DOI: 10.37863/umzh.v73i10.6702

УДК 539.3:534.13

В. А. Троценко, Ю. В. Троценко (Ін-т математики НАН України, Київ)

СТРУКТУРА ІНТЕГРАЛІВ РІВНЯНЬ КОЛИВАНЬ ЗАМКНЕНОЇ У ВЕРШИНІ КОНІЧНОЇ ОБОЛОНКИ

We consider a system of differential equations, which describes the free oscillations of a thin-walled conical shell of rotation with a vertex. Based on the analytical theory of systems of differential equations with a small parameter at the highest derivative and equations with a regular singular point, we establish the formal structure of regular integrals of the original equations.

Розглядається система диференціальних рівнянь, яка описує вільні коливання тонкостінної конічної оболонки обертання з вершиною. Виходячи з аналітичної теорії систем диференціальних рівнянь з малим параметром при старшій похідній і рівнянь з регулярною особливою точкою встановлено формальну структуру регулярних інтегралів вихідних рівнянь.

Розглянемо тонкостінну конічну оболонку обертання з кутом α між її віссю симетрії Oz і твірною. Вважається, що оболонка виготовлена з ізотропного матеріалу зі сталою товщиною h, обмежена однією паралеллю і має вершину. У такої оболонки лініями головних кривин будуть її меридіани та паралелі. У відповідності з цим в якості головних криволінійних координат серединної поверхні виберемо довжину дуги меридіана s, що відраховується від вершини оболонки, та кут φ, який визначає положення точки на відповідній паралелі. Позначимо через R_1 і R_2 головні радіуси кривини поверхні оболонки, а через $r = r(s)$ радіус кола паралелі. Тоді будемо мати

$$R_1 = \infty, \qquad R_2 = s \tan \alpha, \qquad r = s \sin \alpha.$$

Проєкції переміщень точок серединної поверхні оболонки на напрямок твірної, паралелі та зовнішню нормаль позначимо через $u(s,\varphi,t)$, $v(s,\varphi,t)$ та $w(s,\varphi,t)$ відповідно, де t — координата за часом.

Відокремлення змінних для усталених коливань з частотою ω з n хвилями по паралелі виконуємо за формулами

$$u(s,\varphi,t) = u(s)\cos n\varphi \sin \omega t, \quad v(s,\varphi,t) = v(s)\sin n\varphi \sin \omega t, \quad w(s,\varphi,t) = w(s)\cos n\varphi \sin \omega t.$$

Після переходу до безрозмірних величин $\bar{u}(s) = u(s)/R_0$, $\bar{v}(s) = v(s)/R_0$, $\bar{w}(s) = w(s)/R_0$ (риску над безрозмірними величинами в подальшому будемо пропускати) в рамках технічної теорії оболонок [1] отримаємо наступну однорідну систему звичайних диференціальних рівнянь відносно вектор-функції $\vec{u} = \{u, v, w\}$ та частот коливань ω_i:

$$\mathcal{A}\vec{u} - \lambda^2 \vec{u} = 0, \tag{1}$$

де

$$\mathcal{A} = \mu^4 K + L, \qquad \mu^4 = c^2 = \frac{h^2}{12R_0^2}, \qquad \lambda^2 = \frac{(1-\nu^2)\rho R_0^2 \omega^2}{E},$$

R_0 — радіус граничної паралелі при $s = s_1$, E, ν і ρ — модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона та густина матеріалу оболонки.

Диференціальні оператори, що входять в матриці L і K, мають вигляд

$$L_{11} = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s}\frac{d}{ds}s + \frac{(1-\nu)n^2}{2s^2\sin^2\alpha}, \qquad L_{12} = -\frac{n}{2s\sin\alpha}\left[(1+\nu)\frac{d}{ds} - \frac{3-\nu}{s}\right],$$

$$L_{13} = -\frac{\nu}{s\tan\alpha}\frac{d}{ds} + \frac{1}{s^2\tan\alpha}, \qquad L_{21} = \frac{n}{2\sin\alpha}\left[\frac{3-\nu}{s^2} + \frac{(1+\nu)}{s}\frac{d}{ds}\right],$$

$$L_{22} = -\frac{(1-\nu)}{2}\frac{d}{ds}\frac{1}{s}\frac{d}{ds}s + \frac{n^2}{s^2\sin^2\alpha}, \qquad L_{23} = \frac{n}{s^2\sin\alpha\tan\alpha},$$

$$L_{31} = \frac{\nu}{s\tan\alpha}\frac{d}{ds} + \frac{1}{s^2\tan\alpha}; \qquad L_{32} = \frac{n}{s^2\sin\alpha\tan\alpha}, \qquad L_{33} = \frac{1}{s^2\tan\alpha},$$

$$K_{ij} = 0 \qquad \text{для} \qquad i+j<6, \qquad K_{33} = \Delta_n\Delta_n, \qquad \Delta_n = \frac{1}{s}\frac{d}{ds}\left(s\frac{d}{ds}\right) - \frac{n^2}{s^2\sin^2\alpha}.$$

Коефіцієнти рівнянь (1) мають сингулярності при $s \to 0$ та малий параметр μ^4 при старшій похідній. Для встановлення формальної структури інтегралів рівнянь (1) скористаємося методом асимптотичного інтегрування рівнянь в умовах їх сингулярного збурення [2 – 6].

Перші інтеграли рівнянь (1) будемо шукати у вигляді прямого розкладу за малим параметром

$$u = \sum_{k=0}^{\infty}\mu^{4k}u_k(s), \qquad v = \sum_{k=0}^{\infty}\mu^{4k}v_k(s), \qquad w = \sum_{k=0}^{\infty}\mu^{4k}w_k(s). \tag{2}$$

Для визначення функцій $u_k(s)$, $v_k(s)$ і $w_k(s)$ підставимо розклади (2) у вихідне рівняння і прирівняємо коефіцієнти при різних степенях малого параметра до нуля. При $k = 0$ отримаємо систему диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами четвертого порядку відносно функцій $u_0(s)$, $v_0(s)$ і $w_0(s)$. Зведемо цю систему до канонічного вигляду з аналітичними коефіцієнтами. Для цього введемо до розгляду нові функції

$$y_1 = u_0, \qquad y_2 = v_0, \qquad y_3 = w_0, \qquad y_4 = s\frac{dv_0}{ds}.$$

Тоді систему рівнянь відносно функцій y_i, $i = \overline{1,4}$, можна записати у векторно-матричній формі

$$s\frac{d\vec{y}}{ds} = F(s,\lambda^2)\vec{y}, \qquad \vec{y} = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}^T. \tag{3}$$

Елементи матриці F визначаються такими виразами:

$$f_{11} = -\frac{1}{\nu},\ f_{12} = -\frac{n}{\nu\sin\alpha},\ f_{13} = \frac{\lambda^2 s^2\tan^2\alpha - 1}{\nu\tan\alpha},\ f_{14} = 0,\ g(s) = \nu(1-\nu^2) - \lambda^2\nu s^2\tan^2\alpha,$$

$$f_{21} = f_{22} = f_{23} = 0, \quad f_{24} = 1, \quad f_{31} = \frac{\tan\alpha}{g(s)}\left[1 + \lambda^2\nu^2 s^2 - \nu^2 - \frac{(1-\nu)\nu^2 n^2}{2\sin^2\alpha}\right],$$

$$f_{32} = \frac{n[2-(3-\nu)\nu^2]}{2\cos\alpha g(s)}, \quad f_{33} = \frac{1-\nu^2-\lambda^2(1-2\nu)s^2\tan^2\alpha}{g(s)}, \quad f_{34} = \frac{\nu n(\nu^2+\nu-2)}{2\cos\alpha g(s)},$$

$$f_{41} = \frac{n(\nu-1)}{\nu\sin\alpha}, \quad f_{42} = \frac{2}{1-\nu}\left[\frac{1-\nu}{2} - \lambda^2 s^2 + \frac{n^2(\nu-1)}{2\nu\sin^2\alpha}\right],$$

$$f_{43} = \frac{1}{\nu(1-\nu)\sin\alpha\tan\alpha}[n(1+\nu)(\lambda^2 s^2\tan^2\alpha - 1) + 2\nu n], \qquad f_{44} = 0.$$

У такому зображенні вихідної системи диференціальних рівнянь всі елементи f_{pq} матриці F є аналітичними функціями в деякій області зміни координати s і водночас всі не дорівнюють нулю в точці $s=0$. Звідси випливає, що точка $s=0$ є регулярною особливою точкою для цих рівнянь [2]. Для виявлення асимптотичної поведінки обмежених розв'язків в околі точки $s=0$ будемо використовувати узагальнений метод степеневих рядів.

З урахуванням розкладів у степеневі ряди кожного елемента f_{pq} матрицю-функцію $F(s,\lambda^2)$ можна записати у вигляді

$$F = \sum_{i=0}^{\infty} F_{2i} s^{2i}. \tag{4}$$

Тут сталі матриці F_k з елементами $f_{pq}^{(k)}$ мають таку структуру:

$$F_0 = \begin{Vmatrix} f_{11}^{(0)} & f_{12}^{(0)} & f_{13}^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ f_{31}^{(0)} & f_{32}^{(0)} & f_{33}^{(0)} & f_{34}^{(0)} \\ f_{41}^{(0)} & f_{42}^{(0)} & f_{43}^{(0)} & 0 \end{Vmatrix}, \qquad F_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & f_{13}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_{31}^{(2)} & f_{32}^{(2)} & f_{33}^{(2)} & f_{34}^{(2)} \\ 0 & f_{42}^{(2)} & f_{43}^{(2)} & 0 \end{Vmatrix},$$

$$F_{2i} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_{31}^{(2i)} & f_{32}^{(2i)} & f_{33}^{(2i)} & f_{34}^{(2i)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad i = 2, 3, \ldots .$$

Явні вирази для елементів матриці F_0 мають вигляд

$$f_{11}^{(0)} = -\frac{1}{\nu},\ f_{12}^{(0)} = -\frac{n}{\nu\sin\alpha},\ f_{13}^{(0)} = -\frac{1}{\nu\tan\alpha},$$

$$f_{14}^{(0)} = 0,\ f_{21}^{(0)} = f_{22}^{(0)} = f_{23}^{(0)} = 0,\ f_{24}^{(0)} = 1,$$

$$f_{31}^{(0)} = \frac{\tan\alpha}{\nu(1-\nu^2)}\left[1 - \nu^2 - \frac{(1-\nu)\nu^2 n^2}{2\sin^2\alpha}\right], \qquad f_{32}^{(0)} = \frac{n[2-(3-\nu)\nu^2]}{2\nu(1-\nu^2)\cos\alpha}, \quad f_{33}^{(0)} = \frac{1}{\nu}, \tag{5}$$

$$f_{34}^{(0)} = \frac{n(\nu^2+\nu-2)}{2(1-\nu^2)\cos\alpha}, \quad f_{41}^{(0)} = \frac{n(\nu-1)}{\nu\sin\alpha}, \quad f_{42}^{(0)} = \frac{\nu\sin^2\alpha - n^2}{\nu\sin^2\alpha},$$

$$f_{43}^{(0)} = -\frac{n}{\nu\sin\alpha\tan\alpha}, \quad f_{44}^{(0)} = 0.$$

Розв'язки системи (3) будемо шукати у вигляді

$$y_i = s^{\sigma}\sum_{k=0}^{\infty} g_{i,k} s^k, \qquad i = \overline{1,4}, \tag{6}$$

де σ і g_{ik} — невизначені сталі.

Підстановка рядів (4), (6) у рівняння (3) з урахуванням формули Коші для множення степеневих рядів та прирівнювання коефіцієнтів при s^σ в обох частинах отриманого співвідношення приводять до однорідної алгебраїчної системи рівнянь

$$(F_0 - \sigma E)\vec{g}_0 = 0, \quad \vec{g}_0 = \{g_{1,0}, g_{2,0}, g_{3,0}, g_{4,0}\}, \tag{7}$$

де E — одинична матриця.

Таким чином, σ є власним значенням, а вектор $\vec{g}_0$ — власним вектором матриці F_0. Характеристичне рівняння відносно показника σ має вигляд

$$\det(F_0 - \sigma E) = 0. \tag{8}$$

Прирівнювання коефіцієнтів при $s^{\sigma+k}$, $k = 1, 2, \ldots$, приводить до системи рівнянь

$$\det(F_0 - (\sigma + k)E)\vec{g}_k = -\sum_{j=1}^{k} F_j \vec{g}_{k-j}, \quad \vec{g}_k = \{g_{1,k}, g_{2,k}, g_{3,k}, g_{4,k}\}. \tag{9}$$

Таким чином, визначення параметра σ та коефіцієнтів розкладів (6) звелось до розв'язування однорідної алгебраїчної системи рівнянь (7) та рекурентної послідовності неоднорідних систем (9) відносно вектора $\vec{g}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, праві частини яких лінійно виражаються через $k - 1$ розв'язок попередніх систем.

Із умови (8) після підстановки в неї елементів матриць F_0 (5) отримаємо характеристичне рівняння четвертого порядку відносно параметра σ:

$$\begin{gathered}\sigma^4 - (f_{11}^{(0)} + f_{33}^{(0)})\sigma^3 + (f_{11}^{(0)} f_{33}^{(0)} - f_{42}^{(0)} - f_{34}^{(0)} f_{43}^{(0)} - f_{13}^{(0)} f_{31}^{(0)})\sigma^2 + \\ + (f_{11}^{(0)} f_{34}^{(0)} f_{43}^{(0)} - f_{13}^{(0)} f_{34}^{(0)} f_{41}^{(0)} - f_{32}^{(0)} f_{43}^{(0)} - f_{12}^{(0)} f_{41}^{(0)} + f_{11}^{(0)} f_{42}^{(0)} + f_{33}^{(0)} f_{42}^{(0)})\sigma + \\ + f_{11}^{(0)} f_{32}^{(0)} f_{43}^{(0)} + f_{13}^{(0)} f_{31}^{(0)} f_{42}^{(0)} + f_{12}^{(0)} f_{33}^{(0)} f_{41}^{(0)} - \\ - f_{13}^{(0)} f_{32}^{(0)} f_{41}^{(0)} - f_{11}^{(0)} f_{33}^{(0)} f_{42}^{(0)} - f_{12}^{(0)} f_{31}^{(0)} f_{43}^{(0)} = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

З урахуванням виразів для коефіцієнтів $f_{ij}^{(0)}$ (5) після перетворень можна показати, що корені рівняння (10), розміщені в порядку їх зменшення, набувають таких значень:

$$\sigma^{(1)} = 1, \qquad \sigma^{(2)} = 0, \qquad \sigma^{(3)} = 0, \qquad \sigma^{(4)} = -1. \tag{11}$$

Покладемо в рівняннях (7), (9) $\sigma = \sigma^{(1)}$ і побудуємо формальні розв'язки послідовності алгебраїчних рівнянь. При $k = 0$ маємо однорідну алгебраїчну систему з нульовим детермінантом. Розв'язок цієї системи з точністю до сталого множника має вигляд

$$g_{1,0}^{(1)} = 0, \qquad g_{2,0}^{(1)} = -\frac{\cos\alpha}{n}, \qquad g_{3,0}^{(1)} = 1, \qquad g_{4,0}^{(1)} = g_{2,0}^{(1)}.$$

При $k = 1, 3, 5, \ldots$ необхідно розв'язати однорідні алгебраїчні системи, визначники яких не дорівнюють нулю. Звідси

$$g_{1,k}^{(1)} = g_{2,k}^{(1)} = g_{3,k}^{(1)} = g_{4,k}^{(1)} = 0.$$

Для парних значень показника k маємо неоднорідні системи з ненульовими детермінантами. Тому

$$g_{1,k}^{(1)} \neq 0, \qquad g_{2,k}^{(1)} \neq 0, \qquad g_{3,k}^{(1)} \neq 0, \qquad g_{4,k}^{(1)} \neq 0.$$

Таким чином, перший регулярний інтеграл системи рівнянь (3) буде мати вигляд

$$y_1^{(1)} = s \sum_{k=0}^{\infty} g_{1,2k}^{(1)} s^{2k}, \qquad y_2^{(1)} = s \sum_{k=0}^{\infty} g_{2,2k}^{(1)} s^{2k}, \qquad y_3^{(1)} = s \sum_{k=0}^{\infty} g_{3,2k}^{(1)} s^{2k}. \tag{12}$$

Ряди (12) збігаються в деякому околі точки $s = 0$ і визначені цими рядами функції представляють в цьому околі частинний розв'язок системи (3).

Корені (11) характеристичного рівняння відрізняються від найбільшого кореня $\sigma^{(1)}$ на ціле число. В загальному випадку за допомогою знайденого розв'язку для найбільшого кореня можна понизити порядок вихідної системи і далі до отриманої системи застосовувати описаний вище підхід. Однак при цьому отримаємо розв'язки, які мають логарифмічну сингулярність.

Переконаємося, що в розглядуваному випадку при $\sigma = \sigma^{(2)}$ існує другий регулярний інтеграл системи рівнянь (3). У цьому випадку розв'язок системи (7) буде мати вигляд

$$g_{1,0}^{(2)} = 1, \qquad g_{2,0}^{(2)} = -\frac{n}{\sin\alpha}, \qquad g_{3,0}^{(2)} = \frac{n^2 - \sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}, \qquad g_{4,0}^{(2)} = 0.$$

При $k = 1$ відносно вектора $\vec{g}_1^{(2)}$ будемо мати алгебраїчну систему

$$[F_0 - E]\vec{g}_1^{(2)} = 0.$$

Оскільки це рівняння збігається з рівнянням для $\vec{g}_0^{(1)}$, то

$$g_1^{(2)} = \vec{g}_0^{(1)}.$$

Для $k \geq 2$ будемо мати послідовність неоднорідних алгебраїчних систем з ненульовими детермінантами. Таким чином,

$$g_{1,k}^{(2)} \neq 0, \qquad g_{2,k}^{(2)} \neq 0, \qquad g_{3,k}^{(2)} \neq 0, \qquad g_{4,k}^{(2)} \neq 0,$$

а другий регулярний інтеграл має формальну структуру

$$u^{(2)} = \sum_{k=0}^{\infty} g_{1,k}^{(2)} s^k, \qquad v^{(2)} = \sum_{k=0}^{\infty} g_{2,k}^{(2)} s^k, \qquad w^{(2)} = \sum_{k=0}^{\infty} g_{3,k}^{(2)} s^k. \tag{13}$$

Якщо побудувати лінійну комбінацію інтегралів (12), (13) з довільними сталими, то отримаємо зображення регулярної частини загального розв'язку системи (3).

Розв'язки диференціальних рівнянь (3), що відповідають кореням характеристичного рівняння $\sigma^{(3)}$, $\sigma^{(4)}$, будуть необмеженими при $s \to 0$. Вищі наближення в розкладах (2) не змінюють встановлену структуру отриманих лінійно незалежних розв'язків.

Прямий розклад розв'язків за малим параметром не дає можливості отримати всі інтеграли розглядуваних рівнянь. Тому у відповідності з теорією сингулярно збурених рівнянь [2, 3] наступні інтеграли будемо шукати у вигляді розкладів, що включають в себе експоненціальний множник:

$$u(s) = \mu\gamma(s)\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\widetilde{u}_k(s), \qquad v(s) = \mu^2\gamma(s)\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\widetilde{v}_k(s), \qquad w(s) = \gamma(s)\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\widetilde{w}_k(s),$$
$$\gamma(s) = \exp\left\{\frac{1}{\mu}\int\limits_{s_1}^{s}\varphi(x)dx\right\}. \tag{14}$$

Невідомі функції $\varphi(s)$, $\widetilde{u}_k(s)$, $\widetilde{v}_k(s)$, $\widetilde{w}_k(s)$ знаходяться після підставляння розкладів (14) у вихідні рівняння і прирівнювання до нуля коефіцієнтів при однакових степенях μ. При цьому для відшукання функції $\varphi(s)$ отримаємо рівняння

$$[\varphi(s)]^4 - b_0(s) = 0, \qquad b_0(s) = \lambda^2 - \frac{1-\nu^2}{R_2^2(s)}. \tag{15}$$

У подальшому будемо вважати, що

$$b_0(s) \neq 0, \qquad b_0(s) < 0, \qquad s \in [0, s_1].$$

Перша умова виключає з розгляду точки повороту, а друга означає, що розглядається лише нижча частина спектра частот оболонки.

За прийнятих умов рівняння (15) визначає чотири попарно спряжених розв'язки. Розмістивши їх у порядку зростання дійсних частин, будемо мати

$$\varphi_1(s) = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}|b_0|^{1/4}, \qquad \varphi_2(s) = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}|b_0|^{1/4},$$
$$\varphi_3(s) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}|b_0|^{1/4}, \qquad \varphi_4(s) = \frac{1-i}{\sqrt{2}}|b_0|^{1/4}.$$

Після підставляння у розклади (14) значень коренів із додатною дійсною частиною для експоненціального множника отримаємо такі вирази:

$$\exp^{\beta(s)}\cos\beta(s), \qquad \exp^{\beta(s)}\sin\beta(s), \qquad \beta(s) = \frac{1}{\mu\sqrt{2}}\int\limits_{s_1}^{s}|b_0(x)|^{1/4}dx.$$

Ці функції при малих значеннях параметра μ є сильно осцилюючими та різко затухаючими функціями при віддаленні від точки $s = s_1$.

Для знаходження функцій $\widetilde{u}_k(s)$, $\widetilde{v}_k(s)$ і $\widetilde{w}_k(s)$ доводиться окрім алгебраїчних рівнянь розв'язувати і лінійні диференціальні рівняння. Неважко переконатися, що ці трудноші можна подолати шляхом розвинень у ряди Тейлора в околі точки $s = s_1$. Таким чином, два останніх інтеграли вихідних рівнянь, які локалізуються в околі краю оболонки, мають такі формальні зображення:

$$u^{(j)}(s) = \mu\gamma^{(j)}(s)\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\left\{\sum_{i=0}^{\infty}u_{k,i}^{(j)}(s-s_1)^i\right\},$$
$$v^{(j)}(s) = \mu^2\gamma^{(j)}(s)\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\left\{\sum_{i=0}^{\infty}v_{k,i}^{(j)}(s-s_1)^i\right\}, \tag{16}$$
$$w^{(j)}(s) = \gamma^{(j)}(s)\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\left\{\sum_{i=0}^{\infty}w_{k,i}^{(j)}(s-s_1)^i\right\}, \qquad j = 3,4.$$

Тут $u_{k,i}^{(j)}$, $v_{k,i}^{(j)}$, $w_{k,i}^{(j)}$ — невідомі коефіцієнти розкладів; j — індекс, що вказує на номер частинного розв’язку:

$$\gamma^{(j)}(s) = \begin{cases} \exp\beta(s)\cos\beta(s) & \text{при} \quad j = 3, \\ \exp\beta(s)\sin\beta(s) & \text{при} \quad j = 4. \end{cases}$$

Для оболонок, де інтеграл, що входить у вираз для $\beta(s)$, не вираховується в явному вигляді, розв’язки (16) необхідно подати у формі Вішика – Люстерника [3, 6]. Наприклад, функцію $w^{(j)}(s)$ можна подати у вигляді асимптотичного розкладу

$$w^{(j)}(s) = \exp\left[\varphi_j(s_1)\tau\right]\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k P_k^{(j)}(\tau), \qquad \tau = \frac{s-s_1}{\mu},$$

де $P_k^{(j)}(\tau)$ — многочлен зі сталими коефіцієнтами, які залежать від коефіцієнтів вихідних рівнянь і їхніх похідних у точці $s = s_1$.

Наявність множника $\gamma^{(j)}(s)$ в інтегралах (16) свідчить про те, що класичні методи для розв’язування задач із примежовим шаром не можуть однаково добре працювати в усій області зміни параметра μ. При малих показниках експонента обчислюється за допомогою ряду Тейлора, тоді як при великих показниках необхідно використовувати іншу апроксимацію (наприклад, Паде). При побудові інтегралів (16) вважалося, що оболонка має такі геометричні параметри, при яких можна знехтувати впливом функцій примежового шару на поведінку розв’язків в околі її полюса. При цьому маємо малу похибку порядку

$$\varepsilon = \exp\left\{-\frac{1}{\mu\sqrt{2}}\int\limits_0^{s_1}|b_0(x)|^{1/4}dx\right\}.$$

При осесиметричних коливаннях оболонки $(n = 0)$ рівняння (1) набирають вигляду

$$-\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s}\frac{d}{ds}(su)\right] - \frac{\nu}{s\tan\alpha}\frac{dw}{ds} + \frac{1}{s^2\tan\alpha}w - \lambda^2 u = 0,$$
$$\frac{\nu}{s\tan\alpha}\frac{du}{ds} + \frac{1}{s^2\tan\alpha}u + \frac{1}{s^2\tan^2\alpha}w + \mu^4\Delta\Delta w - \lambda^2 w = 0, \qquad \Delta = \frac{1}{s}\frac{d}{ds}\left(s\frac{d}{ds}\right). \tag{17}$$

Функції $u(s)$ і $w(s)$ запишемо у вигляді прямого розкладу [4] за параметром μ. Для визначення функцій $u_k(s)$, $w_k(s)$ підставимо ці розклади в рівняння (17) і прирівняємо коефіцієнти при різних степенях μ до нуля. При $\mu = 0$ отримаємо систему рівнянь відносно функцій $u_0(s)$,

$w_0(s)$. Після деяких перетворень її можна записати у вигляді

$$s\frac{d\vec{y}}{ds} = F(s,\lambda^2)\vec{y}, \qquad \vec{y} = \{y_1, y_2\}^T, \qquad y_1 = u_0(s), \qquad y_2 = w_0(s), \tag{18}$$

де елементи матриці F визначаються за формулами

$$f_{11} = -\frac{1}{\nu}, \qquad f_{12} = \frac{\lambda^2 s^2 \tan^2\alpha - 1}{\nu\tan\alpha}, \qquad f_{21} = \frac{(1-\nu^2+\lambda^2\nu^2 s^2)\tan\alpha}{g(s)},$$

$$f_{22} = \frac{1-\nu^2-\lambda^2(1-2\nu)s^2\tan\alpha}{g(s)}, \qquad g(s) = \nu(1-\nu^2-\lambda^2 s^2\tan^2\alpha).$$

У такому зображенні системи рівнянь відносно функцій $u_0(s)$, $w_0(s)$ всі функції $f_{pq}(s)$ є аналітичними функціями при $s\in[0,s_1]$ і водночас не дорівнюють нулю у точці $s=0$. З вигляду цієї системи рівнянь випливає, що точка $s=0$ є регулярною особливою точкою. Для побудови інтегралів цих рівнянь скористаємось узагальненим методом степеневих рядів.

Матрицю $F(s,\lambda^2)$ можна подати у вигляді розкладу за парними степенями незалежної змінної s:

$$F(s,\lambda^2) = \sum_{i=0}^{\infty} F_{2i}s^{2i}, \tag{19}$$

де матриці F_{2i}, $i=0,1,\ldots$, мають таку структуру:

$$F_0 = \begin{Vmatrix} f_{11}^{(0)} & f_{12}^{(0)} \\ f_{21}^{(0)} & f_{22}^{(0)} \end{Vmatrix}, \quad F_2 = \begin{Vmatrix} 0 & f_{12}^{(2)} \\ f_{21}^{(2)} & f_{22}^{(2)} \end{Vmatrix}, \quad F_{2i} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ f_{21}^{(2i)} & f_{22}^{(2i)} \end{Vmatrix}, \quad i = 2,4,\ldots.$$

Розв'язки системи (18) шукаємо у вигляді

$$y_i = s^\sigma \sum_{k=0}^{\infty} g_{i,k}s^k, \qquad i=1,2, \tag{20}$$

де σ і g_{ik} — невизначені сталі.

Підставляючи ряди (19), (20) у рівняння (18) (з використанням формули Коші для множення степеневих рядів) і прирівнюючи коефіцієнти при s^σ в обох частинах отриманої рівності, приходимо до однорідної алгебраїчної системи відносно перших коефіцієнтів розкладів (20):

$$(F_0 - \sigma E)\vec{g}_0 = 0, \tag{21}$$

де E — одинична матриця, $\vec{g}_0$ — вектор з елементами g_{i0}, $i=1,2$.

Прирівнювання коефіцієнтів при $s^{\sigma+k}$, $k=1,2,\ldots$, приводить до розв'язування послідовності неоднорідних систем вигляду (9) відносно вектора $\vec{g}_k = \{g_{1k}, g_{2k}\}$, $k=1,2,\ldots$.

З умови існування ненульового розв'язку системи (21) отримаємо характеристичне рівняння другого порядку відносно показника σ. Після перетворень можна показати, що корені цього рівняння набувають таких значень:

$$\sigma_1^{(1)} = 0, \qquad \sigma_2^{(2)} = 0.$$

Покладаючи в рівняннях (21) $\sigma = \sigma_1^{(1)} = 0$ і розв'язуючи послідовності неоднорідних алгебраїчних систем (9), можна переконатися, що перший розв'язок системи (18) набирає вигляду

$$y_1^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} g_{1,2k}^{(1)} s^{2k}, \qquad y_2^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} g_{2,2k}^{(1)} s^{2k}.$$

При цьому перші коефіцієнти цих розкладів задовольняють співвідношення

$$g_{1,0}^{(1)} = -\frac{1}{\tan\alpha} g_{2,0}^{(1)}. \tag{22}$$

Тут верхній індекс означає номер частинного розв'язку.

Розв'язок системи (18), що відповідає кореню характеристичного рівняння $\sigma_2^{(2)}$, містить логарифмічний множник і, таким чином, є необмеженим розв'язком при $s = 0$. Вищі наближення у прямих розкладах (2) для функцій $u(s)$, $w(s)$ не впливають на структуру розв'язку нульового наближення.

Слід зауважити, що співвідношення (22) відіграє важливу роль у забезпеченні обмеженості деформацій оболонки при $s \to 0$ і свідчить, що розв'язки для $u(s)$, $w(s)$ не є незалежними.

Для осесиметричних коливань структура інтегралів вихідних рівнянь, які локалізовані в околі границі оболонки, збігається зі структурою інтегралів для неосесиметричних коливань.

Отримані вище результати якісного характеру про поведінку обмежених інтегралів рівнянь коливань тонкої конічної оболонки обертання, яка замкнена у вершині, можна використовувати при побудові систем координатних функцій для розв'язування методом Релея – Рітца спектральної задачі про вільні коливання розглядуваної оболонки.

Література

1. А. Г. Асланян, В. Б. Лидский, *Распределение собственных частот тонких упругих оболочек*, Наука, Москва (1974).
2. В. Вазов, *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений*, Мир, Москва (1968).
3. М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, *Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром*, Успехи мат. наук, 1957, **12**, вып. 5(77), 3 – 122 (1957).
4. Г. И. Пшеничнов, *Малые свободные колебания упругих оболочек вращения*, Инж. журн., 1965, **5**, вып. 4, 685 – 690 (1965).
5. А. Л. Гольденвейзер, В. Б. Лидский, П. Е. Товстик, *Свободные колебания тонких упругих оболочек*, Наука, Москва (1979).
6. А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений*, Наука, Москва (1973).

Одержано 22.04.21