DOI: 10.37863/umzh.v73i11.6692

УДК 517.929.2

А. В. Чайковський, О. А. Лагода (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ ІЗ ВХІДНИМИ ДАНИМИ, ЩО ЛЕЖАТЬ У ПІДПРОСТОРАХ

We study the problem of existence and uniqueness of a bounded solution to a difference equation of the first order with a constant operator coefficient in a Banach space. For the case where the initial condition and input sequence are in some subspaces, necessary and sufficient conditions are obtained. These results are applied to difference equations with a jump of operator coefficient and difference equations of higher orders.

Вивчається питання існування та єдиності обмеженого розв'язку різницевого рівняння першого порядку зі сталим операторним коефіцієнтом у банаховому просторі. Для випадку, коли початкова умова і вхідна послідовність лежать у деяких підпросторах, отримано необхідні та достатні умови. Ці результати застосовано до різницевих рівнянь зі стрибком операторного коефіцієнта і до різницевих рівнянь старших порядків.

1. Вступ. Нехай $(X, \|\cdot\|)$ — комплексний банахів простір, $L(X)$ — простір лінійних неперервних операторів у просторі X, $I \in L(X)$ — одиничний оператор. Позначимо через $\sigma(A)$ спектр оператора $A \in L(X)$. Термін „підпростір" будемо використовувати для позначення замкненої лінійної підмножини X.

Розглянемо різницеве рівняння

$$x_{n+1} = Ax_n + y_n, \quad n \geq 0, \tag{1}$$

де $A \in L(X)$, $\{y_n \mid n \geq 0\} \subset X$ — відома, а $\{x_n \mid n \geq 0\} \subset X$ — шукана послідовність.

Наведемо результати щодо обмежених розв'язків рівняння (1).

Теорема 1 [1, 2]. *Різницеве рівняння* (1) *має єдиний обмежений розв'язок* $\{x_n \mid n \geq 0\} \subset X$ *для довільної обмеженої послідовності* $\{y_n \mid n \geq 0\} \subset X$ *тоді й лише тоді, коли*

$$\sigma(A) \subset \big\{z \in \mathbf{C} \mid |z| > 1\big\}.$$

Теорема 2 [3]. *Різницеве рівняння* (1) *має обмежений розв'язок* $\{x_n \mid n \geq 1\} \subset X$ *для довільної обмеженої послідовності* $\{y_n \mid n \geq 0\} \subset X$ *і довільного* $x_0 \in X$ *тоді й лише тоді, коли*

$$\sigma(A) \subset \big\{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\big\}.$$

В цій роботі ми досліджуємо питання існування та єдиності обмеженого розв'язку рівняння (1) у випадку, коли x_0 і послідовність $\{y_n \mid n \geq 0\}$ лежать у деяких підпросторах.

2. Рівняння без початкової умови. Для оператора $A \in L(X)$ позначимо

$$W(A) := \left\{x \in X \mid \sup_{n \geq 1} \|A^n x\| < +\infty\right\}.$$

На просторі X можна ввести відношення еквівалентності за правилом

$$x_1 \sim x_2 \iff x_1 - x_2 \in W(A).$$

Клас еквівалентності, що містить $x \in X$, ми позначатимемо $[x]$. Якщо $W(A)$ — підпростір простору X, то $U(A) = X/W(A)$ — банахів простір із нормою

$$\big\|[x]\big\|_{U(A)} = \inf_{w \in W(A)} \|x + w\| = \inf_{z \in [x]} \|z\|$$

(див. [8], теорема 1.5.3).

Згідно з означенням

$$\forall x \in X : \|x\| \geq \big\|[x]\big\|_{U(A)}, \tag{2}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall [x] \in U(A) \ \exists x_\varepsilon \in [x] : \|x_\varepsilon\| \leq (1+\varepsilon)\big\|[x]\big\|_{U(A)}. \tag{3}$$

Нехай $A, B \in L(X)$. Визначимо оператор $\tilde{B}_A : U(A) \to U(A)$ за допомогою рівності

$$\big(\tilde{B}_A[x]\big) = [Bx], \quad [x] \in U(A).$$

У випадку $A = B$ ми будемо використовувати позначення $\tilde{A} := \tilde{A}_A$.

Лема 1. *Нехай* $A, B \in L(X)$ *— оператори, що комутують. Тоді*:

1) *означення оператора* $\tilde{B}_A$ *коректне* (*не залежить від елемента з класу еквівалентності* $[x]$);

2) *оператор* $\tilde{B}_A$ *лінійний*;

3) *оператор* $\tilde{B}_A$ *обмежений і* $\|\tilde{B}_A\| \leq \|B\|$;

4) $\sigma(\tilde{B}_A) \subset \sigma(B)$;

5) $\sigma(\tilde{A}) \cap \{z \in \mathbf{C} \mid |z| > 1\} = \sigma(A) \cap \{z \in \mathbf{C} \mid |z| > 1\}$.

Доведення. 1. Згідно з означенням множини $W(A)$ і комутативністю $BW(A) \subset W(A)$. Тому якщо $[x] \in U(A)$ і $x_1 \in [x]$, то

$$Bx_1 - Bx = B(x_1 - x) \in BW(A) \subset W(A)$$

і $Bx_1 \in [Bx]$.

2. Це наслідок лінійності оператора B.

3. Для довільних $[x] \in U(A)$ і $\varepsilon > 0$, використовуючи (2), (3), маємо

$$\|\tilde{B}_A[x]\|_{U(A)} = \|\tilde{B}_A[x_\varepsilon]\|_{U(A)} = \|[Bx_\varepsilon]\|_{U(A)} \leq \|Bx_\varepsilon\| \leq$$
$$\leq \|B\|\|x_\varepsilon\| \leq (1+\varepsilon)\|B\|\|[x]\|_{U(A)}.$$

Оскільки $\varepsilon > 0$ є довільним, ми отримуємо потрібну оцінку.

4. Нехай $z \in \mathbf{C}$, $z \notin \sigma(B)$, $C \in L(U(A))$ діє за формулою

$$C[x] = \big[(B - zI)^{-1}x\big], \quad [x] \in U(A).$$

Оскільки $(B - zI)^{-1}$ комутує з A, властивості 1 – 3 справджуються для оператора C. Крім того,

$$\Big(\tilde{B}_A - zI_{U(A)}\Big)C[x] = \big[(B - zI)(B - zI)^{-1}x\big] = [x], \quad x \in U(A),$$

$$C\Big(\tilde{B}_A - zI_{U(A)}\Big)[x] = \big[(B - zI)^{-1}(B - zI)x\big] = [x], \quad x \in U(A).$$

Звідси $z \notin \sigma(\tilde{B})$ і $C = (\tilde{B} - zI_{U(A)})^{-1}$.

5. Нехай

$$z \in \mathbf{C}, \qquad |z| > 1, \quad z \notin \sigma(\tilde{A}),$$

і $y \in X$ — довільний елемент. Тоді існує єдиний $[x] \in U(A)$ такий, що

$$(\tilde{A} - zI_{U(A)})[x] = [y].$$

Позначимо

$$w := (A - zI)x - y \in W(A),$$

$$v := -\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k-1} A^k w.$$

Цей ряд абсолютно збіжний, оскільки за означенням множини $W(A)$ послідовність $\{A^n w \mid n \geq \geq 1\}$ обмежена і $|z| > 1$. Легко перевірити, що $(A - zI)v = w$. Згідно з означенням w маємо $(A - zI)(x - v) = y$. Оскільки $y \in X$ — довільний елемент, то $(A - zI)$ — сюр'єкція.

Якщо $(A - zI)x = \vec{0}$ для деякого $x \in X$, то

$$A^n x = z^n x, \ n \geq 1.$$

Якщо $x \neq \vec{0}$, то $x \notin W(A)$. Але

$$\tilde{A}[x] = z[x],$$

тому $z \in \sigma(\tilde{A})$. Ця суперечність показує, що $(A - zI)$ — ін'єкція.

Ми довели, що $(A - zI)$ — бієкція, тому за теоремою Банаха має неперервний обернений, отже, $z \notin \sigma(A)$.

Наведені міркування свідчать, що

$$\sigma(A) \cap \{z \in \mathbf{C} \mid |z| > 1\} \subset \sigma(\tilde{A}) \cap \{z \in \mathbf{C} \mid |z| > 1\}.$$

Використання включення з пункту 4 завершує доведення.

***Зауваження* 1.** Нерівність $\|\tilde{A}\|_{U(A)} \leq \|A\|$ може перетворюватися на рівність (наприклад, якщо $W(A)$ — тривіальний підпростір, що справджується у випадку $\sigma(A) \subset \{z \in \mathbf{C} \mid |z| > 1\}$) або на строгу нерівність (наприклад, якщо $W(A) = X$, що справджується у випадку $\sigma(A) \subset \subset \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$).

Означення 1. *Позначимо через $V(X)$ клас усіх операторів $B \in L(X)$, що задовольняють такі умови*:

1) $W(B)$ — *підпростір*,

2) *для довільного $x \in X$ з обмеженості послідовності $\{[B^n x] \mid n \geq 1\}$ в $U(B)$ випливає обмеженість послідовності $\{B^n x \mid n \geq 1\}$ в X.*

***Зауваження* 2.** Нехай X — гільбертів простір, $B \in L(X)$, P — проєктор на підпростір $W(B)$ і оператори P і B комутують. Тоді умова 2 означення 1 справджується. Справді,

$$\forall x \in X : \|B^n x\|^2 = \|B^n P x\|^2 + \left\|B^n (I - P)x\right\|^2 =$$

$$= \|B^n P x\|^2 + \inf_{w \in W(B)} \left(\left\|(I - P)B^n x\right\|^2 + \|w\|^2 \right) =$$

$$= \|B^n Px\|^2 + \inf_{w\in W(B)} \big\|B^n(I-P)x + w\big\|^2 =$$

$$= \|B^n Px\|^2 + \big\|[B^n(I-P)x]\big\|^2_{U(B)} = \|B^n Px\|^2 + \big\|[B^n x]\big\|^2_{U(B)}, \quad n \geq 1.$$

Оскільки $Px \in W(B)$, послідовність $\big\{\|B^n Px\| \mid n \geq 1\big\}$ обмежена. З цього випливає умова 2.

Теорема 3. *Нехай* $A \in V(X)$, M *— підпростір в* X (*можливо*, *тривіальний*). *Різницеве рівняння* (1) *має для довільної обмеженої послідовності* $\{y_n \mid n \geq 0\} \subset X$ *єдиний обмежений розв’язок* $\{x_n \mid n \geq 0\} \subset X$ *такий, що* $x_0 \in M$ *тоді й лише тоді*, *коли справджуються такі умови*:

1) $\forall [x] \in U(A)\ \exists! m \in M : m \in [x]$;

2) $\sigma(A) \cap \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\} = \varnothing$.

***Зауваження* 3.** У частковому випадку $M = X$ ця теорема стає еквівалентною теоремі 1. Перевіримо це безпосередньо.

Друга умова теореми 3 — це частина умови в теоремі 1. Якщо вона справджується, то простір за теоремою Рісса про спектральний розклад [5] можна розкласти у пряму суму двох підпросторів, в яких спектр A розташований всередині і зовні одиничного кола відповідно.

Перша умова теореми 3 означає, що $W(A) = \{\vec{0}\}$. Це еквівалентно умові, що перший підпростір у спектральному розкладі тривіальний. Це означає, що весь спектр A в X лежить зовні одиничного кола.

Для доведення теореми нам знадобляться кілька лем.

Лема 2. *Нехай* $A \in V(X)$, M *— підпростір простору* X (*можливо*, *тривіальний*) *і різницеве рівняння* (1) *має для довільної обмеженої послідовності* $\{y_n \mid n \geq 0\} \subset X$ *єдиний обмежений розв’язок* $\{x_n \mid n \geq 0\} \subset X$ *такий*, *що* $x_0 \in M$. *Тоді*

$$\sigma(\tilde{A}) \subset \{z \in \mathbf{C} \mid |z| > 1\}.$$

Доведення. Розглянемо різницеве рівняння

$$[x_{n+1}] = \tilde{A}[x_n] + [y_n],\ n \geq 0, \tag{4}$$

у просторі $U(A)$.

Для довільної обмеженої послідовності $\big\{[y_n] : n \geq 0\big\} \subset U(A)$, використовуючи (3), можна вибрати відповідні елементи y_n, $n \geq 0$, так, щоб

$$\|y_n\| \leq 2\big\|[y_n]\big\|_{U(A)}, \quad n \geq 0.$$

Тоді послідовність $\{y_n : n \geq 0\}$ обмежена у просторі X. Тому існує єдиний обмежений розв’язок $\{x_n \mid n \geq 0\}$ рівняння (1), що задовольняє умову $x_0 \in M$. Оскільки з оцінки (2) випливає, що $\|[x_n]\| \leq \|x_n\|$, $n \geq 1$, послідовність $\big\{[x_n] \mid n \geq 1\big\}$ обмежена в $U(A)$ і $[x_{n+1}] = [Ax_n + y_n] = \tilde{A}[x_n] + [y_n]$, $n \geq 0$.

Для доведення єдиності обмеженого розв’язку рівняння (4) припустимо від супротивного, що $x_0 \notin W(A)$ і послідовність $\big\{[A^n x_0] \mid n \geq 1\big\}$ обмежена. Оскільки $A \in V(X)$, за другою умовою означення послідовність $\{A^n x_0 \mid n \geq 1\}$ обмежена. Тому $x_0 \in W(A)$. Суперечність.

За теоремою 2 маємо $\sigma(\tilde{A}) \subset \{z \in \mathbf{C} \mid |z| > 1\}$.

Лема 3. *Якщо* $A \in V(X)$ *і*

$$\sigma(\tilde{A}) \subset \big\{z \in \mathbf{C} \mid |z| > 1\big\},$$

то

$$\sigma(A) \cap \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\} = \varnothing.$$

Доведення. 1. Оскільки спектр — замкнена множина, то для деякого $\varepsilon \in (0,1)$ справджується включення

$$\sigma(\tilde{A}) \subset \{z \in \mathbf{C} \mid |z| > 1 + \varepsilon\}. \tag{5}$$

Згідно з останньою властивістю в лемі 1

$$\sigma(A) \subset \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \le 1\} \cup \{z \in \mathbf{C} \mid |z| > 1 + \varepsilon\}.$$

Використовуючи спектральний розклад Рісса [5], отримуємо підпростір X_+, в якому для звуження A_+ оператора A маємо

$$\sigma(A_+) \subset \{z \in \mathbf{C} \mid |z| > 1 + \varepsilon\},$$

і підпростір X_-, де для звуження A_- оператора A

$$\sigma(A_-) \subset \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \le 1\}.$$

2. Доведемо, що

$$W(A) \cap X_+ = \{\vec{0}\}. \tag{6}$$

Якщо $x \in W(A) \cap X_+$, то $\{A^n x \mid n \ge 1\}$ — обмежена послідовність. Оскільки $\|A_+^{-n}\| \to 0$, $n \to \infty$, то $x = A_+^{-n} A^n x \to \vec{0}$, $n \to \infty$, а це означає, що $x = \vec{0}$.

3. Доведемо, що $W(A) = X_-$.

Використовуючи спектральний розклад, маємо оцінку

$$\exists C_1 > 0 \ \forall n \ge 1 \colon \|A_-^n\| \le C_1 \left(1 + \frac{\varepsilon}{3}\right)^n.$$

З умови леми випливає, що у просторі $U(A)$ оператор $\tilde{A}$ має обмежений обернений $\tilde{A}^{-1}$ і

$$\exists C_2 > 0 \ \forall n \ge 1 \colon \|\tilde{A}^{-n}\| \le C_2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-n}.$$

Оскільки згідно з (2) і двома останніми оцінками для довільного $x \in X_-$

$$\big\|[x]\big\|_{U(A)} = \big\|\tilde{A}^{-n}\tilde{A}^n[x]\big\|_{U(A)} = \big\|\tilde{A}^{-n}[A^n x]\big\|_{U(A)} \le \|\tilde{A}^{-n}\|\big\|[A^n x]\big\|_{U(A)} \le$$

$$\le \|\tilde{A}^{-n}\|\|A^n x\| = \|\tilde{A}^{-n}\|\|A_-^n x\| \le \|\tilde{A}^{-n}\|\|A_-^n\|\|x\| \to 0, \quad n \to \infty,$$

то $x \in W(A)$. Таким чином, $X_- \subset W(A)$.

Навпаки, для довільного $x \in W(A)$ ми можемо записати розклад $x = x_- + x_+$, де $x_+ \in X_+$, $x_- \in X_-$. Відповідно до доведеного вище $x_- \in W(A)$. Тому $x_+ = x - x_- \in W(A)$. За властивістю (6) $x_+ = \vec{0}$ і остаточно $x = x_- \in X_-$.

4. Доведемо, що

$$\sigma(A_-) \subset \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}.$$

Для довільної обмеженої послідовності $\{y_n \mid n \geq 0\} \subset X_-$ різницеве рівняння (1) має єдиний обмежений розв’язок $\{x_n \mid n \geq 0\} \subset X$, для якого $x_0 \in M$. Але $\{x_n^- = P_- x_n : n \geq 0\}$ — також обмежений розв’язок, і якщо ми замінимо x_0^- на довільний елемент $w \in W(A) = X_-$, розв’язок

$$\{x_n^- + A^n(w - x_0^-) : n \geq 0\}$$

буде обмеженим. Таким чином, в X_- різницеве рівняння (1) має обмежений розв’язок для довільної обмеженої послідовності $\{y_n \mid n \geq 0\} \subset X_-$ і довільного $x_0 \in X_-$. За теоремою 1 $\sigma(A_-) \subset \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$.

5. За властивостями спектрального розкладу Рісса $\sigma(A) = \sigma(A_-) \cup \sigma(A_+)$, звідки

$$\sigma(A) \cap \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\} = \varnothing.$$

***Доведення теореми* 3.** *Необхідність*. Нехай різницеве рівняння (1) має для довільної обмеженої послідовності $\{y_n \mid n \geq 0\} \subset X$ єдиний обмежений розв’язок $\{x_n \mid n \geq 0\} \subset X$ такий, що $x_0 \in M$.

1. Якщо $y_n = \vec{0}$, $n \geq 0$, то розв’язок має вигляд

$$x_n = A^n x_0, \quad n \geq 1.$$

За припущенням існує єдине $x_0 \in M$, для якого $\sup_{n \geq 0} \|A^n x_0\| < +\infty$ (очевидно, $x_0 = \vec{0}$). Тому

$$M \cap W(A) = \{\vec{0}\}.$$

Звідси випливає єдиність елемента m в першій умові, якщо він існує.

2. Для довільного $[x] \in U(A)$ обмежена послідовність $(x, \vec{0}, \vec{0}, \vec{0}, \ldots)$ є розв’язком рівняння (1), де

$$y_0 = -Ax, \qquad y_n = \vec{0}, \quad n \geq 1.$$

Але за припущенням те ж рівняння має обмежений розв’язок з $x_0 = m \in M$. Різниця цих двох розв’язків — це розв’язок однорідного рівняння, що має вигляд $\{A^n(x - m) \mid n \geq 1\}$. Оскільки цей розв’язок обмежений, то $x - m \in W(A)$, а тому $m \in [x]$.

Першу умову перевірено.

3. За лемою 2 маємо $\sigma(\tilde{A}) \subset \{z \in \mathbf{C} \mid |z| > 1\}$. За лемою 3 отримуємо другу умову.

Достатність. Нехай умови 1, 2 справджуються. Внаслідок другої умови ми можемо використати спектральний розклад Рісса простору X у пряму суму просторів X_- і X_+ з відповідними проєкторами P_-, P_+ і звуженнями операторного коефіцієнта A_-, A_+. Тоді

$$\sigma(A_-) \subset \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}, \qquad \sigma(A_+) \subset \{z \in \mathbf{C} \mid |z| > 1\}.$$

Нехай $\{y_n \mid n \geq 0\} \subset X$ — обмежена послідовність. Позначимо $y_n^- = P_- y_n$, $y_n^+ = P_+ y_n$, $n \geq 1$.

Рівняння

$$x_{n+1}^- = A_- x_n^- + y_n^-, \quad n \geq 0, \tag{7}$$

згідно з теоремою 2, має обмежений розв’язок $\{x_n^-(w) \mid n \geq 1\} \subset X_-$ для довільного $x_0^- = w \in X_-$.

Рівняння

$$x_{n+1}^+ = A_+ x_n^+ + y_n^+, \quad n \geq 0, \tag{8}$$

за теоремою 1 має єдиний обмежений розв’язок $\{x_n^+ \mid n \geq 0\} \subset X_+$.

Тому для довільного $w \in X_-$ послідовність

$$x_n = x_n^-(w) + x_n^+, \quad n \geq 0, \tag{9}$$

є обмеженим розв'язком рівняння (1).

Навпаки, нехай $\{x_n \mid n \geq 0\} \subset X$ — довільний обмежений розв'язок рівняння (1). Якщо застосувати оператори P_-, P_+ до рівняння (1), то побачимо, що послідовність $\{x_n^- = P_- x_n \mid n \geq 0\} \subset X_-$ є розв'язком рівняння (7), а послідовність $\{x_n^+ = P_+ x_n \mid n \geq 0\} \subset X_+$ — розв'язком рівняння (8) (він єдиний, як зазначено вище). Таким чином, довільний обмежений розв'язок рівняння (1) має вигляд (9).

Спектральні властивості операторів A_- і A_+ показують, що $X_- = W(A)$. Таким чином,

$$U(A) = \big\{[x] \mid z \in [x] \;\Leftrightarrow\; P_+ x = P_+ z\big\}.$$

Тоді для $[x_0^+] \in U(A)$ за першою умовою існує єдине $m \in M$ таке, що $m \in [x_0^+]$, чи, що те саме, $P_+ m = x_0^+$. Тому існує єдине $m \in M$, для якого $x_0 = m$ є початковою умовою для розв'язку (9).

Існування і єдиність розв'язку доведено.

Приклад **1.** Нехай

$$X = l_\infty = \Big\{\{x_n \in \mathbf{C} \mid n \geq 1\} \mid \|x\| = \sup_{n\geq 1} |x_n| < +\infty\Big\},$$

$$A, B \in L(X), \quad (Ax)_n = \begin{cases} 0{,}5x_n, & \text{якщо} \quad n \quad \text{парне}, \\ 2x_n, & \text{якщо} \quad n \quad \text{непарне}, \end{cases}$$

$$(Bx)_n = \begin{cases} x_n, & \text{якщо} \quad n \quad \text{парне}, \\ 2x_n, & \text{якщо} \quad n \quad \text{непарне}. \end{cases}$$

Ми маємо

$$W(A) = W(B) = \{x \in X \mid x_{2n-1} = 0,\ n \in \mathbf{N}\},$$

$$[x] \in U(A) = U(B) \;\Leftrightarrow\; [x] = \{z \in X \mid z_{2n-1} = x_{2n-1},\ n \in \mathbf{N}\}.$$

Якщо деяка послідовність $\big\{[A^n x] \mid n \geq 1\big\} \subset U(A)$ обмежена, то

$$\sup_{n\geq 1} 2^n \sup_{m \in \mathbf{N}} |x_{2m-1}| = \sup_{n\geq 1} \big\|[A^n x]\big\| < +\infty.$$

Для послідовності $\big\{[B^n x] \mid n \geq 1\big\} \subset U(B)$ міркування аналогічні. В обох випадках $x_{2m-1} = 0$, $m \in \mathbf{N}$. Тоді

$$\sup_{n\geq 1} \|A^n x\| = \sup_{n\geq 1} 0{,}5^n \sup_{m \in \mathbf{N}} |x_{2m}| < +\infty$$

або

$$\sup_{n\geq 1} \|B^n x\| = \sup_{n\geq 1} \sup_{m \in \mathbf{N}} |x_{2m}| < +\infty$$

відповідно. Тому $A, B \in V(X)$. Оскільки $\sigma(B) = \{1, 2\}$, друга умова теореми не справджується для оператора B і умова єдиності обмеженого розв'язку порушується.

Оскільки $\sigma(A) = \{0{,}5; 2\}$, друга умова теореми справджується для оператора A.

Якщо $M = M_1 = \{x \in X \mid x_{2n} = x_{2n-1},\ n \in \mathbf{N}\}$, то

$$\forall [x] \in U(A)\ \exists! m \in M_1 : m \in [x], \qquad m_{2n} = m_{2n-1} = x_{2n-1}, \quad n \in \mathbf{N},$$

перша умова теореми виконується і твердження про існування та єдиність розв'язку справджується.

Якщо ж $M = M_2 = \{x \in X \mid x_{2n-1} = 0,\ n \in \mathbf{N}\}$, то для нульового елемента множини $U(A)$ маємо $M_2 \subset [\vec{0}]$, тому перша умова теореми порушується і твердження про існування і єдиність розв'язку не справджується.

3. Рівняння з початковою умовою.

Теорема 4. *Нехай M — підпростір простору X (можливо, тривіальний). Різницеве рівняння* (1) *має обмежений розв'язок $\{x_n \mid n \geq 1\} \subset X$ для довільної обмеженої послідовності $\{y_n \mid n \geq 0\} \subset X$ і довільного елемента $x_0 \in M$ тоді й лише тоді, коли*

$$\sigma(A) \subset \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}.$$

Доведення. Легко перевірити за індукцією, що розв'язок рівняння (1) має вигляд

$$x_n = A^n x_0 + A^{n-1} y_0 + A^{n-2} y_1 + \ldots + y_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Необхідність. Нехай для довільного $x_0 \in M$ і довільної обмеженої послідовності $\{y_n \mid n \geq 0\} \subset X$ розв'язок $\{x_n \mid n \geq 1\} \subset X$ є обмеженим.

1. Нехай $y_n = \vec{0}$, $n \geq 0$, і $x_0 \in M$ — довільний елемент. У цьому випадку розв'язок має вигляд

$$x_n = A^n x_0, \quad n \geq 1.$$

Оскільки цей розв'язок обмежений, то

$$\forall x_0 \in M : \sup_{n \geq 1} \|A^n x_0\| < +\infty. \tag{10}$$

2. Нехай $y_n = y_0$, $n \geq 1$, і $x_0 \in M$, $y_0 \in X$ — довільні елементи. В цьому випадку розв'язок має вигляд

$$x_n = A^n x_0 + A^{n-1} y_0 + A^{n-2} y_0 + \ldots + y_0, \quad n \geq 1.$$

Оскільки розв'язок обмежений і умова (10) справджується, то

$$\forall y_0 \in X : \sup_{n \geq 1} \left\| A^{n-1} y_0 + A^{n-2} y_0 + \ldots + y_0 \right\| < +\infty. \tag{11}$$

3. Нехай

$$y_n = A^{n-1} y_0 + A^{n-2} y_0 + \ldots + y_0, \quad n \geq 1,$$

і $x_0 \in M$, $y_0 \in X$ — довільні елементи. Наведена послідовність є обмеженою внаслідок умови (11). За індукцією можна показати, що розв'язок має вигляд

$$x_n = A^n x_0 + n A^{n-1} y_0 + (n-1) A^{n-2} y_0 + \ldots + y_0, \quad n \geq 1.$$

Оскільки розв'язок обмежений і справджується умова (10), то

$$\forall y_0 \in X \ : \ \sup_{n\geq 1} \|nA^{n-1}y_0 + (n-1)A^{n-2}y_0 + \ldots + y_0\| < +\infty.$$

Використовуючи аналогічні міркування, можна показати, що

$$\forall y_0 \in X \ : \ \sup_{n\geq 1} \|n^2A^{n-1}y_0 + (n-1)^2A^{n-2}y_0 + \ldots + y_0\| < +\infty,$$

а тому за допомогою тотожності

$$n^2A^{n-1}y_0 = (n^2A^{n-1}y_0 + (n-1)^2A^{n-2}y_0 + \ldots + y_0) - ((n-1)^2A^{n-2}y_0 + \ldots + y_0)$$

отримуємо

$$\forall y_0 \in X : \sup_{n\geq 1} \|n^2A^{n-1}y_0\| < +\infty.$$

Використовуючи теорему Банаха – Штейнгауза, маємо

$$\sup_{n\geq 1} \|n^2A^{n-1}\| < +\infty. \tag{12}$$

З цієї оцінки для довільного $z \in \mathbf{C}$, $|z| \geq 1$, випливають збіжність ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|z^{-n}A^n\|$$

та існування оператора $(A - zI)^{-1} \in L(X)$.

Отже, умова

$$\sigma(A) \subset \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\} \tag{13}$$

справджується.

Достатність. Нехай умова (13) справджується. З неї випливає, що спектральний радіус оператора A менший за 1, тому

$$\exists C > 0 \ \exists \varepsilon \in (0,1) \ \forall n \in \mathbf{N} : \|A^n\| \leq C(1-\varepsilon)^n.$$

Тепер ми можемо оцінити розв'язок:

$$\|x_n\| \leq \|A^n x_0\| + \|A^{n-1}y_0\| + \|A^{n-2}y_1\| + \ldots + \|y_{n-1}\| \leq$$
$$\leq L\big(\|A^n\| + \|A^{n-1}\| + \ldots + \|A^0\|\big) \leq$$
$$\leq CL\big(1 + (1-\varepsilon) + (1-\varepsilon)^2 + \ldots\big) = \frac{CL}{\varepsilon}, \quad n \geq 1,$$

де $L := \sup\big\{\|x_0\|, \|y_n\| \mid n \geq 1\big\}$.

4. Відома послідовність із підпростору.

Теорема 5. *Нехай M_1, M_2 — підпростори простору X (можливо, тривіальні). Різницеве рівняння* (1) *має обмежений розв'язок $\{x_n \mid n \geq 1\} \subset X$ для довільної послідовності $\{y_n \mid n \geq \geq 0\} \subset M_2$ і довільного елемента $x_0 \in M_1$ тоді й лише тоді, коли:*

1) $\forall x \in M_1 : \ \sup_{n\geq 1} \|A^n x\| < +\infty$;

2) $\sup_{n\geq 1} n^2 \|A^n\|_{L(M_2,X)} < +\infty$.

Доведення. Повторимо міркування з доведення теореми 4 з необхідними змінами.

Необхідність. 1. Покладемо $y_n = \vec{0},\ n \geq 0$, тоді

$$\forall x_0 \in M_1 : \sup_{n \geq 1} \|A^n x_0\| < +\infty. \tag{14}$$

2. Нехай $y_n = y_0,\ n \geq 1$, і $x_0 \in M_1,\ y_0 \in M_2$ — довільні елементи. Використовуючи (14), маємо

$$\sup_{n \geq 1} \|A^{n-1} y_0 + A^{n-2} y_0 + \ldots + y_0\| < +\infty.$$

Як і в доведенні теореми 4, отримуємо

$$\sup_{n \geq 1} \|n^2 A^{n-1}\|_{L(M_2, X)} < +\infty.$$

Достатність. З другої умови випливає, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|A^n\|_{L(M_2, X)}$$

збіжний до деякого $C \geq 0$. Тому маємо оцінку

$$\|x_n\| \leq \|A^n x_0\| + \|A^{n-1} y_0\| + \|A^{n-2} y_1\| + \ldots + \|y_{n-1}\| \leq$$
$$\leq \|A^n x_0\| + \big(\|A^{n-1}\|_{L(M_2,X)} + \ldots + \|A^0\|_{L(M_2,X)}\big)\|y_0\| \leq \sup_{k \geq 0} \|A^k x_0\| + C \sup_{k \geq 0} \|y_k\|, \quad n \geq 1.$$

***Зауваження* 4.** Якщо $M_2 = X$, то друга умова еквівалентна такій:

$$\sigma(A) \subset \big\{ z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1 \big\}.$$

Справді, з цієї умови випливає збіжність ряду

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k z^{-k}, \quad |z| \geq 1,$$

отже, $(A - zI)^{-1}$ існує для $|z| \geq 1$.

5. Застосування до рівнянь зі стрибком операторного коефіцієнта. Розглянемо різницеве рівняння зі стрибком операторного коефіцієнта

$$x_{n+1} = \begin{cases} B_1 x_n + y_n, & n < 0, \\ B_2 x_n + y_n, & n \geq 0, \end{cases} \tag{15}$$

де $B_1, B_2 \in L(X)$, $\{y_n \mid n \in \mathbf{Z}\} \subset X$ — відома обмежена послідовність. Рівняння такого вигляду вивчались у роботах [6, 7]. Ми отримаємо іншу умову існування та єдиності обмеженого розв'язку рівняння (15).

Теорема 6. *Нехай* $B_1, B_2 \in L(X)$, *існують* $B_1^{-1} \in L(X)$ *і* $B_1^{-1}, B_2 \in V(X)$. *Рівняння* (15) *має для довільної обмеженої послідовності* $\{y_n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ *єдиний обмежений розв'язок тоді й лише тоді*, *коли справджуються такі умови*:

1) $\forall [x] \in U(B_1^{-1})\ \forall [z] \in U(B_2)\ \exists! m \in X : m \in [x] \cap [z]$;

2) $\sigma(B_1) \cap \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\} = \varnothing$;
3) $\sigma(B_2) \cap \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\} = \varnothing$.

Доведення. Запишемо першу частину рівняння (15) у вигляді

$$B_1^{-1}x_{n+1} = x_n + B_1^{-1}y_n, \quad n < 0.$$

Якщо позначити $u_n = x_{-n},\ n \geq 0$, і $v_n = -B_1^{-1}y_{-n-1},\ n \geq 0$, то отримаємо еквівалентне рівняння

$$u_{n+1} = B_1^{-1}u_n + v_n, \quad n \geq 0.$$

Розглядаючи це рівняння разом з другою частиною рівняння (15), можемо записати їх, як рівняння у банаховому просторі X^2 з нормою $\|(x^{(1)}, x^{(2)})\| = \|x^{(1)}\| + \|x^{(2)}\|$:

$$z_{n+1} = Az_n + w_n,\ n \geq 0,$$

де $A = \begin{pmatrix} B_1^{-1} & O \\ O & B_2 \end{pmatrix}$ і $z_0 \in M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \mid x \in X \right\}$ (остання умова є необхідною, оскільки елемент $u_0 = x_0$ використовується в обох частинах рівняння).

Тепер ми можемо застосувати теорему 3. Друга умова цієї теореми еквівалентна умовам 2, 3 теореми 6 завдяки блочній структурі оператора A.

Крім того,

$$W(A) = \{(x^{(1)}, x^{(2)}) \mid \sup_{n\geq 1} \|(B_1^{-1})^n x^{(1)}\| < +\infty,\ \sup_{n\geq 1} \|B_2^n x^{(2)}\| < +\infty\} = W(B_1^{-1}) \times W(B_2),$$

тому

$$U(A) = U(B_1^{-1}) \times U(B_2).$$

Перша умова теореми 3 набирає вигляду

$$\forall [z] \in U(A)\ \exists!(m, m) \in M : (m, m) \in [z],$$

або, що те саме,

$$\forall [x] \times [z] \in U(B_1^{-1}) \times U(B_2)\ \exists! m \in X : m \in [x] \cap [z].$$

6. Застосування до рівнянь з двома операторними коефіцієнтами.

Теорема 7. *Нехай $B_1, B_2 \in L(X)$, M — підпростори простору X. Різницеве рівняння*

$$x_{n+1} = B_1x_n + B_2x_{n-1} + y_n, \quad n \geq 0,$$

має обмежений розв'язок для довільної обмеженої послідовності $\{y_n : n \geq 0\}$ і довільних елементів $x_0, x_1 \in M$ тоді й лише тоді, коли:

1) $\forall x \in M : \sup_{n\geq 1} \|C_n x\| < +\infty$, *де $\{C_n \mid n \geq 1\}$ — послідовність, що рекурсивно визначається рівнянням $C_n = B_2C_{n-2} + B_1C_{n-1},\ n \geq 2$, і початковими умовами $C_0 = I$, $C_1 = O$*;

2) $\sup_{n\geq 1} n^2\|D_n\| < +\infty$, *де $\{D_n \mid n \geq 1\}$ — послідовність, що рекурсивно визначається рівнянням $D_n = B_2D_{n-2} + B_1D_{n-1},\ n \geq 2$, і початковими умовами $D_0 = O,\ D_1 = I$.*

Доведення. Запишемо це рівняння у вигляді

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & I \\ B_2 & B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{0} \\ y_n \end{pmatrix}, \quad n \geq 1.$$

Тоді можна використати теорему 5 у випадку $M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in X \right\}$, $M_1 = M^2$. Тут

$$A = \begin{pmatrix} O & I \\ B_2 & B_1 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи індукцію, легко переконатися, що

$$A^n = \begin{pmatrix} C_n & D_n \\ C_{n+1} & D_{n+1} \end{pmatrix}, \quad n \geq 1.$$

Перша умова теореми 5 набирає вигляду

$$\forall x \in M: \sup_{n \geq 1} \|C_n x\| < +\infty$$

і

$$\forall x \in M: \sup_{n \geq 1} \|D_n x\| < +\infty,$$

а друга є такою:

$$\sup_{n \geq 1} n^2 \|D_n\| < +\infty.$$

Ми отримали умови 1, 2 теореми 6.

***Зауваження* 5.** 1. Якщо в теоремі 6 оператори B_1, B_2 комутують, то наведені в твердженні послідовності можна записати, як $C_n = \sum_{k=0}^{n} c_{nk} B_1^{n-2k} B_2^k$, $D_n = B_2 C_n$, $n \geq 1$, де $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_{nk} x^k$ — поліноми Фібоначчі.

2. Аналоги теореми 6 можуть бути сформульовані для інших різницевих рівнянь на напівосі.

Література

1. I. V. Gaishun, *Stability of two-parameter discrete systems with commuting operators*, Different. Equat., **32**, № 2, 219 – 227 (1996).
2. М. Ф. Городній, О. А. Лагода, *Обмеженість розв'язків двопараметричного різницевого рівняння у банаховому просторі*, Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки, № 3, 94 – 98 (1999).
3. Ю. В. Томілов, *Асимптотична поведінка однієї рекурентної послідовності в банаховому просторі*, Асимптотичне інтегрування нелінійних рівнянь, 146 – 153 (1992).
4. D. Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Springer, Berlin (1981).
5. F. Riesz, B. Szokefalvi-Nagy, *Functional analysis*, Dover Publ., New York (1990).
6. І. В. Гончар, *Про обмежені розв'язки різницевого рівняння зі стрибком операторного коефіцієнта*, Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки, № 2, 25 – 28 (2016).
7. М. Ф. Городній, І. В. Гончар, *Про обмежені розв'язки різницевого рівняння зі змінним операторним коефіцієнтом*, Доп. НАН України, № 12, 12 – 16 (2016).
8. R. V. Kadison, J. R. Ringrose, *Fundamentals of the theory of operator algebras*, vol. I, Elementary Theory, Amer. Math. Soc. (1997).

Одержано 17.04.21