2.3, отримуємо, що $[u + Z, a + Z] = \lambda a + Z$ для кожного елемента $a \in K \setminus Z$. Оскільки $u \notin K$, то $\lambda \neq 0$. Тоді покладемо $v = \lambda^{-1} u$, звідки отримаємо, що $[v + Z, a + Z] = a + Z$ для кожного елемента $a \in K \setminus Z$.

Розглянемо тепер циклічну підалгебру $\langle v \rangle$. За лемою 2.1 або $\langle v \rangle = Fv$, або $\langle v \rangle = Fv \oplus \oplus F[v, v]$. У першому випадку $\langle v \rangle \cap \mathrm{Leib}(L) = \langle 0 \rangle$. Включення $\mathrm{Leib}(L) \leq \zeta(L)$ показує, що $z \in \mathrm{I}_L(\langle v \rangle)$. Тоді $\langle v \rangle$ повинно бути ідеалом алгебри L. У цьому випадку $\langle v \rangle \cap K = \langle 0 \rangle$. Але тоді $v \in \mathrm{Ann}_L(K)$, що неможливо. Ця суперечність показує, що $[v, v] = \eta z$ для деякого ненульового елемента $\eta \in F$.

Теорему В1 доведено.

Звернемо увагу на деякі деталі будови локально нільпотентного радикала $\mathrm{Ln}(L)$.

Нехай $\{y + Z, w_\lambda + Z | \ \lambda \in \Lambda\}$ — базис фактор-алгебри K/Z. Покладемо $a_1 = y$. Оскільки K/Z абелева, то $[w_\lambda, a_1] = \xi_\lambda z$ для деякого елемента $\xi_\lambda \in F$, $\lambda \in \Lambda$. Якщо $\xi_\lambda = 0$, то покладемо $u_\lambda = w_\lambda$, а якщо $\xi_\lambda \neq 0$, то покладемо $u_\lambda = \xi_\lambda a_1 - w_\lambda$. Тоді

$$[u_\lambda, a_1] = [\xi_\lambda a_1 - w_\lambda, a_1] = \xi_\lambda [a_1, a_1] - [w_\lambda, a_1] = \xi_\lambda z - \xi_\lambda z = 0.$$

З рівності $[u_\lambda, a_1] = [a_1, u_\lambda]$ випливає, що $[a_1, u_\lambda] = 0$. Очевидно, що елементи $\{a_1 + Z, u_\lambda + + Z | \ \lambda \in \Lambda\}$ утворюють базис фактор-алгебри K/Z. Нехай U_1/Z — підпростір із K/Z, який породжений елементами $\{u_\lambda + Z | \ \lambda \in \Lambda\}$. З абелевості K/Z випливає, що U_1 є підалгеброю в K і $[U_1, a_1] = [a_1, U_1] = \langle 0 \rangle$.

Використовуючи аналогічні міркування та трансфінітну індукцію, можемо побудувати такий базис $\{a_\mu + Z | \ \mu \in M\}$, що $[a_\mu, a_\nu] = [a_\nu, a_\mu] = 0$ для всіх $\mu, \nu \in M$, $\mu \neq \nu$. Більше того, $[v, a_\mu] = a_\mu + \gamma_\mu z$ для всіх $\mu \in M$.

***Доведення теореми* B2.** За наслідком 2.3 кожна підалгебра з K є ідеалом алгебри L. Оскільки локально нільпотентний радикал K неабелевий, то $K = E \oplus Z$, Z є підалгеброю центра K, а E — сильно екстраспеціальною алгеброю. Оскільки радикал K неабелевий, то підалгебра E нетривіальна. Виберемо в E такий елемент y, що $z = [y, y] \neq 0$. Нехай Y — підалгебра, породжена елементом y. Тоді $Y = Fy \oplus Fz$ та $[z, y] = [y, z] = 0$. За нашими умовами підалгебра Y є ідеалом алгебри L. Оскільки $[K, K] = [E, E]$ має вимірність 1 і $z \in [E, E]$, то $Fz = [K, K]$. Це означає, що $z \in \zeta(K)$.

Для елемента $x \in L$ розглянемо відображення $\mathrm{l}_x : Y \to Y$, визначене за таким правилом: $\mathrm{l}_x(a) = [x, a]$ для кожного елемента $a \in Y$. Тоді відображення l_x є диференціюванням ідеалу Y. Оскільки $z \notin \zeta(L)$, то за лемами 3.2 і 3.3 отримуємо, що $\mathrm{char}(F) \neq 2$. Більше того, лема 3.2 показує, що існує такий елемент $u \in A$, що $[u, y] = \alpha y + \beta z$, $[u, z] = 2\alpha z$ і $\alpha \neq 0$. Покладемо $v = \alpha^{-1} u$, тоді $[v, y] = y + \gamma z$, $[v, z] = 2z$, де $\gamma = \alpha^{-1}\beta$.

Припустимо, що підалгебра Z нетривіальна, і розглянемо $\langle z \rangle \oplus Z$. За доведеним ця підалгебра і всі її підалгебри є ідеалами алгебри L. Тоді з леми 2.3 випливає, що $[v, w] = 2w$ для кожного елемента $w \in Z$. Розглянемо тепер фактор-алгебру $L/\langle z \rangle$. Її ідеал $K/\langle z \rangle$ абелевий і $\dim_F(K/\langle z \rangle) > 1$. Оскільки $Z \neq \langle z \rangle$, то існує такий елемент $w \in Z$, що $\langle w \rangle \cap Y = \langle 0 \rangle$. З леми 2.2 випливає, що кожна підалгебра з $K/\langle z \rangle$ є ідеалом в $L/\langle z \rangle$. Тоді

$$[v + \langle z \rangle, y + \langle z \rangle] = [v, y] + \langle z \rangle = y + \langle z \rangle.$$

На підставі леми 2.3 отримуємо, що $[v + \langle z \rangle, w + \langle z \rangle] = w + \langle z \rangle$. З іншого боку,

$$[v + \langle z \rangle, w + \langle z \rangle] = [v, w] + \langle z \rangle = 2w + \langle z \rangle.$$

Ми отримали суперечність, яка доводить рівність $Z = \langle 0 \rangle$, звідки випливає, що $K = E$ є сильно екстраспеціальною алгеброю.

Припустимо тепер, що $\mathrm{Leib}(L) \neq \langle z \rangle$. Оскільки ядро $\mathrm{Leib}(L)$ є абелевим ідеалом, то K містить $\mathrm{Leib}(L)$. Тоді $\dim_F(\mathrm{Leib}(L)) > 1$, тому $\mathrm{Leib}(L)$ повинно містити елемент $u \notin \langle z \rangle$. Оскільки ядро $\mathrm{Leib}(L)$ абелеве, то $[u, u] = 0$. З іншого боку, K — сильно екстраспеціальна алгебра Лейбніца і тому $[u, u] \neq 0$. Ця суперечність показує, що $\mathrm{Leib}(L) = \langle z \rangle$.

Оскільки $\langle z \rangle$ — ідеал вимірності 1, то $L/\mathrm{Ann}_L^{\mathrm{left}}(\langle z \rangle) \cong F$ і $\dim_F(L/\mathrm{Ann}_L^{\mathrm{left}}(\langle z \rangle)) = 1$. З того факту, що $v \notin \mathrm{Ann}_L^{\mathrm{left}}(\langle z \rangle)$, випливає, що $L = \mathrm{Ann}_L^{\mathrm{left}}(\langle z \rangle) + \langle v \rangle$. Оскільки лівий центр алгебри L містить ядро Лейбніца, то $L = \mathrm{Ann}_L^{\mathrm{right}}(\langle z \rangle)$, тобто

$$\mathrm{Ann}_L(\langle z \rangle) = \mathrm{Ann}_L^{\mathrm{left}}(\langle z \rangle) \cap \mathrm{Ann}_L^{\mathrm{right}}(\langle z \rangle) = \mathrm{Ann}_L^{\mathrm{left}}(\langle z \rangle) \cap L = \mathrm{Ann}_L^{\mathrm{left}}(\langle z \rangle).$$

Якщо $x \in \mathrm{Ann}_L(\langle z \rangle)$, то за лемою 3.2 $[x, y] \in \langle z \rangle$. Тоді з леми 3.4 випливає, що $\langle x \rangle$ — ідеал алгебри L. З рівності $\mathrm{Leib}(L) = \langle z \rangle$ випливає, що фактор-алгебра $L/\langle z \rangle$ є алгеброю Лі. Це означає, що $[x + \langle z \rangle, x + \langle z \rangle] = \langle z \rangle$, тобто або $\langle x \rangle = Fx$, або $\langle x \rangle = Fx + Fz$. У другому випадку $[x, x] \in \langle z \rangle$. З рівності $[x, z] = 0$ випливає, що підалгебра $\langle x \rangle$ нільпотентна. Оскільки ця підалгебра є ідеалом, то $\mathrm{Ln}(L) = K$ містить $\langle x \rangle$. Отже, $\mathrm{Ann}_L(\langle z \rangle) \leq K$, а оскільки $z \in \zeta(K)$, то $K = \mathrm{Ann}_L(\langle z \rangle)$. Це означає, що $L = K + \langle v \rangle$.

Вище вже доведено, що $[v, x] = x + \xi_x z$ для кожного $x \in K \setminus \langle z \rangle$ і деякого $\xi_x \in F$. Оскільки $L/\langle z \rangle$ — алгебра Лі, то $[v, v] \in \langle z \rangle$, тобто $[v, v] = \nu z$ для деякого $\nu \in F$ і $[v, z] = 2z$.

Теорему B2 доведено.

***Приклад* 3.1.** Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F, $\mathrm{char}(F) = 2$ і L породжується такими елементами a, b, v, що

$$[a, a] = z, \quad [b, b] = \sigma z, \quad [v, v] = \eta z,$$

$$[z, z] = [z, a] = [a, z] = [z, b] = [b, z] = [z, d] = [d, z] = 0,$$

$$[a, b] = [b, a] = 0, \quad [a, v] = a, [v, a] = a + z,$$

$$[b, v] = b, \quad [v, b] = b + z.$$

Більше того, поліноми $X^2 + \sigma$ та $X^2 + \eta$ не мають коренів в F. Можна перевірити, що L — алгебра Лейбніца, підалгебри якої або є ідеалами, або самоідеалізовні.

Говоритимемо, що поле F є 2-*замкненим*, якщо поліном $X^2 + \alpha \in F[X]$ має корінь у полі F для кожного ненульового елемента $\alpha \in F$. Це означає, що мультиплікативна група $\mathrm{U}(F)$ поля F є 2-подільною. Зокрема, кожне скінченне поле F характеристики 2 є 2-замкненим. Справді, $|F| = 2^n$ для деякого натурального n, тому число $|\mathrm{U}(F)| = 2^n - 1$ є непарним. Це означає, що мультиплікативна група $\mathrm{U}(F)$ є 2-подільною. Як наслідок отримуємо, що кожне локально скінченне поле F характеристики 2 є 2-замкненим.

***Наслідок* 3.3.** *Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F, підалгебри якої або є ідеалами, або самоідеалізовні. Припустимо, що $\mathrm{char}(F) = 2$, локально нільпотентний радикал $\mathrm{Ln}(L)$ неабелевий і $L \neq \mathrm{Ln}(L)$. Якщо поле F є 2-замкненим, то радикал $\mathrm{Ln}(L)$ циклічний.*

Доведення. Позначимо через K локально нільпотентний радикал алгебри L і припустимо, що K нециклічний. За лемою 3.5 кожна підалгебра з K є ідеалом алгебри L, а K — сильно екстраспеціальною алгеброю. Виберемо в K такий елемент y, що $z = [y, y] \neq 0$. Нехай Y — підалгебра, породжена елементом y. Тоді $Y = Fy \oplus Fz$ і $[z, y] = [y, z] = 0$. За доведеним вище Y є ідеалом алгебри L. З леми 3.5 також випливає, що $Z = Fz = \langle z \rangle = \mathrm{Leib}(L) \leq$ $\leq \zeta(L)$. Оскільки радикал K нециклічний, то $K \neq Y$. Використовуючи міркування з доведення теореми B1, можемо знайти такий елемент $a \in K$, що $a \notin Z$, $[a, y] = [y, a] = 0$. Тоді $[a, a] = \gamma z$ для деякого елемента $\gamma \in F$. Нехай $b = \lambda a + \mu y$, $\lambda, \mu \in F$. Тоді

$$[b, b] = [\lambda a + \mu y, \lambda a + \mu y] = \lambda^2 [a, a] + \lambda\mu [a, y] + \mu\lambda [y, a] + \mu^2 [y, y] =$$

$$= \lambda^2 \gamma z + \mu^2 z = (\lambda^2 \gamma + \mu^2) z.$$

Оскільки поле F є 2-замкненим, то існує такий елемент $\sigma \in F$, що $\sigma^2 = \gamma$. Покладемо $\lambda = 1$, $\mu = \sigma$. Тоді $a + \sigma y \notin Z$ і $[a + \sigma y, a + \sigma y] = (\gamma + \sigma^2) z = (\gamma + \gamma) z = 0$. Таким чином, отримали суперечність із тим фактом, що K є сильно екстраспеціальною алгеброю. Ця суперечність показує, що радикал K повинен бути циклічним.

Наступним природним кроком є розгляд випадку, коли локально нільпотентний радикал є циклічним. З леми 2.1 випливає, що у цьому випадку він має вимірність 1 або 2.

***Доведення теореми* C.** Позначимо через K локально нільпотентний радикал алгебри L. За лемою 2.1 K має такий базис $\{a, z\}$, що $[a, a] = z$, $[z, a] = [a, z] = 0$.

Для елемента $x \in L$ розглянемо відображення $\mathrm{l}_x : K \to K$, визначене за таким правилом: $\mathrm{l}_x(y) = [x, y]$ для кожного елемента $y \in K$. Тоді відображення l_x є диференціюванням радикала K. За лемами 3.2 і 3.3 $\mathrm{l}_x(z) = 0$. Інакше кажучи, $[x, z] = 0$ для всіх елементів $x \in L$. Це означає, що $z \in \zeta^{\mathrm{right}}(L)$. З іншого боку, $z \in \mathrm{Leib}(L)$, а оскільки $\mathrm{Leib}(L) \leq \zeta^{\mathrm{left}}(L)$, то $z \in \zeta^{\mathrm{left}}(L)$. Отже, $z \in \zeta(L)$. Зазначимо, що ядро $\mathrm{Leib}(L)$ абелеве, тому $\mathrm{Leib}(L) \leq K$. Оскільки $Z = \langle z \rangle$ — максимальна абелева підалгебра з K, то $Z = \mathrm{Leib}(L)$.

Нехай $A = \mathrm{Ann}_L^{\mathrm{left}}(K)$. Оскільки K — ідеал алгебри L, то A також є ідеалом в L. З рівності $Z = \zeta(K)$ випливає, що $Z \leq A$. Очевидно, що $a \notin A$, тому $A \cap K = Z$. Припустимо, що K не містить A. Тоді фактор-алгебра A/Z нетривіальна, а перетин $K/Z \cap A/Z$ є тривіальним. Нехай d — такий довільний елемент з A, що $d \notin Z$. Тоді $d \notin K$ й $[a, d] = [d, a] = 0$. Це означає, що $\mathrm{I}_L(\langle d\rangle) \neq \langle d\rangle$, і тому $\langle d\rangle$ повинно бути ідеалом алгебри L. Оскільки $[d, d] \in \mathrm{Leib}(L) = Z$, то підалгебра $\langle d\rangle$ нільпотентна, тобто $\langle d\rangle \leq K$. Ми отримали суперечність, яка доводить, що $A \leq K$.

Припустимо, що $\mathrm{char}(F) \neq 2$. Лема 3.2 показує, що у цьому випадку алгебра диференціювань радикала K має вимірність 1. На підставі твердження 3.2 зі статті [6] отримуємо, що $\dim_F(L/A) \leq 1$. З рівності $A = Z$ випливає, що $L = K$.

Припустимо тепер, що $\mathrm{char}(F) = 2$. За твердженням 3.2 зі статті [6] із наслідку 3.1 і рівності $A = Z$ випливає, що $\dim_F(L/Z) \leq 2$. Якщо $\dim_F(L/Z) = 1$, то $L = K$, а якщо $\dim_F(L/Z) = 2$, то L/Z є алгеброю Лі вимірності 2. Оскільки $L \neq K$, то можна вибрати такий елемент $v \notin K$, що $[a+Z, v+Z] = [v+Z, a+Z] = a+Z$. Це означає, що $[v, a] = a + \lambda z$, $[a, v] = a + \mu z$ для деяких елементів $\lambda, \mu \in F$.

Нарешті, розглянемо циклічну підалгебру $\langle v\rangle$. За лемою 2.1 або $\langle v\rangle = Fv$, або $\langle v\rangle = Fv \oplus F[v, v]$. У першому випадку $\langle v\rangle \cap \mathrm{Leib}(L) = \langle 0\rangle$. Рівність $\mathrm{Leib}(L) = \zeta(L)$ показує, що $z \in \mathrm{I}_L(\langle v\rangle)$. Тоді $\langle v\rangle$ повинно бути ідеалом алгебри L. У цьому випадку $\langle v\rangle \cap K = \langle 0\rangle$. Але тоді $v \in \mathrm{Ann}_L(K)$, і ми отримали суперечність, яка показує, що $[v, v] = \eta z$ для деякого ненульового елемента $\eta \in F$.

Нехай $b = \sigma a + \tau v$, $\sigma, \tau \in F$. Тоді

$$
\begin{aligned}
[b, b] = [\sigma a + \tau v, \sigma a + \tau v] = \sigma^2[a, a] + \sigma\tau[a, v] + \tau\sigma[v, a] + \tau^2[v, v] = \\
= \sigma^2 z + \sigma\tau(a + \mu z) + \tau\sigma(a + \lambda z) + \tau^2\eta z = \\
= \sigma^2 z + \sigma\tau a + \sigma\tau\mu z + \tau\sigma a + \tau\sigma\lambda z + \tau^2\eta z = \\
= (\sigma^2 + \sigma\tau\mu + \tau\sigma\lambda + \tau^2\eta)z = \tau^2(\sigma^2\tau^{-2} + \sigma\tau^{-1}(\mu + \lambda) + \eta)z.
\end{aligned}
$$

Якщо припустити, що поліном $X^2 + (\mu + \lambda)X + \eta$ має корінь γ в F, то, поклавши $\tau = 1$ і $\sigma = \gamma$, отримаємо, що $[b, b] = 0$, і тому $\langle b\rangle = Fb$. Очевидно, що $b \notin K$. Як і раніше, $z \in \mathrm{I}_L(\langle b\rangle)$, тому $\langle b\rangle$ повинно бути ідеалом. Оскільки підалгебра $\langle b\rangle$ абелева, вона міститься у локально нільпотентному радикалі алгебри L, що неможливо. Ця суперечність показує, що поліном $X^2 + (\mu + \lambda)X + \eta$ не має коренів у полі F.

Теорему C доведено.

Наведемо приклад алгебри Лейбніца, яка задовольняє умови теореми C.

***Приклад* 3.2.** Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F, де $\mathrm{char}(F) = 2$, а поле F не є 2-замкненим. Виберемо в F такий елемент η, що поліном $X^2 + \eta$ не має коренів у полі F. Нехай L — векторний простір над полем F, а $\{z, a, v\}$ — базис L. Визначимо операцію $[\,,\,]$ таким чином:

$$[z, z] = [z, a] = [a, z] = [z, v] = [v, z] = 0, \quad [a, a] = z, \quad [v, v] = \eta z, \quad [v, a] = [a, v] = a.$$

Можна перевірити, що L є алгеброю Лейбніца, всі підалгебри якої або є ідеалами, або самоідеалізовні.

Твердження 3.1. *Нехай* L — *алгебра Лейбніца над полем* F, *підалгебри якої або є ідеалами, або самоідеалізовні. Якщо локально нільпотентний радикал* $\mathrm{Ln}(L)$ *має вимірність* 1, *то фактор-алгебра* $L/\mathrm{Ln}(L)$ *не містить абелевих підалгебр вимірності* 2.

Доведення. Позначимо через K локально нільпотентний радикал алгебри L. Оскільки ядро $\mathrm{Leib}(L)$ — абелевий ідеал, то $\mathrm{Leib}(L) \leq K$. Це означає, що $\mathrm{Leib}(L) = K$, тому L/K є алгеброю Лі. Нехай $A = \mathrm{Ann}_L^{\mathrm{left}}(K)$. Оскільки K — ідеал алгебри L, то A також є ідеалом в L. З того факту, що $\dim_F(K) = 1$, випливає, що $\dim_F(L/A) = 1$.

Припустимо супротивне, нехай U/K — абелева підалгебра з L/K і $\dim_F(U/K) > 1$. Тоді з наслідку 2.1 випливає, що кожна підалгебра з U, яка містить K, є ідеалом алгебри L. Рівність $\dim_F(L/A) = 1$ показує, що $U \cap A > K$. Оскільки фактор-алгебра $(U \cap A)/K$ абелева, то ідеал $U \cap A$ є нільпотентним. Тоді $U \cap A \leq K$, що неможливо. Ця суперечність показує, що кожна абелева підалгебра з L/K має вимірність 1.

Твердження 3.1 доведено.

Таким чином, ми бачимо, що вивчення алгебр Лейбніца, підалгебри яких або є ідеалами, або самоідеалізовні, зводиться до вивчення алгебр Лі, абелеві підалгебри яких мають вимірність 1. Цей випадок вимагає окремого розгляду.

Література

1. S. A. Ayupov, B. A. Omirov, I. S. Rakhimov, *Leibniz algebras: structure and classification*, CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, FL, USA (2020).
2. D. W. Barnes, *Some theorems on Leibniz algebras*, Commun. Algebra, **39**, № 7, 2463 – 2472 (2011); DOI: 10.1080/00927872.2010.489529.
3. A. Blokh, *A generalization of the concept of a Lie algebra*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **165**, № 3, 471 – 473 (1965) (in Russian).
4. V. A. Chupordia, L. A. Kurdachenko, I. Ya. Subbotin, *On some „minimal" Leibniz algebras*, J. Algebra and Appl., **16**, № 5, Article 1750082 (2017); DOI: 10.1142/S0219498817500827.
5. V. V. Kirichenko, L. A. Kurdachenko, A. A. Pypka, I. Ya. Subbotin, *Some aspects of Leibniz algebra theory*, Algebra and Discrete Math., **24**, № 1, 1 – 33 (2017).
6. L. A. Kurdachenko, J. Otal, A. A. Pypka, *Relationships between factors of canonical central series of Leibniz algebras*, Eur. J. Math., **2**, 565 – 577 (2016); DOI: 10.1007/s40879-016-0093-5.
7. L. A. Kurdachenko, J. Otal, I. Ya. Subbotin, *On some properties of the upper central series in Leibniz algebras*, Comment. Math. Univ. Carolin., **60**, № 2, 161 – 175 (2019); DOI: 10.14712/1213-7243.2019.009.
8. L. A. Kurdachenko, N. N. Semko, I. Ya. Subbotin, *The Leibniz algebras whose subalgebras are ideals*, Open Math., **15**, 92 – 100 (2017); DOI: 10.1515/math-2017-0010.
9. L. A. Kurdachenko, I. Ya. Subbotin, N. N. Semko, *From groups to Leibniz algebras: common approaches, parallel results*, Adv. Group Theory and Appl., **5**, 1 – 31 (2018); DOI: 10.4399/97888255161421.
10. L. A. Kurdachenko, I. Ya. Subbotin, N. N. Semko, *On the anticommutativity in Leibniz algebras*, Algebra and Discrete Math., **26**, № 1, 97 – 109 (2018).
11. L. A. Kurdachenko, I. Ya. Subbotin, V. S. Yashchuk, *Leibniz algebras whose subideals are ideals*, J. Algebra and Appl., **17**, № 8, Article 1850151 (2018); DOI: 10.1142/S0219498818501517.
12. L. A. Kurdachenko, I. Ya. Subbotin, V. S. Yashchuk, *Some antipodes of ideals in Leibniz algebras*, J. Algebra and Appl., **19**, № 6, Article 2050113 (2020); DOI: 10.1142/S0219498820501133.
13. J. L. Loday, *Cyclic homology*, Grundlehren Math. Wiss., **301**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1992); DOI: 10.1007/978-3-662-21739-9.
14. J. L. Loday, *Une version non commutative des algébres de Lie: les algébres de Leibniz*, Enseign. Math., **39**, 269 – 293 (1993) (in French).
15. J. L. Loday, T. Pirashvili, *Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology*, Math. Ann., **296**, № 1, 139 – 158 (1993); DOI: 10.1007/BF01445099.

Одержано 15.04.21