DOI: 10.37863/umzh.v74i9.6707

УДК 517.9

О. А. Бойчук (Ін-т математики НАН України, Київ),
С. М. Чуйко, В. О. Кузьміна (Донбас. держ. пед. ун-т, Слов'янськ, Донецька обл.)

НЕЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ З ВІДХИЛЕННЯМ АРГУМЕНТУ, НЕ РОЗВ'ЯЗАНІ ЩОДО ПОХІДНОЇ

The investigations of linear differential-algebraic boundary-value problems are closely connected with numerous applications of the corresponding mathematical models in the theory of nonlinear oscillations, mechanics, biology, radio-engineering, and the theory of stability of motion. Thus, the problem of generalization of the results obtained by S. Campbell, A. M. Samoilenko and O. A. Boichuk to the case of nonlinear boundary-value problems unsolved with respect to the derivative seems to be quite urgent. In particular, this is true for finding necessary and sufficient conditions for the existence of the required solutions of nonlinear integrodifferential boundary-value problems with deviating argument unsolved with respect to the derivative. We establish the conditions for existence and propose a constructive scheme for finding the solutions of a nonlinear integrodifferential boundary-value problem with deviating argument unsolved with respect to the derivative.

Дослідження лінійних диференціально-алгебраїчних рівнянь тісно пов'язане з численними застосуваннями відповідних математичних моделей у теорії нелінійних коливань, механіці, біології, радіотехніці та теорії стійкості руху. Таким чином, актуальною є проблема перенесення результатів, отриманих у статтях та монографіях S. Campbell, А. М. Самойленка та О. А. Бойчука, на нелінійні інтегрально-диференціальні крайові задачі, не розв'язані щодо похідної, зокрема знаходження необхідних і достатніх умов існування розв'язків нелінійних інтегро-диференціальних крайових задач із відхиленням аргументу, не розв'язаних щодо похідної з відхиленням аргументу. Знайдено конструктивні умови існування розв'язків нелінійної інтегро-диференціальної крайової задачі, не розв'язаної щодо похідної з відхиленням аргументу.

Дослідження диференціально-алгебраїчних рівнянь започатковано в роботах К. Веєрштрасса, М. М. Лузіна та Ф. Р. Гантмахера. Роботи S. Campbell, Ю. Є. Бояринцева, В. Ф. Чистякова, А. М. Самойленка, М. О. Перестюка, В. П. Яковця, О. А. Бойчука, A. Ilchmann та T. Reis присвячено систематичному дослідженню диференціально-алгебраїчних крайових задач. Водночас дослідження диференціально-алгебраїчних крайових задач тісно пов'язані з вивченням лінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, започаткованим у роботах А. Пуанкаре, О. М. Ляпунова, М. М. Крилова, М. М. Боголюбова, І. Г. Малкіна, А. Д. Мишкіса, Є. О. Гребенікова, Ю. О. Рябова, Ю. О. Митропольського, І. Т. Кігурадзе, А. М. Самойленка, М. О. Перестюка та О. А. Бойчука.

1. Постановка задачі. Будемо досліджувати задачу про побудову розв'язків [1]

$$y(t) \in \mathbb{C}[0,T], \quad y(t) \in \mathbb{D}^2[0;T], \quad y'(t) \in \mathbb{L}^2[\Delta;T]$$

нелінійної інтегрально-диференціальної системи з відхиленням аргументу, не розв'язаної щодо похідної

$$A(t)y'(t) = B(t)y(t) + C(t)y(h(t)) + \Phi(t)\int\limits_{\Delta}^{T} F(y(s), y(h(s)), y'(s), s)\, ds + f(t), \tag{1}$$

підпорядкованих крайовій умові

$$\ell y(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^{\upsilon}. \tag{2}$$

Розв'язок крайової задачі (1), (2) шукатимемо неперервним у точці $t = \Delta$ з початковою функцією [1 – 3]

$$y(t) = \varphi(t) \in \mathbb{C}^1[0, \Delta].$$

Відхилення аргументу визначає неперервна функція $h(t)\colon [\Delta, T] \to [0, \Delta]$. Тут

$$A(t), B(t), C(t) \in \mathbb{C}_{m\times n}[0, T], \quad \Phi(t) \in \mathbb{C}_{m\times q}[0, T], \quad f(t) \in \mathbb{C}[0, T]$$

— неперервні матриці; матрицю $A(t)$ припускаємо прямокутною: $m \neq n$, або ж квадратною, але виродженою. Крім того, припустимо, що ранг матриці $A(t)$ при похідній не змінюється на відрізку $[\Delta, T]$. Нелінійну вектор-функцію $F(y(t), y(h(t)), y'(t), t)$ будемо вважати двічі неперервно диференційовною за розв'язком $y(t)$ крайової задачі (1), (2) та його похідною $y'(t)$ у малому околі розв'язку

$$y_0(t) \in \mathbb{C}[0, T], \quad y_0(t) \in \mathbb{D}^2[0; T], \quad y_0'(t) \in \mathbb{L}^2[\Delta; T], \quad T := (q+1)\,\Delta, \quad q \in \mathbb{N},$$

породжуючої нетерової $(n \neq p)$ крайової задачі

$$A(t)y_0'(t) = B(t)y_0(t) + C(t)y(h(t)) + f(t), \quad \ell y_0(\cdot) = \alpha \tag{3}$$

та його похідної $y_0'(t)$, а також неперервною за третім аргументом на відрізку $[\Delta; T]$;

$$\ell y(\cdot)\colon \mathbb{C}[0; T] \to \mathbb{R}^{\upsilon}$$

— лінійний обмежений векторний функціонал, визначений на просторі $\mathbb{C}[0; T]$ n-вимірних неперервних на відрізку $[0, T]$ вектор-функцій [1].

Таким чином, сформульована задача узагальнює крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженим ядром [4, 5], а також крайові задачі для систем диференціально-алгебраїчних рівнянь [6 – 8].

2. Нелінійні інтегрально-диференціальні крайові задачі, не розв'язані щодо похідної з відхиленням аргументу. Розв'язок породжуючої системи (3) визначає рівняння

$$A(t)y_0'(t) = B(t)y_0(t) + g(t), \quad g(t) := C(t)\varphi(h(t)) + f(t). \tag{4}$$

Припустимо, що для породжуючої системи (4) виконуються умови теореми у статті [8, с. 15]. За цих умов у випадку виродження порядку p для довільної фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_p(t)$ диференціально-алгебраїчна система (4) має розв'язок вигляду

$$y_0(t, c_{\rho_{p-1}}) = X_p(t)c_{\rho_{p-1}} + K\big[g(s), \nu_p(s)\big](t), \quad t \in [\Delta; T], \quad c_{\rho_{p-1}} \in \mathbb{R}^{\rho_{p-1}}.$$

Тут $K[g(s), \nu_p(s)](t)$ — узагальнений оператор Гріна задачі Коші для породжуючої системи (4). Розв'язок породжуючої системи (4)

$$y_0(t) := K_\Delta\big[f(s), \varphi(s), \nu_p(s)\big](t), \quad t \in [\Delta; T],$$

неперервно та однозначно продовжує початкову функцію за умови

$$P_{X_p^*}(\Delta)\big\{\varphi(\Delta) - K\big[g(s), \nu_p(s)\big](\Delta)\big\} = 0. \tag{5}$$

Тут $P_{X_p^*}(\Delta)$ — матриця-ортопроектор,

$$K_\Delta\big[f(s),\varphi(s),\nu_p(s)\big](t) := X_p(t)X_p^+(\Delta)\big\{\varphi(\Delta)-$$

$$-K\big[g(s),\nu_p(s)\big](\Delta)\big\} + K\big[g(s),\nu_p(s)\big](t), \quad t\in[\Delta;T].$$

Як відомо, загальний вигляд

$$\ell y(\cdot) := \int\limits_0^T dW(t)\,y(t), \quad W(t)\in\mathbb{V}_{m\times n}[0,T],$$

лінійного функціонала

$$\ell y(\cdot) := \int\limits_0^T dW(t)\,y(t)\colon \mathbb{C}[0,T]\to\mathbb{R}^\upsilon$$

визначає $(\upsilon\times n)$-вимірна матриця $W(t)$, елементи якої — функції обмеженої на відрізку $[0,T]$ варіації. Тут інтеграл — це інтеграл Рімана – Стілтьєса [1]. Отже, лінійний обмежений векторний функціонал $\ell y(\cdot)$ зображується у вигляді

$$\ell y(\cdot) = \ell_0 y(\cdot) + \ell_1 y(\cdot)\colon \mathbb{C}[0;T]\to\mathbb{R}^\upsilon,$$

де

$$\ell_0 y(\cdot) := \int\limits_0^\Delta dW(t)\,y(t)\colon \mathbb{C}[0;\Delta]\to\mathbb{R}^\upsilon, \quad \ell_1 y(\cdot) := \int\limits_\Delta^T dW(t)\,y(t)\colon \mathbb{C}[\Delta;T]\to\mathbb{R}^\upsilon$$

— лінійні обмежені векторні функціонали.

Припустимо, що для породжуючої крайової задачі (4) з прямокутною, або ж квадратною, але виродженою матрицею $A(t)$ сталого рангу, виконуються вимоги теореми у статті [8, с. 15]. Породжуюча крайова задача (3) розв'язна тоді й лише тоді, коли

$$\ell_0\,\varphi(\cdot) + \ell_1 K_\Delta\big[f(s),\varphi(s),\nu_p(s)\big](\cdot) = \alpha.$$

При цьому породжуюча крайова задача (3) має єдиний розв'язок

$$y_0(t) = G[f(s),\varphi(s);\alpha](t), \quad t\in[\Delta;T],$$

який неперервно та однозначно продовжує початкову функцію і зображується за допомогою узагальненого оператора Гріна [8]

$$G[f(s),\varphi(s);\alpha](t) := K_\Delta\big[f(s),\varphi(s),\nu_p(s)\big](t), \quad t\in[\Delta;T].$$

Таким чином, доведено таке твердження.

Лема. *У випадку виродження порядку p для довільної фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_p(t)$ диференціально-алгебраїчна система* (3) *розв'язна тоді й лише тоді, коли*

$$\ell_0\,\varphi(\cdot) + \ell_1 K_\Delta\big[f(s),\varphi(s),\nu_p(s)\big](\cdot) = \alpha. \tag{6}$$

У випадку (5), (6) *породжуюча крайова задача* (3) *має єдиний розв'язок*

$$y_0(t) = G[f(s),\varphi(s);\alpha](t), \quad t\in[\Delta;T],$$

який неперервно та однозначно продовжує початкову функцію.

Для фіксованої неперервної функції $\nu_p(t)$ розв'язок нелінійної крайової задачі (1), (2) шукаємо у вигляді

$$y(t) = y_0(t) + x(t).$$

Тут P_{Q^*} — матриця-ортопроектор:

$$\mathbb{R}^{\upsilon} \to \mathbb{N}(Q^*), \quad Q := \ell_1 X_p(\cdot) \in \mathbb{R}^{\upsilon \times \rho_{p-1}}.$$

Для знаходження відхилення

$$x(t) \in \mathbb{C}[0, T], \quad x(t) \in \mathbb{D}^2[0; T], \quad x'(t) \in \mathbb{L}^2[\Delta; T],$$

від породжуючого розв'язку $y_0(t)$ отримуємо крайову задачу

$$A(t)x'(t) = B(t)x(t) + \Phi(t) \int\limits_{\Delta}^{T} F(y(s), y(h(s)), y'(s), s)\, ds, \quad \ell y(\cdot) = 0. \tag{7}$$

Відхилення

$$x(t, u, v) = X_p(t)u + \Psi(t)v$$

від породжуючого розв'язку $y_0(t)$ визначають невідомі сталі

$$v := \int\limits_{\Delta}^{T} F(y(s), y(h(s)), y'(s), s)\, ds \in \mathbb{R}^q, \quad u \in \mathbb{R}^n,$$

і матриця

$$\Psi(t) := K_{\Delta}\big[f(s), \varphi(s), \nu_p(s)\big](t) \in \mathbb{D}^2_{n\times q}[\Delta; T].$$

Шуканий розв'язок $y(t)$ виродженої інтегрально-диференціальної системи (1) задовольняє крайову умову (2) у випадку

$$Q\, v + R\, u = 0, \quad R := \ell\, \Psi(\cdot) \in \mathbb{R}^{\upsilon\times q}. \tag{8}$$

Позначимо через $P_0 \in \mathbb{R}^{\rho_{p-1}\times\omega_0}$ матрицю, утворену з ω_0 лінійно незалежних стовпців ортопроектора P_Q, а через $P_1 \in \mathbb{R}^{q\times\omega_1}$ матрицю, утворену з ω_1 лінійно незалежних стовпців ортопроектора P_R:

$$P_R \colon \mathbb{R}^q \to \mathbb{N}(R).$$

Умову (2) задовольняють вектори

$$u(c_0) = P_0\, c_0, \quad v(c_1) = P_1\, c_1, \quad c_0 \in \mathbb{R}^{\omega_0}, \quad c_1 \in \mathbb{R}^{\omega_1}.$$

Для знаходження вектора

$$\check{c} := \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\omega_0+\omega_1},$$

необхідного для визначення невідомих $u(c_0)$ і $v(c_1)$, отримуємо рівняння

$$\psi(\check{c}) = 0, \tag{9}$$

де

$$\psi(\check{c}) := v(c_1) - \int\limits_{\Delta}^{T} F\big(y(s,\check{c}), y(h(s),\check{c}), y'(s,\check{c}), s\big)\, dt$$

— нелінійна вектор-функція:

$$\psi(\check{c}) \colon \mathbb{R}^{\omega_0+\omega_1} \to \mathbb{R}^{\rho_{p-1}}.$$

Якщо для рівняння (9) справджуються умови [9, 10], знаходимо невідомі $u(c_0)$ і $v(c_1)$.

Таким чином, доведено таку теорему.

Теорема. *Припустимо, що для породжуючої крайової задачі* (4) *виконуються умови наведеної вище леми. За цих умов для довільної фіксованої неперервної вектор-функції* $\nu_p(t)$ *породжуюча крайова задача* (3) *має єдиний розв'язок*

$$y_0(t) = G[f(s), \varphi(s); \alpha](t), \quad t \in [\Delta; T],$$

який неперервно та однозначно продовжує початкову функцію. Шуканий розв'язок

$$y(t) = y_0(t) + x(t), \quad x(t) = X(t)v + \Psi(t)u, \quad u(c_0) = P_0\, c_0, \quad v(c_1) = P_1\, c_1$$

нелінійної інтегрально-диференціальної крайової задачі (1), (2), *не розв'язаної щодо похідної, визначає вектор* $\check{c}$, *який задовольняє нелінійне рівняння* (9). *Припустимо, що для рівняння* (9) *виконуються такі умови:*

1) *нелінійна вектор-функція* $\psi(\check{c})$, *двічі неперервно диференційовна по* $\check{c}$ *в області* $\Omega \subseteq \subseteq \mathbb{R}^{\omega_0+\omega_1}$, *в околі точки* $\check{c}_0$ *має корінь* $\check{c}$;

2) *в околі нульового наближення* $\check{c}_0 \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^{\omega_0+\omega_1}$ *виконуються нерівності*

$$\big\| J_k^+ \big\| \le \sigma_1(k), \quad \big\| d^2\psi(\xi_k\,; \check{c} - \check{c}_k) \big\| \le \sigma_2(k)\, \| \check{c} - \check{c}_k \|;$$

3) *існує стала*

$$\theta := \sup_{k\in\mathbb{N}} \left\{ \frac{\sigma_1(k)\sigma_2(k)}{2} \right\}.$$

Тоді за умови

$$P_{J_k^*} = 0, \quad J_k := \psi'(\check{c}_k) \in \mathbb{R}^{\rho_{p-1}\times(\omega_0+\omega_1)},$$

для знаходження вектора $\check{c}$ *застосовна ітераційна схема*

$$\check{c}_{k+1} = \check{c}_k - J_k^+\, \varphi(\check{c}_k), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

до того ж швидкість збіжності послідовності наближень до розв'язку рівняння (9) *квадратична. За умови* $x(\Delta) = 0$ *знайдений розв'язок нелінійної інтегрально-диференціальної крайової задачі* (1), (2), *не розв'язаної щодо похідної, неперервно та однозначно продовжує початкову функцію.*

Доведена теорема узагальнює результати [4] на випадок диференціально-алгебраїчної головної частини системи інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженим ядром, а також результати [5] на випадок виродженої нелінійної інтегрально-диференціальної крайової задачі, не розв'язаної щодо похідної. Крім того, доведена теорема узагальнює результати [11, 12] на випадок нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі.

***Приклад* 1.** Умови доведеної теореми справджуються у випадку періодичної крайової задачі для рівняння

$$A(t)y'(t) = B(t)y(t) + C(t)y(h(t)) + \Phi(t)\int\limits_{\pi}^{2\pi} F(y(s), y(h(s)), y'(s), s)\, ds + f(t), \qquad (11)$$

де, зокрема,

$$A(t) := \begin{pmatrix} \cos t & 0 & \sin t \\ -\sin t & 0 & \cos t \\ \cos t & \cos t & \sin t \\ -\sin t & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t & -\sin t \\ -\cos t & -\sin t & -\cos t \\ -\sin t & \cos t & -\sin t \\ -\cos t & -\sin t & -\cos t \end{pmatrix},$$

$$C(t) := \begin{pmatrix} 0 & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & -\cos t \\ 0 & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & -\cos t \end{pmatrix}, \quad f(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \sin t \cos t \\ 0 \\ 1 - \sin t \cos t \end{pmatrix}.$$

Крім того,

$$\Phi(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M(t) := \begin{pmatrix} 0 & 2\sin t & 0 \\ 3\cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sin t \end{pmatrix}.$$

Відхилення аргументу визначає неперервна функція

$$h(t) := t - \pi : \, [\pi, 2\pi] \to [0, \pi], \quad F\big(y(t), y'(t), t\big) := M(t)\, y(t)\, (y'(t))^*\, y(t).$$

Розв'язок періодичної крайової задачі для рівняння (11) шукатимемо неперервним у точці $t = \pi$ з початковою функцією

$$y(t) = \varphi(t) := \begin{pmatrix} \cos t & 0 & 0 \end{pmatrix}^* \in \mathbb{C}^1[0, \pi].$$

Оскільки

$$P_{A^*(t)} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 - \cos 2t & \sin 2t & \cos 2t - 1 & -\sin 2t \\ \sin 2t & 1 + \cos 2t & -\sin 2t & -1 - \cos 2t \\ \cos 2t - 1 & -\sin 2t & 1 - \cos 2t & \sin 2t \\ -\sin 2t & -1 - \cos 2t & \sin 2t & 1 + \cos 2t \end{pmatrix} \neq 0,$$

породжуюча система для рівняння (11) вироджена, а матриця $A(t)$ має сталий ранг. Для породжуючої системи для рівняння (11) виконуються умови теореми у статті [8, с. 15], до того ж має місце виродження першого порядку: $p = 1$. Породжуюча система (4) для рівняння (11) має розв'язок

$$y(t,c_3)=X_1(t)\,c_3+K\big[g(s)\big](t),\quad t\in[\pi;2\pi],\quad c_3\in\mathbb{R}^3,$$

який не залежить від вектор-функції $\nu_1(t)$. Тут

$$X_1(t)=\begin{pmatrix}1 & 0 & t\\ 0 & 0 & 1\\ e^{-t}-1 & e^{-t} & 1-e^{-t}-t\end{pmatrix},$$

а також

$$K\big[g(s)\big](t)=\begin{pmatrix}\cos t-1\\ 0\\ 1-e^{-t}\end{pmatrix}$$

— узагальнений оператор Гріна задачі Коші для породжуючої диференціально-алгебраїчної системи у випадку рівняння (11). Умови (5) і (6) при цьому виконано, тому породжуюча крайова задача для рівняння (11) має єдиний розв'язок

$$y_0(t)=G[f(s),\varphi(s);\alpha](t)=\begin{pmatrix}\cos t\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\quad t\in[\pi;2\pi],$$

який неперервно та однозначно продовжує початкову функцію. Оскільки

$$Q=\begin{pmatrix}0 & 0 & -2\pi\\ 0 & 0 & 0\\ 1-e^{-2\pi} & 1-e^{-2\pi} & e^{-2\pi}-1+2\pi\end{pmatrix},\quad R=(e^{-2\pi}-1)\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

отримуємо матриці

$$P_0=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix},\quad P_1=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}.$$

Періодичний розв'язок рівняння (11)

$$y(t)=y_0(t,c_r)+x(t),\quad x(t)=X(t)v+\Psi(t)u,\quad u(c_0)=P_0\,c_0,\quad v(c_1)=P_1\,c_1,$$

не розв'язаного щодо похідної, визначає вектор $\check{c}$, який задовольняє нелінійне рівняння

$$\psi(\check{c}):=\begin{pmatrix}2\,c_2-c_3\\ -4\,c_1-c_2+2\,c3\\ -c_2-c_3-\pi\,c_1^2\end{pmatrix}=0.$$

Для отриманого рівняння справджуються умови [9, 10], тому для знаходження сталої $\check{c}$ застосовна ітераційна схема (10). Справді, за умови

$$\check{c}_0:=-\big(1,27\quad 1,7\quad 3,4\big)^*,\quad \|\varphi(\check{c}_0)\|_\infty\approx 0,02,$$

на першому кроці отримуємо $P_{J_0^*} = 0$, при цьому

$$\check{c}_1 \approx \begin{pmatrix} -1,27\,325 \\ -1,69\,766 \\ -3,39\,533 \end{pmatrix}, \quad \|\psi(\check{c}_1)\|_\infty \approx 0,0000\,331\,388.$$

На другому кроці одержуємо $P_{J_1^*} = 0$, при цьому

$$\check{c}_2 \approx \begin{pmatrix} -1,273\,239\,544\,789\,068 \\ -1,697\,652\,726\,385\,424 \\ -3,395\,305\,452\,770\,848 \end{pmatrix}, \quad \|\psi(\check{c}_2)\|_\infty \approx 2,15\,622 \times 10^{-10}.$$

На третьому кроці знаходимо $P_{J_2^*} = 0$, при цьому

$$\check{c}_3 \approx \begin{pmatrix} -1,273\,239\,544\,735\,162 \\ -1,697\,652\,726\,313\,550 \\ -3,395\,305\,452\,627\,100 \end{pmatrix}, \quad \|\psi(\check{c}_3)\|_\infty \approx 8,88\,178 \times 10^{-16}.$$

Оскільки умову $x(\Delta) = 0$ не виконано, періодичний розв'язок рівняння (11) однозначно продовжує початкову функцію з розривом у точці π. Водночас для рівняння (9) у випадку рівняння (11) існує тривіальний розв'язок $\check{c} = 0$, для якого умову (12) виконано. При цьому періодична крайова задача для рівняння (11) має єдиний розв'язок

$$y(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [\pi; 2\pi],$$

який неперервно продовжує початкову функцію.

3. Лінійні інтегрально-диференціальні крайові задачі, не розв'язані щодо похідної з відхиленням аргументу. Далі будемо вважати вектор-функцію $F(y(t), y(h(t)), y'(t), t)$ лінійною за розв'язком $y(t), y(h(t))$ крайової задачі (1), (2) та його похідною $y'(t)$. Тому має місце розклад

$$F(y_0(t) + x(t), y(h(t)) + x(h(t)), y_0'(t) + x'(t), t) = F(y_0(t), y_0(h(t)), y_0'(t), t) +$$
$$+ \mathcal{A}_1(t)x(t) + \mathcal{A}_2(t)x(h(t)) + \mathcal{A}_3(t)x'(t),$$

де

$$\mathcal{A}_1(t) := \left. \frac{\partial F(y_0(t) + x(t), y(h(t)) + x(h(t)), y_0'(t) + x'(t), t)}{\partial x(t)} \right|_{\substack{y(t) \,=\, y_0(t) \\ y(h(t)) \,=\, y_0(h(t)) \\ y'(t) \,=\, y_0'(t)}},$$

$$\mathcal{A}_2(t) := \frac{\partial F(y_0(t) + x(t), y(h(t)) + x(h(t)), y_0'(t) + x'(t), t)}{\partial x(h(t))}\Bigg|_{\begin{array}{rcl} y(t) & = & y_0(t) \\ y(h(t)) & = & y_0(h(t)) \\ y'(t) & = & y_0'(t) \end{array}},$$

$$\mathcal{A}_3(t) := \frac{\partial F(y_0(t) + x(t), y(h(t)) + x(h(t)), y_0'(t) + x'(t), t)}{\partial x'(t)}\Bigg|_{\begin{array}{rcl} y(t) & = & y_0(t) \\ y(h(t)) & = & y_0(h(t)) \\ y'(t) & = & y_0'(t) \end{array}}$$

— неперервні $(q \times n)$-вимірні матриці. Нехай $(q \times (\omega_0 + \omega_1))$-вимірна матриця

$$\mathcal{Q} := -\Bigg\{ \int\limits_{\Delta}^{T} \big[\mathcal{A}_1(t) X_p(t) + \mathcal{A}_2(t) X_p(h(t)) + \mathcal{A}_3(t) X_p'(t)\big] P_0 \, dt;$$

$$\int\limits_{\Delta}^{T} \big[\mathcal{A}_1(t)\Psi(t) + \mathcal{A}_2(t)\Psi(h(t)) + \mathcal{A}_3(t)\Psi'(t)\big] P_1 \, dt - P_1 \Bigg\}$$

і вектор

$$b := \int\limits_{\Delta}^{T} F\big(y_0(t), y_0(h(t)), y_0'(t), t\big)\, dt \in \mathbb{R}^q.$$

Для знаходження вектора $\check{c}$ для фіксованої функції $\nu_p(t) \in \mathbb{L}^2[a; b]$ отримуємо рівняння

$$\mathcal{Q}\, \check{c} = b,$$

у випадку $P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$ розв'язне за умови

$$P_{\mathcal{Q}^*}\, b = 0 \tag{12}$$

у вигляді

$$\check{c} = \mathcal{Q}^+ b + P_{\mathcal{Q}_\rho}\, c_\rho, \quad c_\rho \in \mathbb{R}^\rho.$$

Тут $P_{\mathcal{Q}} : \mathbb{R}^{(\omega_0+\omega_1)} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q})$ — ортопроектор матриці $\mathcal{Q}$; матриця $P_{\mathcal{Q}_\rho} \in \mathbb{R}^{n\times\rho}$ утворена з ρ лінійно незалежних стовпців матриці-ортопроектора $P_{\mathcal{Q}}$. Позначимо матриці

$$\mathcal{P}_0 := \begin{pmatrix} I_{\omega_0} & O \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\omega_0\times(\omega_0+\omega_1)}, \quad \mathcal{P}_1 := \begin{pmatrix} O & I_{\omega_1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\omega_1\times(\omega_0+\omega_1)}.$$

Таким чином, побудовано розв'язок

$$y(t) \in \mathbb{D}^2[\Delta; T], \quad y'(t) \in \mathbb{L}^2[\Delta; T],$$

крайової задачі (1), (2)

$$y(t, c_\rho) = y_0(t) + W(t)c_\rho + V(t), \quad t \in [\Delta; T], \quad c_\rho \in \mathbb{R}^\rho,$$

де

$$W(t) := U(t)P_{\mathcal{Q}_\rho}, \quad V(t) := U(t)\mathcal{Q}^+ b, \quad U(t) := X_p(t)P_0\,\mathcal{P}_0 + \Psi(t)P_1\,\mathcal{P}_1.$$

Знайдений розв'язок крайової задачі (1), (2) неперервно продовжує початкову функцію за умови

$$P_{W^*(\Delta)}V(\Delta) = 0, \tag{13}$$

де $P_{W^*(\Delta)}$ — матриця-ортопроектор:

$$P_{W^*(\Delta)} : \mathbb{R}^\rho \to \mathbb{N}(W^*(\Delta)).$$

Таким чином, побудовано шуканий розв'язок крайової задачі (1), (2), який неперервно продовжує початкову функцію

$$y(t, c_r) = W(t)P_{W(\Delta)_r}c_r - W(t)W^+(\Delta)V(\Delta) + V(t), \quad t \in [\Delta; T], \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Тут $P_{W(\Delta)}$ — матриця-ортопроектор:

$$P_{W(\Delta)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(W(\Delta)).$$

Матрицю $P_{W(\Delta)_r} \in \mathbb{R}^{n\times r}$ утворено з r лінійно незалежних стовпців матриці-ортопроектора $P_{W(\Delta)}$. Позначимо матрицю

$$W_r(t) := W(t)P_{W(\Delta)_r}.$$

Таким чином, доведено таке твердження.

Наслідок. *Припустимо, що для породжуючої крайової задачі* (4) *виконуються умови наведеної вище леми. За цих умов для довільної фіксованої неперервної вектор-функції* $\nu_p(t)$ *породжуюча крайова задача* (3) *має єдиний розв'язок*

$$y_0(t) = G[f(s), \varphi(s); \alpha](t), \quad t \in [\Delta; T],$$

який неперервно та однозначно продовжує початкову функцію. При цьому за умов (12), (13) *для довільної фіксованої неперервної вектор-функції* $\nu_p(t)$ *крайова задача* (1), (2) *має розв'язок*

$$y(t, c_r) = W_r(t)c_r + G[\Phi(s), \varphi(s); \alpha](t), \quad t \in [\Delta; T], \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

який неперервно продовжує початкову функцію і зображується за допомогою узагальненого оператора Гріна крайової задачі (1), (2)

$$G[\Phi(s), \varphi(s); \alpha](t) := V(t) - W(t)W^+(\Delta)V(\Delta), \quad t \in [\Delta; T].$$

Доведений наслідок узагальнює результати [4] на випадок диференціально-алгебраїчної головної частини системи інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженим ядром, а також результати [5] на випадок виродженої нелінійної інтегрально-диференціальної крайової задачі, не розв'язаної щодо похідної. Крім того, доведена теорема узагальнює результати [11, 12] на випадок диференціально-алгебраїчної крайової задачі, яка містить інтегральну неоднорідність.

***Приклад* 2.** Умови доведеного наслідку справджуються у випадку періодичної крайової задачі для рівняння

$$A(t)y'(t) = B(t)y(t) + C(t)y(h(t)) + \Phi(t)\int\limits_{\pi}^{2\pi} F\big(y(s), y(h(s)), y'(s), s\big)\, ds + f(t), \tag{14}$$

де матриці $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $\Phi(t)$, функція $h(t)$, початкова функція $\varphi(t)$ та неоднорідність $f(t)$ наведено у прикладі 1, а лінійна функція

$$F\big(y(t), y'(t), t\big) := g(t) + M_0(t)\, y(t) + M_1(t)\, y'(t)$$

зображується таким чином:

$$g(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad M_0(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_1(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $P_{A^*(t)} \neq 0$, породжуюча система для рівняння (14) вироджена, матриця $A(t)$ має сталій ранг. Для породжуючої системи для рівняння (14) виконуються умови теореми у статті [8, с. 15], до того ж має місце виродження першого порядку: $p = 1$. Породжуюча система (4) для рівняння (14) має розв'язок

$$y(t, c_3) = X_1(t)\, c_3 + K\big[g(s)\big](t), \quad t \in [\pi; 2\pi], \quad c_3 \in \mathbb{R}^3,$$

який не залежить від вектор-функції $\nu_1(t)$. Матриця $X_1(t)$, а також узагальнений оператор Гріна задачі Коші для породжуючої диференціально-алгебраїчної системи у випадку рівняння (11) наведено у прикладі 1. Умови (5) і (6) при цьому виконано, тому породжуюча крайова задача для рівняння (11) має єдиний розв'язок

$$y_0(t) = G[f(s), \varphi(s); \alpha](t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [\pi; 2\pi],$$

який неперервно та однозначно продовжує початкову функцію. Періодичний розв'язок рівняння (11)

$$y(t) = y_0(t, c_r) + x(t), \quad x(t) = X(t)v + \Psi(t)u, \quad u(c_0) = P_0\, c_0, \quad v(c_1) = P_1\, c_1,$$

не розв'язаного щодо похідної, визначає вектор $\check{c}$, який задовольняє лінійне рівняння $\mathcal{Q}\, c = 0$. Тут

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} \pi & 2 & -1 \\ -\pi & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матриці P_0, P_1 наведено у прикладі 1. Внаслідок однорідності останнє рівняння розв'язне у вигляді

$$\check{c} = P_{\mathcal{Q}_\rho}\, c_\rho, \quad c_\rho \in \mathbb{R}^1,$$

де

$$P_{\mathcal{Q}_\rho} = \pi \begin{pmatrix} 3 \\ -\pi \\ \pi \end{pmatrix}$$

— матриця, утворена з $\rho = 1$ лінійно незалежних стовпців ортопроектора P_Q. Оскільки умову (12) виконано, періодична крайова задача для рівняння (14) має єдиний розв'язок

$$y(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [\pi; 2\pi],$$

який неперервно продовжує початкову функцію

Зазначимо, що у випадку нерозв'язності нелінійної інтегрально-диференціальної крайової задачі (1), (2) її можна регуляризувати аналогічно [13, 14]. Крім того, запропоновану у статті схему дослідження нелінійної інтегрально-диференціальної крайової задачі (1), (2) можна поширити на інтегрально-диференціальні крайові задачі з запізненням більш загального вигляду [1, 2, 15, 16], а також використати при дослідженні нелінійної інтегрально-диференціальної крайової задачі (1), (2) з матрицею при похідній змінного рангу [17].

Література

1. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems, 2th ed.*, De Gruyter, Berlin, Boston (2016).
2. Н. В. Азбелев, Н. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина, *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений*, Наука, Москва (1991).
3. С. М. Чуйко, *О разрешимости линейной матричной краевой задачи*, Известия вузов. Математика, № 4, 86 – 97 (2018).
4. А. М. Самойленко, О. А. Бойчук, С. А. Кривошея, *Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженим ядром*, Укр. мат. журн., **48**, № 11, 1576 – 1579 (1996).
5. С. М. Чуйко, О. В. Чуйко, В. О. Кузьміна, *Невироджені лінійні інтегрально-диференціальні крайові задачі, не розв'язані відносно похідної*, Буков. мат. журн., **8**, № 2, 127 – 138 (2020).
6. S. L. Campbell, *Singular systems of differential equations*, Pitman Adv. Publ. Program, San Francisco etc. (1980).
7. В. Ф. Чистяков, *Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром*, Наука, Новосибирск (1996).
8. С. М. Чуйко, *К вопросу об обобщении матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи*, Укр. мат. вісн., **14**, № 1, 16 – 32 (2017).
9. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, Москва (1977).
10. С. М. Чуйко, *Про узагальнення теореми Ньютона – Канторовича у банаховому просторі*, Доп. НАН України, № 6, 22 – 31 (2018).
11. A. A. Boichuk, A. A. Pokutnyi, V. F. Chistyakov, *Application of perturbation theory to the solvability analysis of differential algebraic equations*, Comput. Math. and Math. Phys., **53**, № 6, 777 – 788 (2013).
12. С. М. Чуйко, *О разрешимости дифференциально-алгебраической краевой задачи*, Мат. труды, **23**, № 1, 187 – 206 (2020).
13. А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, Москва (1986).
14. С. М. Чуйко, *О регуляризации матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи*, Укр. мат. вісн., **13**, № 1, 76 – 90 (2016).
15. Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, *Уравнения с запаздывающим аргументом*, Дифференц. уравнения, **18**, № 12, 2027 – 2050 (1982).
16. С. М. Чуйко, *О решении линейной нетеровой краевой задачи для дифференциально-алгебраической системы с сосредоточенным запаздыванием методом наименьших квадратов*, Укр. мат. вестн., **16**, № 4, 503 – 513 (2019).
17. С. М. Чуйко, *Диференціально-алгебраїчні крайові задачі у випадку матриці при похідній змінного рангу*, Укр. мат. вісн., **18**, № 3, 303 – 318 (2021).

Одержано 25.04.21