DOI: 10.37863/umzh.v73i10.6698

УДК 517.925.51; 681.5.03

О. Г. Мазко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ЗВАЖЕНЕ ГАСІННЯ ЗОВНІШНІХ І ПОЧАТКОВИХ ЗБУРЕНЬ У ДЕСКРИПТОРНИХ СИСТЕМАХ КЕРУВАННЯ

We investigate the problem of H_∞-control of a generalized type for a class of linear descriptor systems and suggest a criterion and sufficient conditions for the existence of control laws ensuring that the closed-loop system is regular, stable and impulse-free with a desired estimate for the weighted damping level of external and initial disturbances. The main computational procedures for the synthesis of controllers are reduced to solving linear and quadratic matrix inequalities that have no rank constraints. An example of robust stabilization of a hydraulic system with three tanks is given.

Досліджується проблема узагальненого H_∞-керування для класу лінійних дескрипторних систем. Запропоновано критерій та достатні умови існування законів керування, при яких замкнена система є регулярною, стійкою, неімпульсною і гарантується бажана оцінка зваженого рівня гасіння зовнішніх і початкових збурень. Основні обчислювальні процедури синтезу регуляторів зводяться до розв'язання лінійних і квадратичних матричних нерівностей без рангових обмежень. Наведено приклад робастної стабілізації гідравлічної системи з трьома резервуарами.

1. Вступ. Сучасні напрямки досліджень в теорії керування формують методи робастної стабілізації та H_2/H_∞-оптимізації, які забезпечують робастну стійкість станів рівноваги й мінімізують негативний вплив зовнішніх (екзогенних) збурень на динаміку керованих об'єктів (див., наприклад, [1 – 6]). Оцінювання і зниження впливу обмежених збурень у системах керування можна здійснювати методами мінімізації характеристик, що описують розміри інваріантних множин векторів стану або виходу [6, 7]. Типовим критерієм якості у задачах H_∞-оптимізації неперервних та дискретних систем з нульовим початковим станом є рівень гасіння зовнішніх збурень, якому відповідає максимальне значення відношення L_2-норм векторів керованого виходу об'єкта і збурень. Так, для класу лінійних систем

$$E\dot{x} = Ax + Bw, \quad z = Cx + Dw, \quad x(0) = x_0, \tag{1.1}$$

дана характеристика збігається з H_∞-нормою матричної передавальної функції

$$\|H\|_\infty = \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \sqrt{\lambda_{\max}(H^\top(-i\omega)H(i\omega))}, \quad H(\lambda) = C(\lambda E - A)^{-1}B + D,$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^k$ і $w \in \mathbb{R}^s$ — вектори відповідно стану, контрольованого виходу і входу системи, E, A, B, C і D — сталі матриці відповідних розмірів, $\lambda_{\max}(\cdot)$ — максимальне власне значення матриці.

На практиці доцільно застосовувати зважені критерії якості керованих систем вигляду [8]

$$J = \sup_{(w,x_0)\in\mathcal{W}} \frac{\|z\|_Q}{\sqrt{\|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0}}, \tag{1.2}$$

де

$$\|z\|_Q^2 = \int_0^\infty z^\top Qz\,dt, \quad \|w\|_P^2 = \int_0^\infty w^\top Pw\,dt,$$

$\mathcal{W}$ — множина допустимих пар (w, x_0) системи, для яких виконується нерівність $0 < \|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0 < \infty$, а $P = P^\top > 0$, $Q = Q^\top > 0$ і $X_0 = X_0^\top \geq 0$ — задані вагові матриці (див. також [9, 10]). Значення J характеризує зважений рівень гасіння зовнішніх збурень, а також початкових збурень, обумовлених ненульовим початковим вектором. За допомогою вагових коефіцієнтів у таких критеріях якості можна встановити пріоритети між компонентами керованого виходу і невизначених збурень у системі керування. При цьому компонентами невизначених збурень можуть бути як зовнішні збурення, що діють на систему, так і похибки вимірюваного виходу.

Система (1.1) є диференціально-алгебраїчною (дескрипторною), якщо матриця при похідних E вироджена. Дескрипторні системи виникають при проєктуванні та дослідженні динаміки керованих об'єктів механіки, електротехніки, економіки тощо (див., наприклад, [11 – 18]). При побудові рівнянь руху таких об'єктів у змінних, що описують реальний фізичний процес, необхідно враховувати не лише диференціальні, а й алгебраїчні зв'язки та обмеження у фазовому просторі. Наприклад, механічні системи з обмеженнями в широких припущеннях описуються у вигляді [13, 16]

$$A_2\ddot{q}(t) + A_1\dot{q}(t) + A_0 q(t) = Uu(t) + V\mu(t), \quad G_1\dot{q}(t) + G_0 q(t) = 0, \tag{1.3}$$

де $q(t) \in \mathbb{R}^\nu$ — вектор положень, $u(t) \in \mathbb{R}^s$ — вектор діючих зовнішніх сил, $\mu(t) \in \mathbb{R}^r$ — вектор множників Лагранжа, A_2 — матриця інерційних характеристик, A_1 — матриця демпфування або гіроскопічних характеристик, A_0 — матриця жорсткості, $V^\top$ — якобіан рівняння обмежень. Система рівнянь (1.3) набирає стандартної форми (1.1), якщо

$$E = \begin{bmatrix} I_\nu & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & I_\nu & 0 \\ -A_0 & -A_1 & V \\ G_0 & G_1 & 0 \end{bmatrix}], \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ U \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \\ \mu \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} C_0 & C_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0, \quad z = C_0 q + C_1\dot{q}.$$

Відомі методи синтезу H_∞-керування базуються на критеріях виконання верхніх оцінок для відповідних критеріїв якості, встановлених у термінах матричних рівнянь та лінійних матричних нерівностей (ЛМН) [1, 2, 19]. Для класу лінійних дескрипторних систем аналогічні твердження встановлено в [20 – 23]. З відомими методами H_∞-оптимізації таких систем можна ознайомитись, наприклад, у [16, 20, 22, 24, 25].

У даній статті продовжено дослідження [26, 27], присвячені задачам синтезу узагальненого H_∞-керування для лінійних дескрипторних систем. Запропоновано нові необхідні та достатні умови існування статичних та динамічних регуляторів, які забезпечують бажану оцінку зваженого рівня впливу обмежених збурень на якість перехідних процесів у дескрипторних системах з керованими і спостережуваними виходами. Практичне застосування даних умов зводиться до розв'язання лінійних і квадратичних матричних нерівностей щодо параметризованих матриць без додаткових рангових обмежень. Відмітна особливість отриманих результатів порівняно з відомими полягає у застосуванні зважених критеріїв якості, які дають нові можливості при досягненні бажаних характеристик дескрипторних систем керування.

Будемо використовувати такі позначення: I_n — одинична матриця порядку n; $0_{n\times m}$ — нульова матриця розмірів $n\times m$; $X = X^\top > 0$ (≥ 0) — додатно (невід'ємно) визначена симетрична матриця X; $\sigma(A)$ — спектр матриці A; $A^{-1}(A^+)$ — обернена (псевдообернена) матриця; $\operatorname{Ker} A$ — ядро матриці A; W_A — матриця, стовпці якої утворюють базис ядра $\operatorname{Ker} A$; $\operatorname{Co}\{A_1,\ldots,A_\nu\}$ — опуклий багатогранник (політоп) з вершинами $A_1,\ldots,A_\nu$ у просторі матриць; $\|x\|$ — евклідова норма вектора x; $\|w\|_P$ — зважена L_2-норма вектор-функції $w(t)$.

2. Означення і допоміжні твердження. Розглянемо дескрипторну систему (1.1), де $\operatorname{rank} E = \rho < n$, і критерій якості (1.2). Система (1.1) називається *допустимою*, якщо пара матриць (A,E) *регулярна*, *стійка* і *неімпульсна* [15], тобто відповідно $\det F(\lambda) \not\equiv 0$, $\lambda\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, $i=\overline{1,\alpha}$, і $\alpha=\rho$, де $\Sigma=\{\lambda_1,\ldots,\lambda_\alpha\}$ — скінченний спектр в'язки матриць $F(\lambda)=A-\lambda E$. Пара матриць (E,A) є регулярною тоді і лише тоді, коли існують невироджені матриці L і R, що перетворюють її до канонічної форми Веєрштрасса [28]

$$LAR = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-\alpha} \end{bmatrix}, \quad LER = \begin{bmatrix} I_\alpha & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

де N — нільпотентна матриця індексу ν, а спектр матриці A_1 збігається з Σ. Зокрема, рівність $N=0$ еквівалентна ранговій умові [13]

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} E & 0 \\ A & E \end{bmatrix} = n+\rho$$

і означає, що пара матриць (A,E) неімпульсна.

Допустиму дескрипторну систему (1.1) на основі перетворення (2.1) можна подати у вигляді

$$\dot x_1 = A_1x_1 + B_1w, \quad z = C_1x_1 + D_1w, \quad x_1(0) = x_{01}, \tag{2.2}$$

де $x_1\in\mathbb{R}^\alpha$, A_1 — гурвіцева матриця, $D_1 = D - C_2B_2$,

$$x = R\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad x_0 = R\begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix}, \quad LB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad CR = \begin{bmatrix} C_1, C_2 \end{bmatrix}.$$

Лема 2.1 [22]. *Система* (1.1) *є допустимою тоді і лише тоді, коли система співвідношень*

$$A^\top X + X^\top A < 0, \quad E^\top X = X^\top E \geq 0$$

сумісна щодо X.

Нехай J — критерій якості (1.2) системи (1.1) з ваговою матрицею $X_0 = E^\top HE$, де $H = H^\top > 0$ — задана матриця. Для допустимої системи $x_0^\top X_0 x_0 = x_{01}^\top X_{01} x_{01}$, де $X_{01} = L_1^\top H L_1 > 0$, $L_1 = L^{-1}\begin{bmatrix} I_\alpha & 0\end{bmatrix}^\top$, і значення J збігається з аналогічним критерієм якості J_1 типу (1.2), визначеним для підсистеми (2.2).

Лема 2.2 [23]. *Нехай система співвідношень*

$$\Psi(X) = \begin{bmatrix} A^\top X + X^\top A + C^\top QC & X^\top B + C^\top QD \\ B^\top X + D^\top QC & D^\top QD - \gamma^2 P \end{bmatrix} < 0, \tag{2.3}$$

$$0 \leq E^\top X = X^\top E \leq \gamma^2 X_0, \quad \operatorname{rank}\left(E^\top X - \gamma^2 X_0\right) = \rho, \tag{2.4}$$

де $\gamma > 0$, *сумісна щодо* X. *Тоді система* (1.1) *допустима і виконується оцінка* $J < \gamma$. *Зворотне твердження виконується за умови*

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} E^\top & C^\top QD \end{bmatrix} = \rho. \tag{2.5}$$

За умов леми 2.2 нульовий стан системи (1.1) зі структурованою невизначеністю вектора $w = \dfrac{1}{\gamma}\Theta z$ при $\Theta^\top P \Theta \le Q$ робастно стійкий зі спільною функцією Ляпунова $v(x) = x^\top E^\top X x$. Це твердження є наслідком перетворення (2.1) і теореми про робастну стабілізацію лінійної системи [8] (теорема 3.3.1).

Нехай $E = E_l E_r^\top$ — скелетний розклад матриці E, де E_l і E_r — матриці повного рангу ρ за стовпцями, а W_E і $W_{E^\top}$ — матриці, стовпці яких утворюють базиси ядер відповідних матриць E і $E^\top$.

Лема 2.3. *Для невироджених матриць* X *і* Y, *пов'язаних рівністю*

$$XY = \gamma^2 I_n, \tag{2.6}$$

еквівалентні такі твердження:

(i) *виконується система співвідношень* (2.4);

(ii) *існують матриці* $S = S^\top$ *і* G, *при яких*

$$X = SE + W_{E^\top} G, \quad 0 < E_l^\top S E_l < \gamma^2 E_l^\top H E_l; \tag{2.7}$$

(iii) *існують матриці* $T = T^\top$ *і* F, *при яких*

$$Y = TE^\top + W_E F, \quad E_r^\top T E_r > \left(E_l^\top H E_l\right)^{-1}. \tag{2.8}$$

Доведення. Очевидно, що кожна матриця X в (2.7) задовольняє співвідношення (2.4), оскільки

$$E^\top X = E^\top S E \ge 0, \quad E^\top X - \gamma^2 X_0 = E_r \left(E_l^\top S E_l - \gamma^2 E_l^\top H E_l\right) E_r^\top.$$

Нехай L і R — невироджені матриці, при яких

$$E = L^{-1}\begin{bmatrix} I_\rho & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R^{-1}, \quad E_l = L^{-1}\begin{bmatrix} I_\rho \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_r = R^{-1\top}\begin{bmatrix} I_\rho \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$W_E = R\begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-\rho} \end{bmatrix}, \quad W_{E^\top} = L^\top \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-\rho} \end{bmatrix}.$$

Кожна матриця X в (2.4) має таку структуру:

$$X = L^\top \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ X_2 & X_3 \end{bmatrix} R^{-1}, \quad 0 < X_1 = X_1^\top < \gamma^2 E_l^\top H E_l. \tag{2.9}$$

Співвідношення (2.9) набирають вигляду (2.7), якщо

$$S = L^\top \begin{bmatrix} S_1 & S_2^\top \\ S_2 & S_3 \end{bmatrix} L, \quad G = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \end{bmatrix} R^{-1},$$

де $S_1 = X_1$, $S_2 = X_2 - G_1$, $G_2 = X_3$, а G_1 і $S_3 = S_3^\top$ — довільні матриці відповідних розмірів. Отже, твердження (i) та (ii) еквівалентні.

Встановимо еквівалентність тверджень (i) та (iii). Запишемо співвідношення (2.4) в термінах матриці $Y = \gamma^2 X^{-1}$, помноживши вирази зліва і справа відповідно на $X^{-1\top}$ і X^{-1}:

$$0 \le EY = Y^\top E^\top \le Y^\top X_0 Y, \quad \operatorname{rank}\left(EY - Y^\top X_0 Y\right) = \rho. \tag{2.10}$$

Кожна матриця Y в (2.8) задовольняє співвідношення (2.10), оскільки

$$EY = ETE^\top \ge 0, \quad EY - Y^\top X_0 Y = E_l T_1 \left(T_1^{-1} - E_l^\top H E_l\right) T_1 E_l^\top,$$

де $T_1 = E_r^\top T E_r$, причому $T_1^{-1} < E_l^\top H E_l$ тоді і лише тоді, коли виконується матрична нерівність у (2.8).

Нехай виконуються співвідношення (2.4). Враховуючи (2.9) і вираховуючи обернену матрицю X^{-1}, отримуємо вираз

$$Y = \gamma^2 R \begin{bmatrix} X_1^{-1} & 0 \\ -X_3^{-1} X_2 X_1^{-1} & X_3^{-1} \end{bmatrix} L^{-1\top}.$$

Далі, покладаючи

$$T = R \begin{bmatrix} T_1 & T_2^\top \\ T_2 & T_3 \end{bmatrix} R^\top, \quad F = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \end{bmatrix} L^{-1\top},$$

де $T_1 = E_r^\top T E_r = \gamma^2 X_1^{-1}$, $T_2 = -F_1 - \gamma^2 X_3^{-1} X_2 X_1^{-1}$, $F_2 = \gamma^2 X_3^{-1}$, а F_1 і $T_3 = T_3^\top$ — довільні матриці відповідних розмірів, і враховуючи еквівалентність нерівностей $X_1 < \gamma^2 E_l^\top H E_l$ і $\gamma^2 X_1^{-1} > (E_l^\top H E_l)^{-1}$, одержуємо співвідношення (2.8). Отже, твердження (i) та (iii) еквівалентні.

Лему 2.3 доведено.

Вектор збурення $w(t)$ і початковий вектор x_0 називатимемо *найгіршими* в системі (1.1) щодо критерію якості J, якщо на їхніх значеннях в (1.2) досягається супремум, тобто $\|z\|_Q^2 = J^2\left(\|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0\right)$. Методи знаходження таких векторів у окремих випадках запропоновано в [9, 29].

Лема 2.4 [26]**.** *Нехай система* (1.1) *допустима і для деякої матриці X виконуються співвідношення*

$$A_1^\top X + X^\top A_1 + X^\top R_1 X + Q_1 = 0,$$

$$0 \le E^\top X = X^\top E \le \gamma^2 X_0,$$

де $A_1 = A + BR^{-1}D^\top QC$, $R_1 = BR^{-1}B^\top$, $Q_1 = C^\top\left(Q + QDR^{-1}D^\top Q\right)C$, $R = \gamma^2 P - D^\top QD > 0$ і $\gamma = J$. Тоді структурований вектор зовнішніх збурень у формі лінійного зворотного зв'язку за станом

$$w = K_0 x, \quad K_0 = R^{-1}\left(B^\top X + D^\top QC\right),$$

і довільний початковий вектор $x_0 \in \operatorname{Ker}\left(E^\top X - J^2 X_0\right)$ є найгіршими щодо критерію якості J для системи (1.1).

Переформулюємо критерій сумісності квадратичних матричних нерівностей вигляду

$$A + B^\top XC + C^\top X^\top B + C^\top X^\top RXC < 0, \tag{2.11}$$

отриманий у [26], де $A = A^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{q\times n}$ і $R = R^\top \in \mathbb{R}^{p\times p}$.

Лема 2.5. *Якщо* $\operatorname{rank} B < n$, $\operatorname{rank} C < n$ *і* $R \geq 0$, *то матрична нерівність* (2.11) *має розв'язок* $X \in \mathbb{R}^{p\times q}$ *тоді і лише тоді, коли виконуються умови*

$$W_C^\top A W_C < 0, \quad \Delta^\top \left(A - B^\top R^+ B\right)\Delta < 0, \quad \Delta = \begin{cases} W_B, & r = 0, \\ I_n, & r = p, \\ W_{B_0}, & 1 \leq r < p, \end{cases}$$

де $B_0 = W_R^\top B$, R^+ *— псевдообернена матриця і* $r = \operatorname{rank} R$.

3. Основні результати. Розглянемо дескрипторну систему керування

$$\begin{aligned} E\dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u, \quad x(0) = x_0, \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u, \\ y &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u, \end{aligned} \tag{3.1}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^s$, $z \in \mathbb{R}^k$ і $y \in \mathbb{R}^l$ — вектори відповідно стану, керування, зовнішніх збурень, керованого і спостережуваного виходів. Всі матричні коефіцієнти в (3.1) сталі, причому пара (E, A) регулярна і $\operatorname{rank} E = \rho \leq n$. Нас цікавлять закони керування, які гарантують бажану оцінку $J < \gamma$ критерію якості (1.2) замкненої системи щодо керованого виходу z. Статичні й динамічні регулятори, які мінімізують критерій якості J, називатимемо *J-оптимальними*.

3.1. Статичний регулятор. Застосовуючи статичний регулятор

$$u = Ky, \quad \det(I_m - KD_{22}) \neq 0, \tag{3.2}$$

маємо замкнену систему

$$E\dot{x} = A_* x + B_* w, \quad z = C_* x + D_* w, \tag{3.3}$$

де $A_* = A + B_2 K_* C_2$, $B_* = B_1 + B_2 K_* D_{21}$, $C_* = C_1 + D_{12} K_* C_2$, $D_* = D_{11} + D_{12} K_* D_{21}$, $K_* = (I_m - KD_{22})^{-1} K$. Відомо [30], що існує така матриця регулятора K, при якій система (3.3) є допустимою і має критерій якості $J < \gamma$, якщо сумісною щодо X і Y є система співвідношень (2.4), (2.6) і

$$W_R^\top \begin{bmatrix} A^\top X + X^\top A + C_1^\top Q C_1 & X^\top B_1 + C_1^\top Q D_{11} \\ B_1^\top X + D_{11}^\top Q C_1 & D_{11}^\top Q D_{11} - \gamma^2 P \end{bmatrix} W_R < 0, \tag{3.4}$$

$$W_L^\top \begin{bmatrix} AY + Y^\top A^\top + B_1 P^{-1} B_1^\top & Y^\top C_1^\top + B_1 P^{-1} D_{11}^\top \\ C_1 Y + D_{11} P^{-1} B_1^\top & D_{11} P^{-1} D_{11}^\top - \gamma^2 Q^{-1} \end{bmatrix} W_L < 0, \tag{3.5}$$

де W_R і W_L — матриці, стовпці яких утворюють базиси ядер відповідних матриць $R = \begin{bmatrix} C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ і $L = \begin{bmatrix} B_2^\top & D_{12}^\top \end{bmatrix}$. При цьому справедливість зворотного твердження забезпечує рангова умова (2.5) для системи (3.3), тобто

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}E^\top & C_*^\top Q D_*\end{bmatrix} = \rho, \tag{3.6}$$

а шукану матрицю K можна побудувати у вигляді $K = K_*(I_l + D_{22}K_*)^{-1}$, розв'язуючи відносно K_* ЛМН

$$\begin{bmatrix} A_*^T X + X^\top A_* & X^\top B_* & C_*^\top \\ B_*^\top X & -\gamma^2 P & D_*^\top \\ C_* & D_* & -Q^{-1} \end{bmatrix} = \widehat{L}^\top K_* \widehat{R} + \widehat{R}^\top K_*^\top \widehat{L} + \widehat{\Omega} < 0, \tag{3.7}$$

де

$$\widehat{R} = \begin{bmatrix}R & 0_{l\times k}\end{bmatrix}, \quad \widehat{L} = \begin{bmatrix}L & 0_{m\times s}\end{bmatrix}\widetilde{X},$$

$$\widetilde{X} = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_k \\ 0 & I_s & 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{\Omega} = \begin{bmatrix} A^\top X + X^\top A & X^\top B_1 & C_1^\top \\ B_1^\top X & -\gamma^2 P & D_{11}^\top \\ C_1 & D_{11} & -Q^{-1} \end{bmatrix}.$$

За лемою Шура матричні нерівності (2.3) і (3.7) для системи (3.3) еквівалентні. Умова (3.6) не залежить від K і виконується, наприклад, у таких випадках:

$$D_{11} = 0, \quad D_{21} = 0, \tag{3.8}$$

$$D_{12} = 0, \quad \operatorname{rank}\begin{bmatrix}E^\top & C_1^\top Q D_{11}\end{bmatrix} = \rho. \tag{3.9}$$

Складнощі застосування наведеного критерію можуть виникнути у зв'язку з наявністю матричних рівностей у системі (2.4), (2.6), (3.4) і (3.5), яку необхідно розв'язати. Лема 2.3 дозволяє уникнути таких складнощів при застосуванні статичного регулятора за станом.

Теорема 3.1. *Нехай виконуються умови*

$$C_2 = I_n, \quad D_{11}^\top Q D_{11} < \gamma^2 P, \quad D_{21} = 0, \quad D_{22} = 0. \tag{3.10}$$

Тоді для системи (3.1) *існує статичний регулятор за станом* $u = Kx$, *при якому замкнена система* (3.3) *допустима і має критерій якості* $J < \gamma$, *якщо система ЛМН* (2.8) *і* (3.5) *з невиродженою матрицею* Y *сумісна щодо* $T = T^\top$ *і* F. *Зворотне твердження справедливе, якщо разом з* (3.10) *виконуються умови* (3.8) *або* (3.9).

Доведення. За умов (3.10) $y \equiv x$, $W_R = \begin{bmatrix}0_{s\times n}, I_s\end{bmatrix}^\top$, а матрична нерівність (3.4) виконується і не залежить від X. У цьому випадку на підставі леми 2.2 та еквівалентності тверджень (ii), (iii) в лемі 2.3 достатніми умовами існування матриці регулятора K є сумісність співвідношень (2.8) і (3.5) щодо $T = T^\top$ і F. При цьому матрицю $K = K_*$ такого регулятора можна знайти як розв'язок ЛМН (3.7), де $X = \gamma^2 Y^{-1}$.

За умов (3.10) в (3.6) $C_* = C_1 + D_{12}K$ і $D_* = D_{11}$. Тому якщо разом з (3.10) виконується одна з умов (3.8) або (3.9), то виконується також рангова умова (3.6) і на основі леми 2.2 маємо необхідні та достатні умови існування статичного регулятора за станом виключно в термінах ЛМН (2.8) і (3.5).

Теорему 3.1 доведено.

3.2. Динамічний регулятор. Розглянемо систему керування (3.1) і динамічний регулятор з нульовим початковим вектором

$$\dot{\xi} = Z\xi + Vy, \quad u = U\xi + Ky, \quad \xi(0) = 0, \tag{3.11}$$

де $\xi \in \mathbb{R}^p$, Z, V, U і K — шукані матриці відповідних розмірів. Дану систему можна описати в розширеному фазовому просторі $\mathbb{R}^{n+p}$ як

$$\begin{gathered}\widehat{E}\dot{\widehat{x}} = \widehat{A}\widehat{x} + \widehat{B}_1 w + \widehat{B}_2 \widehat{u}, \quad \widehat{x}(0) = \widehat{x}_0,\\ z = \widehat{C}_1 \widehat{x} + \widehat{D}_{11} w + \widehat{D}_{12} \widehat{u},\\ \widehat{y} = \widehat{C}_2 \widehat{x} + \widehat{D}_{21} w,\end{gathered} \tag{3.12}$$

застосовуючи статичний регулятор за спостережуваним виходом

$$\widehat{u} = \widehat{K}_* \widehat{y}, \quad \det(I_m - KD_{22}) \neq 0, \tag{3.13}$$

де

$$\begin{gathered}\widehat{x} = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}, \quad \widehat{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{y} = \begin{bmatrix} y - D_{22}u \\ \xi \end{bmatrix}, \quad \widehat{u} = \begin{bmatrix} u \\ \dot{\xi} \end{bmatrix}, \quad \widehat{E} = \begin{bmatrix} E & 0_{n\times p} \\ 0_{p\times n} & I_p \end{bmatrix},\\ \widehat{A} = \begin{bmatrix} A & 0_{n\times p} \\ 0_{p\times n} & 0_{p\times p} \end{bmatrix}, \quad \widehat{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{p\times s} \end{bmatrix}, \quad \widehat{B}_2 = \begin{bmatrix} B_2 & 0_{n\times p} \\ 0_{p\times m} & I_p \end{bmatrix},\\ \widehat{C}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0_{k\times p} \end{bmatrix}, \quad \widehat{D}_{11} = D_{11}, \quad \widehat{D}_{12} = \begin{bmatrix} D_{12} & 0_{k\times p} \end{bmatrix},\\ \widehat{C}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0_{l\times p} \\ 0_{p\times n} & I_p \end{bmatrix}, \quad \widehat{D}_{21} = \begin{bmatrix} D_{21} \\ 0_{p\times s} \end{bmatrix}, \quad \widehat{K}_* = \begin{bmatrix} K_* & U_* \\ V_* & Z_* \end{bmatrix} = (I_{m+p} - \widehat{K}\widehat{D}_{22})^{-1}\widehat{K},\\ \widehat{K} = \begin{bmatrix} K & U \\ V & Z \end{bmatrix} = (I_{m+p} + \widehat{K}_*\widehat{D}_{22})^{-1}\widehat{K}_*, \quad \widehat{D}_{22} = \begin{bmatrix} D_{22} & 0_{l\times p} \\ 0_{p\times m} & 0_{p\times p} \end{bmatrix}.\end{gathered} \tag{3.14}$$

Замкнена система має вигляд

$$\widehat{E}\dot{\widehat{x}} = \widehat{A}_*\widehat{x} + \widehat{B}_* w, \quad z = \widehat{C}_*\widehat{x} + \widehat{D}_* w, \quad \widehat{x}(0) = \widehat{x}_0, \tag{3.15}$$

де $\widehat{A}_* = \widehat{A} + \widehat{B}_2\widehat{K}_*\widehat{C}_2$, $\widehat{B}_* = \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2\widehat{K}_*\widehat{D}_{21}$, $\widehat{C}_* = \widehat{C}_1 + \widehat{D}_{12}\widehat{K}_*\widehat{C}_2$ і $\widehat{D}_* = \widehat{D}_{11} + \widehat{D}_{12}\widehat{K}_*\widehat{D}_{21}$.

Нехай $\widehat{J}$ — критерій якості типу (1.2) системи (3.15) з ваговими матрицями

$$P = P^\top > 0, \quad Q = Q^\top > 0, \quad \widehat{X}_0 = \widehat{E}^\top \widehat{H}\widehat{E}, \quad \widehat{H} = \begin{bmatrix} H & H_1^\top \\ H_1 & H_2 \end{bmatrix} > 0.$$

Оскільки $\xi_0 = 0$, то $\widehat{J}$ не залежить від H_1 і H_2, а його значення збігається з J.

Теорема 3.2. *Нехай виконуються умови*

$$R_0 = D_{12}^\top Q D_{12} > 0, \quad R_1 = \gamma^2 P - D_{11}^\top Q_1 D_{11} > 0. \tag{3.16}$$

Тоді якщо сумісною щодо $\Theta = \Theta^\top \geq 0$, $S = S^\top$ *та* G *є система співвідношень* (3.4) *і*

$$E_l^\top \Theta E_l < E_l^\top S E_l < \gamma^2 E_l^\top H E_l, \tag{3.17}$$

$$A_2^\top \widetilde{X} + \widetilde{X}^\top A_2 + \widetilde{X}^\top R_2 \widetilde{X} + Q_2 < 0, \tag{3.18}$$

де

$$X = SE + W_{E^\top} G, \quad \widetilde{X} = (S - \Theta)E + W_{E^\top} G,$$
$$A_2 = A_1 + B_{11} R_1^{-1} D_{11}^\top Q_1 C_1, \quad A_1 = A - B_2 R_0^{-1} D_{12}^\top Q C_1,$$
$$R_2 = B_{11} R_1^{-1} B_{11}^\top - B_2 R_0^{-1} B_2^\top, \quad B_{11} = B_1 - B_2 R_0^{-1} D_{12}^\top Q D_{11},$$
$$Q_1 = Q - Q D_{12} R_0^{-1} D_{12}^\top Q, \quad Q_2 = C_1^\top \left(Q_1 + Q_1 D_{11} R_1^{-1} D_{11}^\top Q_1 \right) C_1,$$

то для системи (3.1) *існує динамічний регулятор* (3.11) *порядку* $p = \operatorname{rank} \Theta$, *при якому замкнена система* (3.15) *допустима і має критерій якості* $J < \gamma$.

Доведення. Враховуючи зображення системи (3.12), на основі лем 2.2, 2.3 наведемо співвідношення, які забезпечують існування статичного регулятора (3.13), при якому замкнена система (3.15) допустима й її критерій якості $\widehat{J} = J < \gamma$. Матричну нерівність (2.3) для системи (3.15) запишемо у вигляді квадратичної матричної нерівності щодо $\widehat{K}_*$:

$$\widehat{A}_0 + \widehat{B}_0^\top \widehat{K}_* \widehat{C}_0 + \widehat{C}_0^\top \widehat{K}_*^\top \widehat{B}_0 + \widehat{C}_0^\top \widehat{K}_*^\top \widehat{R}_0 \widehat{K}_* \widehat{C}_0 < 0, \tag{3.19}$$

де

$$\widehat{A}_0 = \begin{bmatrix} \widehat{A}^\top \widehat{X} + \widehat{X}^\top \widehat{A} + \widehat{C}_1^\top Q \widehat{C}_1 & \widehat{X}^\top \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1^\top Q D_{11} \\ \widehat{B}_1^\top \widehat{X} + D_{11}^\top Q \widehat{C}_1 & D_{11}^\top Q D_{11} - \gamma^2 P \end{bmatrix}, \quad \widehat{X} = \begin{bmatrix} X & X_3 \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix},$$
$$\widehat{B}_0 = \begin{bmatrix} \widehat{B}_2^\top \widehat{X} + \widehat{D}_{12}^\top Q \widehat{C}_1 & \widehat{D}_{12}^\top Q D_{11} \end{bmatrix}, \quad \widehat{C}_0 = \begin{bmatrix} \widehat{C}_2 & \widehat{D}_{21} \end{bmatrix}, \quad \widehat{R}_0 = \widehat{D}_{12}^\top Q \widehat{D}_{12},$$

а замість умов (2.4) для блочної матриці $\widehat{X}$ розглянемо співвідношення

$$\widehat{X} = \widehat{S}\widehat{E} + W_{\widehat{E}^\top} \widehat{G}, \quad 0 < \widehat{E}_l^\top \widehat{S} \widehat{E}_l < \gamma^2 \widehat{E}_l^\top \widehat{H} \widehat{E}_l, \tag{3.20}$$

де

$$\widehat{S} = \begin{bmatrix} S & S_1^\top \\ S_1 & S_2 \end{bmatrix}, \quad \widehat{G} = \begin{bmatrix} G & G_1 \end{bmatrix}, \quad W_{\widehat{E}^\top} = \begin{bmatrix} W_{E^\top} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{E}_l = \begin{bmatrix} E_l & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}.$$

Можна показати, що за даних умов матриця $\widehat{X}$ та її діагональні блоки X і $X_2 = S_2$ повинні бути невиродженими. За лемою 2.5 маємо критерій сумісності квадратичної нерівності (3.19):

$$W_{\widehat{C}_0}^\top \widehat{A}_0 W_{\widehat{C}_0} < 0, \quad W_{\widetilde{B}_0}^\top \left(\widehat{A}_0 - \widehat{B}_0^\top \widehat{R}_0^+ \widehat{B}_0 \right) W_{\widetilde{B}_0} < 0, \tag{3.21}$$

де $\widetilde{B}_0 = W_{\widehat{R}_0}^\top \widehat{B}_0$. Перша нерівність в (3.21) зводиться до (3.4), оскільки

$$\widehat{C}_0 = \begin{bmatrix} C_2 & 0_{l\times p} & D_{21} \\ 0_{p\times n} & I_p & 0_{p\times s} \end{bmatrix}, \quad W_{\widehat{C}_0} = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times s} \\ 0_{p\times n} & 0_{p\times s} \\ 0_{s\times n} & I_s \end{bmatrix} W_R.$$

Перетворимо другу нерівність у (3.21), врахувавши вирази

$$W_{\widehat{R}_0} = \begin{bmatrix} 0_{m\times p} \\ I_p \end{bmatrix}, \quad W_{\widetilde{B}_0} = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times s} \\ -X_2^{-1} X_1 & 0_{p\times s} \\ 0_{s\times n} & I_s \end{bmatrix}, \quad \widetilde{B}_0 = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & 0_{p\times s} \end{bmatrix},$$

$$\widehat{R}_0^+ = \begin{bmatrix} R_0^{-1} & 0_{k\times p} \\ 0_{p\times k} & 0_{p\times p} \end{bmatrix}, \quad \widehat{B}_0 W_{\widetilde{B}_0} = \begin{bmatrix} B_2^\top \widetilde{X} + D_{12}^\top Q C_1 & D_{12}^\top Q D_{11} \\ 0_{p\times n} & 0_{p\times s} \end{bmatrix},$$

$$W_{\widetilde{B}_0}^\top \widehat{A}_0 W_{\widetilde{B}_0} = \begin{bmatrix} A^\top \widetilde{X} + \widetilde{X}^\top A + C_1^\top Q_1 C_1 & \widetilde{X}^\top B_1 + C_1^\top Q D_{11} \\ B_1^\top \widetilde{X} + D_{11}^\top Q C_1 & D_{11}^\top Q D_{11} - \gamma^2 P \end{bmatrix},$$

де $\widetilde{X} = X - X_3 X_2^{-1} X_1,\ X_1 = X_3^\top E = S_1 E.$

Нехай $X_2 = S_2 = I_p$, а $X_3 \in \mathbb{R}^{n\times p}$ — множник у розкладі невід'ємно визначеної матриці $\Theta = X_3 X_3^\top \geq 0$. Тоді $\widetilde{X} = X - \Theta E$ і з урахуванням (3.16) друга нерівність в (3.21) набирає вигляду

$$\begin{bmatrix} A_1^\top \widetilde{X} + \widetilde{X}^\top A_1 + C_1^\top Q_1 C_1 - \widetilde{X}^\top B_2 R_0^{-1} B_2^\top \widetilde{X} & \widetilde{X}^\top B_{11} + C_1^\top Q_1 D_{11} \\ B_{11}^\top \widetilde{X} + D_{11}^\top Q_1 C_1 & -R_1 \end{bmatrix} < 0.$$

Дана нерівність за лемою Шура еквівалентна (3.18).

Для того щоб за умов (3.17) виконувались співвідношення (3.20), достатньо покласти $S_1 = X_3^\top - G_1^\top W_{E^\top}^\top,\ H_1 = \gamma^{-2} S_1$ і вибрати довільні матриці G_1 і $H_2 > \gamma^{-2} I_p$. При цьому $E_l^\top S E_l > E_l^\top S_1^\top S_1 E_l = E_l^\top \Theta E_l$.

Теорему 3.2 доведено.

***Зауваження* 3.1.** Зворотне твердження до теореми 3.2 про умови сумісності системи співвідношень (3.4), (3.17) і (3.18) можна встановити, застосувавши лему 2.2 до замкненої системи (3.15) і додаткове припущення (3.6), зокрема умови (3.8) або (3.9).

На основі теореми 3.2 наведемо алгоритм побудови шуканого динамічного регулятора (3.11):

1) знаходження матриць $\Theta = \Theta^\top \geq 0,\ S = S^\top$ і G, що задовольняють систему співвідношень (3.4), (3.17) і (3.18);

2) побудова спектрального розкладу невід'ємно визначеної матриці $\Theta = T\Lambda T^\top$, де $T \in \mathbb{R}^{n\times r},\ \Lambda = \operatorname{diag}\{\theta_1,\ldots,\theta_r\} > 0,\ r = \operatorname{rank}\Theta$;

3) формування доповнювальних блоків $X_1 = T^\top E,\ X_2 = \Lambda^{-1}$ і $X_3 = T$ матриці $\widehat{X}$ при $p = r$;

4) розв'язання матричної нерівності (3.19) щодо $\widehat{K}_*$;

5) обчислення матричних коефіцієнтів регулятора (3.11) за формулами (3.14).

***Зауваження* 3.2.** Умови теореми 3.2 у випадку $\Theta = 0$ забезпечують існування статичного регулятора (3.2), при якому замкнена система (3.3) є допустимою і виконується оцінка $J < \gamma$ (див. [27], теорема 3.1). Тому якщо вдається розв'язати систему співвідношень (3.4), (3.17) і (3.18) щодо $S = S^\top$ і G при $\Theta = 0$, то матрицю шуканого статичного регулятора можна знайти у вигляді $K = K_*(I_l + D_{22}K_*)^{-1}$, де K_* — розв'язок ЛМН (3.7) при $X = SE + W_{E^\top} G$.

***Зауваження* 3.3.** Твердження теорем 3.1 і 3.2 можна поширити на клас систем (3.1) за умов поліедральної невизначеності матричних коефіцієнтів

$$A \in \operatorname{Co}\{A_1,\ldots,A_{\nu_1}\}, \quad B_1 \in \operatorname{Co}\left\{B_1^1,\ldots,B_1^{\nu_2}\right\},$$
$$C_1 \in \operatorname{Co}\left\{C_1^1,\ldots,C_1^{\nu_3}\right\}, \quad D_{11} \in \operatorname{Co}\left\{D_{11}^1,\ldots,D_{11}^{\nu_4}\right\}.$$

Для цього замість (3.4), (3.5) і (3.18) слід використати відповідні системи матричних нерівностей, сформованих для всіх можливих наборів вершин заданих політопів. Зазначимо, що матричні інтервали й афінні множини можна описати у вигляді політопів. Наприклад, матричний інтервал

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathbb{R}^{n\times m} : \underline{A} \le A \le \overline{A}\},$$

де $\underline{A} = \|\underline{a}_{ij}\|_{i,j=1}^{n,m}$, $\overline{A} = \|\overline{a}_{ij}\|_{i,j=1}^{n,m}$, $\le$ — знак нерівності щодо конуса невід'ємних матриць, описує політоп з $\nu = 2^{nm}$ вершинами:

$$\mathrm{Co}\,\{A_1,\ldots,A_\nu\} = \left\{\sum_{k=1}^{\nu} a_k A_k : a_k \ge 0,\ k=\overline{1,\nu},\ \sum_{k=1}^{\nu} a_k = 1\right\},$$

$$A_k = \left\|a_{ij}^k\right\|_{i,j=1}^{n,m}, \quad a_{ij}^k \in \left\{\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}\right\}, \quad i=\overline{1,n}, \quad j=\overline{1,m}, \quad k=\overline{1,\nu}.$$

4. Приклад. Робастна стабілізація гідравлічної системи. Розглянемо лінеаризовану модель гідравлічної системи з трьома послідовно сполученими резервуарами, яка описується у вигляді дескрипторної системи керування (3.1) з такими матрицями [31]:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{11} = 0_{1\times 2}, \quad D_{12} = 1,$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{22} = 0_{2\times 1}.$$

Компоненти вектора стану $x = \left[x_1, x_2, x_3\right]^\top$ визначають рівні рідини у відповідних резервуарах, вектор $w = \left[w_1, w_2\right]^\top$ формують неконтрольовані збурення w_1 і похибка w_2 у вимірах $y = \left[x_1, x_2 + w_2\right]^\top$, керований вихід $z = x_3 + u$, а роль керування u, що регулює рівні рідини у перших двох резервуарах, виконує дебіт (потік) рідини в насосі із третього резервуара в перший (рис. 1).

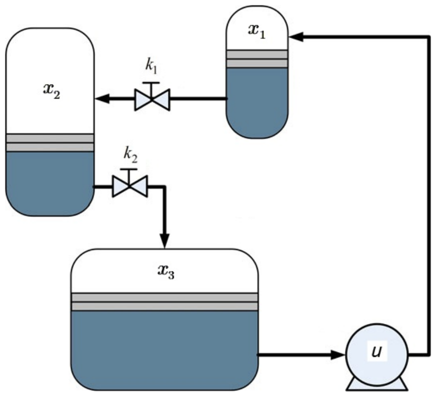

Рис. 1. Гідравлічна система з трьома резервуарами.

У даному прикладі $n = 3$, $m = 1$, $k = 1$, $s = 2$, $l = 2$, пара матриць (E, A) допустима, а система (3.1) імпульсно керована та імпульсно спостережувана. Система без керування має критерій якості $J = 7,66027$.

Виберемо вагові матриці критерію якості (1.2) $P = \mathrm{diag}\,\{2,1\}$, $Q = 1$, $X_0 = \mathrm{diag}\,\{1,1,0\}$, $H = I_3$ і допустимі значення параметрів

$$\underline{k}_1 = 0,01 \le k_1 \le 0,1 = \overline{k}_1, \quad \underline{k}_2 = 0,1 \le k_2 \le 1,2 = \overline{k}_2. \tag{4.1}$$

Застосовуючи комп'ютерну систему Mathcad Prime, при $\gamma = 2,2$ і $\Theta = 0$ знаходимо матриці

$$S = \begin{bmatrix} 2,75851 & 1,86824 & 0,02321 \\ 1,86824 & 3,15258 & 0,19783 \\ 0,02321 & 0,19783 & 0,23992 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0,80714 & 0,64032 & -0,85066 \end{bmatrix},$$

що задовольняють співвідношення (3.17) і систему восьми матричних нерівностей, сформовану згідно з (3.4) і (3.18) при таких значеннях пари (k_1, k_2): $(\underline{k}_1, \underline{k}_2)$, $(\underline{k}_1, \overline{k}_2)$, $(\overline{k}_1, \underline{k}_2)$, $(\overline{k}_1, \overline{k}_2)$. Далі знаходимо матрицю статичного регулятора (3.2)

$$K = \begin{bmatrix} -1,12507 & -0,76271 \end{bmatrix}$$

як розв'язок системи ЛМН (3.7) при вказаних значеннях пари (k_1, k_2) і матриці

$$X = SE + W_{E^\top} G = \begin{bmatrix} 2,75851 & 1,86824 & 0 \\ 1,86824 & 3,15258 & 0 \\ 0,83034 & 0,83815 & -0,85066 \end{bmatrix}.$$

При цьому замкнена система (3.3) допустима й її критерій якості $J = 1,67775 < \gamma$ при всіх значеннях параметрів (4.1) (див. зауваження 3.2 і 3.3).

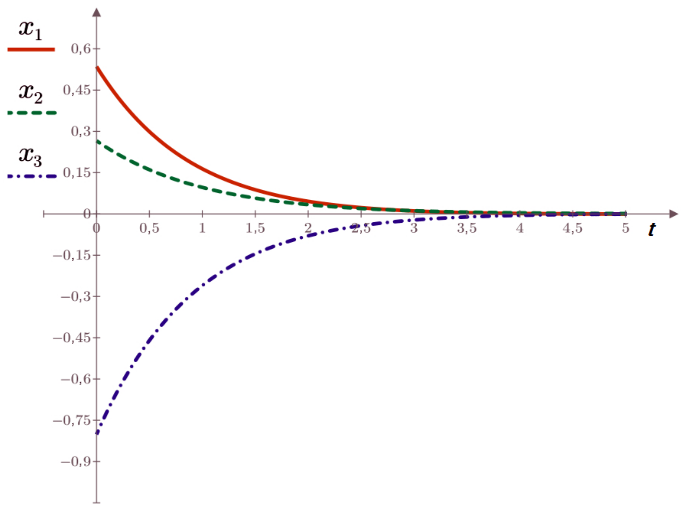

Рис. 2. Поведінка замкненої системи.

Далі, для замкненої системи при $k_1 = 0,1$ і $k_2 = 1,2$ будуємо найгірше збурення

$$w = K_0 x, \quad K_0 = \begin{bmatrix} 0,41169 & 0,17803 & 0 \\ -0,40743 & -0,08191 & -0,34139 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

і найгірший початковий вектор $x_0 = \begin{bmatrix} 0,53574 & 0,26573 & -0,80148 \end{bmatrix}^\top$ щодо критерію якості J (див. лему 2.4). На рис. 2 зображено поведінку розв'язку замкненої системи при наявності найгіршого збурення

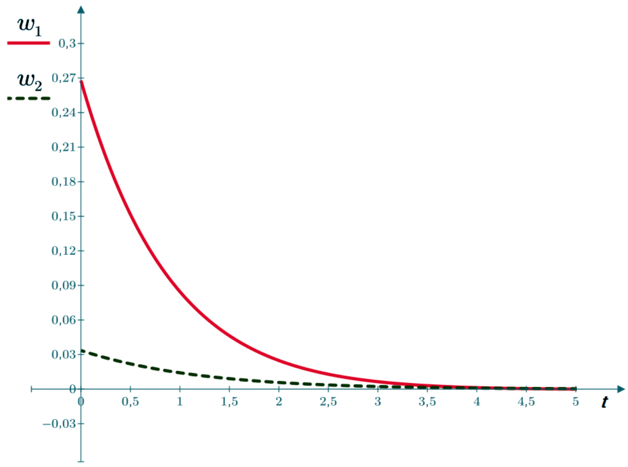

Рис. 3. Найгірше збурення щодо критерію якості J.

$$E\dot{x} = A_0 x, \quad A_0 = A + B_2 K C_2 + B_1 K_0, \quad x(0) = x_0, \tag{4.3}$$

а на рис. 3 — функцію (4.2) даного збурення. Система (4.3) допустима і має скінченний спектр $\Sigma = \big\{ -0,98151 \pm 0,17470\, i \big\}$. Її розв'язок побудовано у вигляді $x(t) = T\widetilde{x}(t)$, де T — матриця повного рангу, для якої виконуються співвідношення $A_0 T = ET\Lambda$ і $\operatorname{rank} T = \operatorname{rank}(ET) = \operatorname{rank} E$, а $\widetilde{x}(t)$ — розв'язок звичайної системи $\dot{\widetilde{x}} = \Lambda\widetilde{x}$, причому $\sigma(\Lambda) = \Sigma$ і $x_0 = T\widetilde{x}_0$.

Аналогічні обчислення проводились для даної системи при пошуку динамічного регулятора (3.11). За допомогою наведеного алгоритму побудовано динамічний регулятор першого порядку з матрицями

$$K = \begin{bmatrix} -0,95250 & -1,09756 \end{bmatrix}, \quad U = -0,31040,$$
$$V = \begin{bmatrix} -0,73469 & -1,28101 \end{bmatrix}, \quad Z = -0,72267,$$

при якому замкнена система (3.15) допустима і виконується оцінка $J < \gamma = 2,2$ для всіх значень параметрів (4.1). Зокрема, при $k_1 = 0,1$ і $k_2 = 1,2$ система (3.15) має скінченний спектр $\Sigma = \big\{ -0,37981; -1,29769 \pm 0,32064\, i \big\}$ і $J = 1,75205$.

Література

1. S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishman, *Linear matrix inequalities in system and control theory*, SIAM Stud. Appl. Math., **15** (1994).
2. P. Gahinet, P. Apkarian, *A linear matrix inequality approach to H_∞ control*, Intern. J. Robust and Nonlinear Control, **4**, 421 – 448 (1994).
3. G. E. Dullerud, F. G. Paganini, *A course in robust control theory. A convex approach*, Springer-Verlag, Berlin (2000).
4. Б. Т. Поляк, П. С. Щербаков, *Робастная устойчивость и управление*, Наука, Москва (2002).
5. Д. В. Баландин, М. М. Коган, *Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств*, Физматлит, Москва (2007).
6. Б. Т. Поляк, М. В. Хлебников, П. С. Щербаков, *Управление линейными системами при внешних возмущениях. Техника линейных матричных неравенств*, Ленанд, Москва (2014).
7. В. М. Кунцевич, *Оценки воздействия ограниченных возмущений на нелинейные дискретные системы и их минимизация*, Автоматика и телемеханика, № 9, 25 – 44 (2019).

8. А. Г. Мазко, *Робастная устойчивость и стабилизация динамических систем. Методы матричных и конусных неравенств*, Пр. Ін-ту математики НАН України, **102** (2016).
9. Д. В. Баландин, М. М. Коган, *Обобщенное H_∞-оптимальное управление как компромисс между H_∞-оптимальным и γ-оптимальным управлениями*, Автоматика и телемеханика, № 6, 20 – 38 (2010).
10. Z. Feng, J. Lam, S. Xu, S. Zhou, H_∞ *control with transients for singular systems*, Asian J. Control, **18**, № 3, 817 – 827 (2016).
11. S. Campbell, A. Ilchmann, V. Mehrmann, T. Reis (Eds.), *Applications of differential-algebraic equations: examples and benchmarks*, Differential-Algebraic Equations Forum, Springer Nature, Switzerland AG (2019).
12. A. Ilchmann, T. Reis (Eds.), *Surveys in differential-algebraic equations, III*, Differential-Algebraic Equations Forum, Springer Intern. Publ., Switzerland (2015).
13. Guang-Ren Duan, *Analysis and design of descriptor linear systems*, Springer, New York etc. (2010).
14. R. Riaza, *Differential-algebraic systems. Analytical aspects and circuit applications*, World Sci., Singapore (2008).
15. L. Dai, *Singular control systems*, Springer, New York (1989).
16. А. А. Белов, А. П. Курдюков, *Дескрипторные системы и задачи управления*, Физматлит, Москва (2015).
17. А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець, *Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями*, Вища шк., Київ (2000).
18. A. A. Boichuk, A. A. Pokutnyi, V. F. Chistyakov, *Application of perturbation theory to the solvability analysis of differential algebraic equations*, Comput. Math. and Math. Phys., **53**, № 6, 777 – 788 (2013).
19. S. Xu, J. Lam, Y. Zou, *New versions of bounded real lemmas for continuous and discrete uncertain systems*, Circuits, Systems and Signal Process, **26**, 829 – 838 (2007).
20. M. Chadli, P. Shi, Z. Feng, J. Lam, *New bounded real lemma formulation and H_∞ control for continuous-time descriptor systems*, Asian J. Control, **20**, № 1, 1 – 7 (2018).
21. F. Gao, W. Q. Liu, V. Sreeram, K. L. Teo, *Bounded real lemma for descriptor systems and its application*, IFAC 14th Triennial World Congress, Beijing, P. R. China (1999), p. 1631 – 1636.
22. I. Masubushi, Y. Kamitane, A. Ohara, N. Suda, *H_∞ control for descriptor systems: a matrix inequalities approach*, Automatica, **33**, № 4, 669 – 673 (1997).
23. О. Г. Мазко, *Оцінка зваженого рівня гасіння обмежених збурень у дескрипторних системах*, Укр. мат. журн., **70**, № 11, 1541 – 1552 (2018).
24. Yu Feng, Mohamed Yagoubi, *Robust control of linear descriptor systems*, Springer Nature Singapore Pte Ltd. (2017).
25. Masaki Inoue, Teruyo Wada, Masao Ikeda, Eiho Uezato, *Robust state-space H_∞ controller design for descriptor systems*, Automatica, **59**, 164 – 170 (2015).
26. О. Г. Мазко, Т. О. Котов, *Робастна стабілізація і зважене гасіння обмежених збурень у дескрипторних системах керування*, Укр. мат. журн., **71**, № 10, 1374 – 1388 (2019).
27. О. Г. Мазко, *Зважена оцінка і пониження рівня впливу обмежених збурень у дескрипторних системах керування*, Укр. мат. журн., **72**, № 11, 1510 – 1523 (2020).
28. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, Москва (1988).
29. О. Г. Мазко, С. М. Кусій, *Зважене гасіння обмежених збурень у системі керування літака в режимі посадки*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **15**, № 1, 88 – 99 (2018).
30. О. Г. Мазко, Т. О. Котов, *Стабілізація і гасіння обмежених збурень у дескрипторних системах керування*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **15**, № 1, 65 – 87 (2018).
31. J. M. Araujo, P. R. Barros, C. E. T. Dorea, *Design of observers with error limitation in discrete-time descriptor systems: a case study of a hydraulic tank system*, IEEE Trans. Control Syst. Technol., **20**, № 4, 1041 – 1047 (2012).

Одержано 19.04.21