

## ДВОВИМІРНІ НЕІЗОТРОПНІ ПОВЕРХНІ З ПЛОСКОЮ НОРМАЛЬНОЮ ЗВ'ЯЗНІСТЮ І НЕВИРОДЖЕНИМ ГРАССМАНОВИМ ОБРАЗОМ СТАЛОЇ КРИВИНИ У ПРОСТОРІ МІНКОВСЬКОГО

We find possible values of curvature of the Grassmann manifold along the planes tangential to the Grassmann image of a two-dimensional nonisotropic surface with flat normal connection in the four-dimensional Minkowski space. It is shown that if the surface with flat normal connection is time-like, then the analyzed curvature may take values from the set  $[0, 1]$ . However, if the surface with flat normal connection is space-like, then this curvature may take values from  $(-\infty, -1]$  in the case of a space-like Grassmann image or the values from  $[0, \infty)$  in the case of a time-like Grassmann image. The existence of two-dimensional nonisotropic surfaces with flat normal connection and constant curvature of their Grassmann image is proved for all values of curvature from the obtained sets.

Знайдено значення, яких може набувати кривина грассманового многовиду вздовж площин, дотичних до грассманового образу двовимірної неізотропної поверхні з плоскою нормальною зв'язністю у чотиривимірному просторі Мінковського. Показано, що у випадку часоподібної поверхні з плоскою нормальною зв'язністю кривина набуває значень з множини  $[0, 1]$ . Якщо ж поверхня з плоскою нормальною зв'язністю є просторовоподібною, то значення цієї кривини належать множині  $(-\infty, -1]$  у випадку просторовоподібного грассманового образу і є невід'ємними у випадку часоподібного грассманового образу. Доведено існування двовимірних неізотропних поверхонь з плоскою нормальною зв'язністю та сталою кривиною їх грассманового образу для всіх значень кривини зі знайдених множин.

**1. Вступ.** Диференціальну геометрію грассманових многовидів та їх підмноговидів викладено, наприклад, у монографіях Ю. А. Амінова [1] і О. А. Борисенка [3]. Важливою геометричною характеристикою підмноговидів в евклідових та неевклідових просторах є їх грассмановий образ, який є узагальненням гауссового сферичного образу поверхні. Використання поняття грассманового образу поверхні розширює коло задач і є одним із методів вивчення диференціальної геометрії поверхні. Дослідження поверхонь евклідового простору та їх грассманових образів сприяли розв'язанню різноманітних задач:

визначенню обмежень на значення кривини грассманового многовиду вздовж площин, дотичних до грассманового образу поверхні (кривини грассманового образу поверхні);

виділенню класів поверхонь, які визначають ті чи інші значення кривини грассманового образу;

доведенню можливості ізометричного занурення поверхні із заданими властивостями її грассманового образу у багатовимірні простори або, інакше, доведенню існування поверхні із заданими властивостями її грассманового образу

та інших.

Аналогічні задачі ставились і розв'язувались для поверхонь у неевклідових просторах. Для першої з цих задач відомі такі результати.

Ю. Вонг у [12] встановив, що секційна кривина  $\bar{K}(\sigma)$  грассманового многовиду  $G(2, 4)$  евклідового простору  $R_4$  набуває значень з відрізка  $[0, 2]$ . В роботі [8] зазначено, а в робо-

<sup>1</sup> Відповідальна за листування, e-mail: grechnevamarina@gmail.com.

ті [9] доведено, що кривина грасманового образу неізотропної поверхні псевдоевклідового простору може набувати будь-яких дійсних значень. Роботу [5] присвячено знаходженню екстремальних значень кривини грасманового образу та поверхонь, які відповідають цим значенням.

Розв'язанню другої задачі присвячено роботи [4, 11], в яких досліджувались поверхні евклідового простору, для яких кривина грасманового образу набуває відповідно максимального та мінімального значень. Максимальне значення відповідає класу мінімальних поверхонь, еліпс нормальної кривини яких є колом. Мінімальне значення виділяє клас поверхонь з плоскою нормальною зв'язністю і плоскою індукованою метрикою. Роботи [6, 10] також присвячено дослідженню властивостей поверхонь з плоскою нормальною зв'язністю.

Питання занурення підмноговидів у різні ріманові та псевдоріманові простори розглядалось різними видатними геометрами. Згадаємо тут лише роботу [2] про занурення евклідової площини у чотиривимірний евклідів простір. Автор роботи пропонує два підходи до розв'язання цієї задачі. При одному з цих підходів задача занурення поверхні розв'язується за допомогою її грасманового образу й еквівалентна задачі відновлення поверхні за її грасмановим образом. Результати розв'язання аналогічних задач для поверхонь простору Мінковського залежать від типу їх грасманового образу.

Цю статтю присвячено розв'язанню другої та третьої з вказаних задач, а саме висвітленню таких питань: яких значень може набувати кривина грасманового образу двовимірної поверхні з плоскою нормальною зв'язністю у чотиривимірному просторі Мінковського в залежності від типу поверхні та типу її грасманового образу; для яких значень  $k$  існують поверхні з плоскою нормальною зв'язністю і грасмановим образом сталої кривини  $k$ .

**2. Основні поняття та конструкції.** *Многовидом Грасмана*  $G(l, l + p)$  (грасмановим многовидом) називається множина  $l$ -площин  $(l + p)$ -вимірному евклідовому простору  $R_{l+p}$ , що проходять через початок координат.

У просторі Мінковського  ${}^1R_4$  (з метрикою  $ds^2 = -dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$ ) множину двовимірних площин, що проходять через фіксовану точку  $O$ , за аналогією з евклідовим простором, називають грасмановим многовидом. Будемо його позначати  $PG(2, 4)$ . У просторі  ${}^1R_4$  кожна із цих площин є площиною певного типу: просторовоподібною (ортонормований базис напрямних векторів складається з двох просторовоподібних векторів), часоподібною (ортонормований базис напрямних векторів складається з часоподібного та просторовоподібного векторів) або ізотропною (ортонормований базис напрямних векторів складається з ізотропного та просторовоподібного векторів), а многовид  $PG(2, 4)$  є диз'юнктивним об'єднанням трьох підмноговидів:  ${}^S PG(2, 4)$ ,  ${}^T PG(2, 4)$  та  ${}^{Is} PG(2, 4)$ .

При стандартному плюнкеровому вкладенні [1] грасманового многовиду  $PG(2, 4)$  метрика простору  ${}^1R_4$  породжує в просторі бівекторів метрику простору  ${}^3R_6$  — шестивимірному псевдоевклідовому простору індексу 3. Раніше було показано, що підмноговиди просторовоподібних  ${}^S PG(2, 4)$  та часоподібних  ${}^T PG(2, 4)$  площин грасманового многовиду  $PG(2, 4)$  є псевдорімановими чотиривимірними многовидами цього простору, а дотичний простір до кожного з цих многовидів має метрику сигнатури  $(- - ++)$  [9].

Нехай  $V^2$  — двовимірна поверхня класу  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , у просторі  ${}^1R_4$ . Поверхня простору  ${}^1R_4$  називається *просторовоподібною* (часоподібною, ізотропною), якщо дотична до неї площина в кожній точці є просторовоподібною (часоподібною, ізотропною). Будемо розглядати такі

двовимірні поверхні простору  ${}^1R_4$  або такі області на цих поверхнях, у яких тип дотичної площини в кожній точці один і той самий.

Поставимо у відповідність кожній точці поверхні  $V^2$  площину, яка проходить через фіксовану точку  $O$  простору  ${}^1R_4$  і паралельна нормальній площині в цій точці. Цим встановлюється відображення поверхні  $V^2$  в грассмановий многовид  $PG(2, 4)$ . Грассмановим образом поверхні  $V^2$  називають образ зазначеного відображення. Грассмановий образ просторовоподібної (часоподібної) двовимірної поверхні простору  ${}^1R_4$  є двовимірним підмноговидом многовиду часоподібних (просторовоподібних) площин. Індукована метрика грассманового образу може бути знаковизначеною, знаконевизначеною або виродженою, а отже грассмановий образ може бути двовимірною просторовоподібною, часоподібною або ізотропною поверхнею. Існують поверхні, у яких грассмановий образ може вироджуватися в лінію. В цій статті будемо розглядати лише не вироджений грассмановий образ і позначати його символом  $\Gamma^2$ .

Якщо регулярну неізотропну поверхню  $V^2$  класу  $C^k$ ,  $k \geq 2$ , в  ${}^1R_4$  задавати векторним рівнянням  $\bar{r} = \bar{r}(u^1, u^2)$ , то вектори  $\bar{r}_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^i}$  будуть дотичними до поверхні і в кожній точці  $x \in V^2$  однозначно визначається двовимірна нормальна площина  $N_x$ . Якщо поверхня просторовоподібна, то нормальна площина в кожній точці до цієї поверхні буде часоподібною; якщо ж поверхня часоподібна, то — просторовоподібною.

Будемо вважати, що в точці  $x \in V^2$  вектори  $\bar{r}_1, \bar{r}_2$  ортогональні. Виберемо в нормальній площині  $N_x$  лінійно незалежні одиничні вектори  $\bar{\xi}_1$  і  $\bar{\xi}_2$  так, щоб четвірка векторів  $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2$  була ортогональною в  ${}^1R_4$ . За допомогою кожного базисного вектора нормальної площини визначимо другу квадратичну форму

$$II^k = L_{ij}^k du^i du^j, \quad i, j, k = 1, 2,$$

де  $i, j$  — індекси підсумовування,  $L_{ij}^k = (\bar{\xi}_k, \bar{r}_{ij})$ ,  $(,)$  — скалярний добуток векторів.

Геометрія поверхні  $V^2$  визначає геометрію грассманового образу. Поверхню  $\Gamma^2$  будемо задавати радіусом-вектором  $\bar{p} = \bar{p}(u^1, u^2)$ , де бівектор  $\bar{p} = [\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2]$  і координати  $u^1, u^2$  перенесені з  $V^2$  грассмановим відображенням. Дотичні вектори до грассманового образу  $\Gamma^2$  поверхні  $V^2 \subset {}^1R_4$  можна записати таким чином [9]:

$$\bar{p}_{u_i} = -L_{ik}^1 g^{kl} [\bar{r}_l, \bar{\xi}_2] - L_{ik}^2 g^{kl} [\bar{\xi}_1, \bar{r}_l], \quad l = 1, 2. \quad (1)$$

Тоді метрична форма грассманового образу теж виражається через коефіцієнти першої й других квадратичних форм поверхні. Метрику грассманового образу просторовоподібної поверхні, нормальна площина до якої визначається часоподібним  $\bar{\xi}_1$  і просторовоподібним  $\bar{\xi}_2$  векторами, запишемо у вигляді

$$dp^2 = (L_{ik}^1 L_{jl}^1 - L_{ik}^2 L_{jl}^2) g^{kl} du^i du^j, \quad (2)$$

а часоподібної поверхні — у вигляді

$$dp^2 = (L_{ik}^1 L_{jl}^1 + L_{ik}^2 L_{jl}^2) g^{kl} du^i du^j. \quad (3)$$

Кожен двовимірний підпростір чотиривимірного дотичного простору многовиду  ${}^T PG(2, 4)$  (або  ${}^S PG(2, 4)$ ) будемо визначати бівектором  $\bar{\sigma} = (\sigma^{12}, \sigma^{13}, \sigma^{14}, \sigma^{23}, \sigma^{24}, \sigma^{34})$ , координати якого можна розглядати як координати точки деякого шестивимірного простору. Псевдоріманова метрика грассманових многовидів породжує в цьому шестивимірному просторі метрику сигна-

тури  $(+ - - - +)$ . Тоді вираз  $(\sigma^{12})^2 - (\sigma^{13})^2 - (\sigma^{14})^2 - (\sigma^{23})^2 - (\sigma^{24})^2 + (\sigma^{34})^2$  є скалярним квадратом бівектора  $\bar{\sigma}$ .

Серед усіх цих двовимірних просторів розглянемо ті, які є дотичними до грассманового образу поверхні  $V^2$ . Формула (1) дає координати напрямних векторів  $\bar{X} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial u^1}$  і  $\bar{Y} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial u^2}$  цих просторів.

Нехай  $V^2$  — часоподібна поверхня. Ортонормований базис  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$  простору  ${}^1R_4$  можна вибрати таким чином, щоб  $\bar{e}_1 = \frac{\bar{r}_1}{\sqrt{-g_{11}}}$ ,  $\bar{e}_2 = \frac{\bar{r}_2}{\sqrt{g_{22}}}$ ,  $\bar{e}_3 = \bar{\xi}_1$ ,  $\bar{e}_4 = \bar{\xi}_2$  (як і для двовимірної поверхні евклідового простору  $R_4$  [1, с. 316]). Тоді координати векторів  $\bar{X}$  та  $\bar{Y}$  можна записати у вигляді

$$\bar{X} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial u^1} = \left( \frac{L_{11}^2}{\sqrt{-g_{11}}}, -\frac{L_{11}^1}{\sqrt{-g_{11}}}, \frac{L_{12}^2}{\sqrt{g_{22}}}, -\frac{L_{12}^1}{\sqrt{g_{22}}} \right),$$

$$\bar{Y} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial u^2} = \left( \frac{L_{12}^2}{\sqrt{-g_{11}}}, -\frac{L_{12}^1}{\sqrt{-g_{11}}}, \frac{L_{22}^2}{\sqrt{g_{22}}}, -\frac{L_{22}^1}{\sqrt{g_{22}}} \right).$$

Координати бівектора  $\bar{\sigma} = [\bar{X}, \bar{Y}]$  будуть мати вигляд

$$\sigma^{12} = \frac{L_{11}^1 L_{12}^2 - L_{12}^1 L_{11}^2}{-g_{11}}, \quad \sigma^{13} = \frac{L_{11}^2 L_{22}^2 - (L_{12}^2)^2}{\sqrt{-g_{11} g_{22}}}, \quad \sigma^{14} = \frac{L_{12}^1 L_{12}^2 - L_{22}^1 L_{11}^2}{\sqrt{-g_{11} g_{22}}},$$

$$\sigma^{23} = \frac{L_{12}^1 L_{12}^2 - L_{11}^1 L_{22}^2}{\sqrt{-g_{11} g_{22}}}, \quad \sigma^{24} = \frac{L_{11}^1 L_{22}^2 - (L_{12}^1)^2}{\sqrt{-g_{11} g_{22}}}, \quad \sigma^{34} = \frac{L_{12}^1 L_{22}^2 - L_{22}^1 L_{12}^2}{g_{22}}.$$

У випадку просторовоподібної поверхні ортонормований базис  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$  виберемо так, щоб  $\bar{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \bar{r}_1$ ,  $\bar{e}_4 = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \bar{r}_2$  та  $\bar{e}_1 = \bar{\xi}_1$ ,  $\bar{e}_2 = \bar{\xi}_2$ . Тоді

$$\bar{X} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial u^1} = \left( -\frac{L_{11}^2}{\sqrt{g_{11}}}, -\frac{L_{12}^2}{\sqrt{g_{22}}}, \frac{L_{11}^1}{\sqrt{g_{11}}}, \frac{L_{12}^1}{\sqrt{g_{22}}} \right),$$

$$\bar{Y} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial u^2} = \left( -\frac{L_{12}^2}{\sqrt{g_{11}}}, -\frac{L_{22}^2}{\sqrt{g_{22}}}, \frac{L_{21}^1}{\sqrt{g_{11}}}, \frac{L_{22}^1}{\sqrt{g_{22}}} \right),$$

а бівектор  $\bar{\sigma}$  буде мати координати

$$\sigma^{12} = \frac{L_{11}^2 L_{22}^2 - (L_{12}^2)^2}{\sqrt{g_{11} g_{22}}}, \quad \sigma^{13} = \frac{L_{11}^1 L_{12}^2 - L_{12}^1 L_{11}^2}{g_{11}}, \quad \sigma^{14} = \frac{L_{12}^1 L_{12}^2 - L_{22}^1 L_{11}^2}{\sqrt{g_{11} g_{22}}},$$

$$\sigma^{23} = \frac{L_{11}^1 L_{22}^2 - L_{12}^1 L_{12}^2}{\sqrt{g_{11} g_{22}}}, \quad \sigma^{24} = \frac{L_{12}^1 L_{22}^2 - L_{22}^1 L_{12}^2}{g_{22}}, \quad \sigma^{34} = \frac{L_{11}^1 L_{22}^2 - (L_{12}^1)^2}{\sqrt{g_{11} g_{22}}}. \quad (4)$$

**3. Поверхні з плоскою нормальною зв'язністю.** Підмноговидами з плоскою нормальною зв'язністю в просторах сталої кривини прийнято називати підмноговидами з нульовим тензором скруту [1, 7]. Залишимо це означення без змін для підмноговидів простору Мінковського. В роботі [1, с. 105] доведено, що підмноговид  $V^n$  має плоску нормальну зв'язність і попарно

різні головні кривини в евклідовому просторі тоді й лише тоді, коли на ньому існує  $n$  головних напрямків. У випадку поверхні простору Мінковського аналогічним чином можна довести такий факт: поверхня  $V^2$  у просторі Мінковського має плоску нормальну зв'язність тоді й лише тоді, коли на ній існують два головних напрямки. З цього критерію випливає важлива властивість таких поверхонь — існування параметризації, щодо якої першу та обидві другі квадратичні форми можна одночасно звести до діагонального вигляду при будь-якому виборі нормальних векторів [10].

Поверхні з плоскою нормальною зв'язністю та їх грассманові образи у просторі Мінковського мають ще додаткові властивості.

**Твердження 1.** *Якщо часоподібна поверхня  $V^2 \subset {}^1R_4$  має плоску нормальну зв'язність і не вироджений грассмановий образ, то він буде часоподібною поверхнею.*

**Доведення.** Матриця метричної форми (3) для грассманового образу поверхні з плоскою нормальною зв'язністю має вигляд

$$\begin{pmatrix} ((L_{11}^1)^2 + (L_{11}^2)^2)g^{11} & 0 \\ 0 & ((L_{22}^1)^2 + (L_{22}^2)^2)g^{22} \end{pmatrix},$$

а дотичні площини до грассманового образу визначаються векторами

$$\bar{X} = \left( \frac{L_{11}^2}{\sqrt{-g_{11}}}, -\frac{L_{11}^1}{\sqrt{-g_{11}}}, 0, 0 \right), \quad \bar{Y} = \left( 0, 0, \frac{L_{22}^2}{\sqrt{g_{22}}}, -\frac{L_{22}^1}{\sqrt{g_{22}}} \right).$$

Для часоподібною поверхні добуток  $g^{11}g^{22} < 0$ . З лінійної незалежності векторів  $\bar{X}$  і  $\bar{Y}$ , яка рівносильна умові не виродженості грассманового образу, випливає, що  $(L_{11}^1)^2 + (L_{11}^2)^2$  і  $(L_{22}^1)^2 + (L_{22}^2)^2$  відмінні від нуля, а отже їх добуток додатний. Тому детермінант матриці метричної форми від'ємний, що й потрібно було довести.

**Зауваження.** У випадку просторовоподібною поверхні з плоскою нормальною зв'язністю детермінант метричної форми (2) буде дорівнювати  $((L_{11}^1)^2 - (L_{11}^2)^2)((L_{22}^1)^2 - (L_{22}^2)^2)g^{11}g^{22}$ , де  $g^{11}g^{22} > 0$ . Грассманів образ  $\Gamma^2$  буде просторовоподібною поверхнею, якщо множники  $(L_{11}^1)^2 - (L_{11}^2)^2$  та  $(L_{22}^1)^2 - (L_{22}^2)^2$  одного знака; часоподібною, якщо різних знаків; ізотропною, якщо лише один із множників дорівнює нулю.

Розглянемо поверхні, що є гіперповерхнями тривимірних підпросторів простору Мінковського. Виберемо одну з нормалей перпендикулярно простору, якому належить поверхня. Нагадаємо, що коефіцієнти скруту знаходяться за формулами  $\mu_{\sigma\alpha/i} = (\bar{n}_{\sigma_i}, \bar{n}_\alpha)$  [1, с. 95]. Очевидно, що при такому виборі нормалей коефіцієнти скруту будуть дорівнювати нулю, а тензор скруту також буде нульовим. Отже, такі поверхні мають плоску нормальну зв'язність. Відмітимо ще одну їхню властивість.

**Твердження 2.** *Якщо гіперповерхня  $V^2$  деякого тривимірного підпростору має не вироджений грассмановий образ, то його тип збігається з типом поверхні.*

**Доведення.** У випадку часоподібною поверхні доведення випливає з твердження 1. Наведемо доведення для просторовоподібною поверхні.

Нехай  $V^2 \subset {}^1R_4$  — просторовоподібна гіперповерхня тривимірного підпростору. Виберемо  $\bar{n}_2$  перпендикулярно простору, якому належить поверхня, тоді друга квадратична форма поверхні щодо цієї нормалі буде дорівнювати нулю.

Координати (4) бівектора  $\bar{\sigma}$  будуть мати вигляд  $\sigma^{12} = 0, \sigma^{13} = 0, \sigma^{14} = 0, \sigma^{23} = 0, \sigma^{24} = 0, \sigma^{34} = \frac{L_{11}^1 L_{22}^1 - (L_{12}^1)^2}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}$ , а скалярний квадрат бівектора  $\bar{\sigma}$

$$(\sigma^{12})^2 - (\sigma^{13})^2 - (\sigma^{14})^2 - (\sigma^{23})^2 - (\sigma^{24})^2 + (\sigma^{34})^2 = \left( \frac{L_{11}^1 L_{22}^1 - (L_{12}^1)^2}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \right)^2.$$

Бівектор  $\bar{\sigma}$  визначає дотичну площину до грассманового образу, а його скалярний квадрат є додатним. Отже,  $\Gamma^2$  є просторовоподібною поверхнею.

Нагадаємо, що секційна кривина  $\bar{K}(\sigma)$  грассманового многовиду  $G(2, 4)$  евклідового простору  $R_4$  набуває значень з відрізка  $[0, 2]$ . В роботі [9] доведено таку теорему.

**Теорема 1.** *Секційна кривина  $\bar{K}(\sigma)$  грассманових підмноговидів  ${}^S PG(2, 4)$  і  ${}^T PG(2, 4)$  многовиду  $PG(2, 4)$  може набувати будь-яких дійсних значень.*

Секційна кривина грассманових підмноговидів псевдоевклідових просторів обчислюється за формулою

$$\bar{K}(\sigma) = \frac{\bar{R}_{abcd}\sigma^{ab}\sigma^{cd}}{(m_{ac}m_{bd} - m_{ab}m_{cd})\sigma^{ab}\sigma^{cd}},$$

де  $\bar{R}_{abcd}$  — тензор кривини підмноговиду,  $m_{pq}$  — метричний тензор грассманового многовиду [8]. У розгорнутому вигляді для підмноговиду  ${}^S PG(2, 4)$  маємо

$$\bar{K}(\sigma) = \frac{(-\sigma^{12} + \sigma^{34})^2 - (\sigma^{13} + \sigma^{24})^2}{(\sigma^{12})^2 - (\sigma^{13})^2 - (\sigma^{14})^2 - (\sigma^{23})^2 - (\sigma^{24})^2 + (\sigma^{34})^2}, \quad (5)$$

а для підмноговиду  ${}^T PG(2, 4)$

$$\bar{K}(\sigma) = \frac{-(-\sigma^{12} + \sigma^{34})^2 + (\sigma^{13} + \sigma^{24})^2}{(\sigma^{12})^2 - (\sigma^{13})^2 - (\sigma^{14})^2 - (\sigma^{23})^2 - (\sigma^{24})^2 + (\sigma^{34})^2}. \quad (6)$$

З'ясуємо, яких значень набуває секційна кривина грассманових підмноговидів вздовж площин, дотичних до грассманового образу поверхонь (або просто кривина грассманового образу поверхонь) з плоскою нормальною зв'язністю.

**Теорема 2.** *Нехай  $V^2 \subset^1 R_4$  — регулярна поверхня з плоскою нормальною зв'язністю і невідродженим грассмановим образом  $\Gamma^2$ . Тоді якщо:*

- 1)  $V^2$  часоподібна, то  $\bar{K}$  набуває значень з відрізка  $[0, 1]$ ;
- 2)  $V^2$  просторовоподібна і  $\Gamma^2$  просторовоподібний, то  $\bar{K}$  набуває значень з  $(-\infty, -1]$ ;
- 3)  $V^2$  просторовоподібна і  $\Gamma^2$  часоподібний, то  $\bar{K}$  набуває значень з  $[0, +\infty)$ .

**Доведення.** 1. У відповідності з твердженням 1 часоподібна поверхня з плоскою нормальною зв'язністю має часоподібний грассмановий образ  $\Gamma^2 \subset^S PG(2, 4)$ . Оскільки ненульові координати бівектора  $\bar{\sigma}$  мають вигляд

$$\sigma^{13} = \frac{L_{11}^2 L_{22}^2}{\sqrt{-g_{11}g_{22}}}, \quad \sigma^{14} = \frac{-L_{22}^1 L_{11}^2}{\sqrt{-g_{11}g_{22}}}, \quad \sigma^{23} = \frac{-L_{11}^1 L_{22}^2}{\sqrt{-g_{11}g_{22}}}, \quad \sigma^{24} = \frac{L_{11}^1 L_{22}^1}{\sqrt{-g_{11}g_{22}}},$$

то за формулою (5)

$$\bar{K}(\sigma) = \frac{(L_{11}^2 L_{22}^2 + L_{11}^1 L_{22}^1)^2}{(L_{11}^2 L_{22}^2)^2 + (L_{22}^1 L_{11}^2)^2 + (L_{11}^1 L_{22}^2)^2 + (L_{11}^1 L_{22}^1)^2}. \quad (7)$$

Очевидно, що  $\bar{K}(\sigma) \geq 0$ . Припустимо, що  $\bar{K}(\sigma) > 1$ . Тоді з (7) отримаємо нерівність  $(L_{22}^1 L_{11}^2 - L_{11}^1 L_{22}^2)^2 < 0$ , яка є хибною. Отже,  $\bar{K}(\sigma) \leq 1$ . Остаточно,  $\bar{K} \in [0, 1]$ .

2. Для просторовоподібної поверхні з плоскою нормальною зв'язністю секційна кривина (див. формули (4) і (6))

$$\bar{K}(\sigma) = -\frac{(L_{11}^2 L_{22}^2 - L_{22}^1 L_{11}^1)^2}{(L_{11}^2 L_{22}^2)^2 - (L_{22}^1 L_{11}^1)^2 - (L_{11}^1 L_{22}^2)^2 + (L_{11}^1 L_{22}^1)^2}. \quad (8)$$

За умовою теореми грассмановий образ є просторовоподібною поверхнею, тобто вираз у знаменнику додатний, тому  $\bar{K}(\sigma) < 0$ . З припущення, що  $\bar{K}(\sigma) > -1$ , отримаємо нерівність  $(L_{22}^1 L_{11}^2 - L_{11}^1 L_{22}^2)^2 < 0$ , яка є хибною. Отже, секційна кривина може набувати значень з множини  $(-\infty, -1]$ .

3. Оскільки за умовою теореми грассмановий образ є часоподібною поверхнею, то вираз у знаменнику формули (8) від'ємний, тому в цьому випадку  $\bar{K}(\sigma) \geq 0$ . Отже, для значень, яких може набувати секційна кривина грассманового многовиду  ${}^T PG(2, 4)$  вздовж площин, дотичних до часоподібного грассманового образу просторовоподібної поверхні з плоскою нормальною зв'язністю, отримуємо півінтервал  $[0, +\infty)$ .

Теорему доведено.

**4. Формулювання та доведення результату.** В пункті 3 знайдено проміжки, яким може належати кривина грассманового образу поверхні з плоскою нормальною зв'язністю простору Мінковського. Поставимо задачу дослідження поверхонь з плоскою нормальною зв'язністю, у яких грассмановий образ має сталу кривину. По-перше, чи існують такі поверхні, а по-друге, для яких значень кривини зі знайдених проміжків існують поверхні з плоскою нормальною зв'язністю і сталою кривиною їх грассманового образу.

**Теорема 3.** Для кожного  $k \in [0, 1]$  у просторі Мінковського існує двовимірна часоподібна поверхня  $V^2$  класу  $C^n$ ,  $n \geq 3$ , з плоскою нормальною зв'язністю, не вироджений грассмановий образ якої має сталу кривину  $k$ . Для кожного  $k \in (-\infty, -1]$  у просторі Мінковського існує двовимірна просторовоподібна поверхня  $V^2$  класу  $C^n$ ,  $n \geq 3$ , з плоскою нормальною зв'язністю і не виродженим просторовоподібним грассмановим образом, який має сталу кривину  $k$ . Для кожного  $k \in [0, \infty)$  у просторі Мінковського існує двовимірна просторовоподібна поверхня  $V^2$  класу  $C^n$ ,  $n \geq 3$ , з плоскою нормальною зв'язністю і не виродженим часоподібним грассмановим образом, який має сталу кривину  $k$ .

**Доведення.** Існування поверхні з плоскою нормальною зв'язністю і сталою кривиною грассманового образу буде впливати з існування розв'язку системи рівнянь Гаусса – Кодацці – Річчі, доповненої умовою сталості кривини грассманового образу. Розглянемо її для кожного типу поверхні.

**а)** Система рівнянь Гаусса – Кодацці – Річчі для часоподібної поверхні має вигляд

$$R_{\beta i j k} = \Sigma(L_{ik}^\sigma L_{j\beta}^\sigma - L_{ij}^\sigma L_{k\beta}^\sigma),$$

$$L_{ij,k}^\rho - L_{ik,j}^\rho = L_{ij}^\sigma \mu_{\sigma\rho/k} - L_{ik}^\sigma \mu_{\sigma\rho/j},$$

$$\mu_{\rho\sigma/i,k} - \mu_{\rho\sigma/k,i} + \Sigma(\mu_{\sigma\alpha/i} \mu_{\alpha\rho/k} - \mu_{\sigma\alpha/k} \mu_{\alpha\rho/i}) + (L_{kl}^\sigma L_{ji}^\rho - L_{il}^\sigma L_{jk}^\rho) g^{lj} = 0,$$

$\mu_{\sigma\alpha/i} = (\bar{n}_{\sigma i}, \bar{n}_\alpha)$  – коефіцієнти скруту.

Цю систему рівнянь отримано аналогічно [1, с. 97] з урахуванням метрики простору Мінковського.

За координатні лінії поверхні виберемо лінії кривини. Це рівносильно умові  $g_{12} = L_{12}^1 = L_{12}^2 = 0$  для довільного нормального оснащення поверхні, тобто матриця других квадратичних форм набирає вигляду  $A = \begin{pmatrix} L_{11}^1 & L_{22}^1 \\ L_{11}^2 & L_{22}^2 \end{pmatrix}$ . Виберемо базис нормалей поверхні, який паралельно переноситься в нормальному розшаруванні. Тоді всі коефіцієнти скруту в формулах Гаусса–Кодацці–Річчі дорівнюють нулю і формули Гаусса–Кодацці набирають вигляду

$$\begin{aligned} L_{11}^1 L_{22}^1 + L_{11}^2 L_{22}^2 &= Kg, \\ \partial_2 L_{11}^1 &= L_{11}^1 \Gamma_{12}^1 - L_{22}^1 \Gamma_{11}^2, \\ \partial_2 L_{11}^2 &= L_{11}^2 \Gamma_{12}^1 - L_{22}^2 \Gamma_{11}^2, \\ \partial_1 L_{22}^1 &= L_{22}^1 \Gamma_{12}^2 - L_{11}^1 \Gamma_{22}^1, \\ \partial_1 L_{22}^2 &= L_{22}^2 \Gamma_{12}^2 - L_{11}^2 \Gamma_{22}^1, \end{aligned} \tag{9}$$

де  $K$  – гауссова кривина,  $g$  – визначник матриці метричної форми,  $\Gamma_{11}^2 = -\frac{\partial_2 g_{11}}{2g_{22}}$ ,  $\Gamma_{12}^1 = \frac{\partial_2 g_{11}}{2g_{11}}$ ,  $\Gamma_{12}^2 = \frac{\partial_1 g_{22}}{2g_{22}}$ ,  $\Gamma_{22}^1 = -\frac{\partial_1 g_{22}}{2g_{11}}$  – символи Крістоффеля поверхні  $V^2$ ,  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial u^i}$ .

Рівняння Річчі справджуються тотожно, а для кривини грассманового образу маємо формулу (7).

Умови  $\partial_1 \bar{K} = \partial_2 \bar{K} = 0$  сталості кривини грассманового образу після перетворень набирають вигляду

$$\begin{aligned} \partial_1 \bar{K} &= B \left[ ((L_{11}^1)^2 + (L_{11}^2)^2) (L_{22}^2 \partial_1 L_{22}^1 - L_{22}^1 \partial_1 L_{22}^2) \right. \\ &\quad \left. + ((L_{22}^1)^2 + (L_{22}^2)^2) (L_{11}^1 \partial_1 L_{11}^2 - L_{11}^2 \partial_1 L_{11}^1) \right] = 0, \\ \partial_2 \bar{K} &= B \left[ ((L_{11}^1)^2 + (L_{11}^2)^2) (L_{22}^2 \partial_2 L_{22}^1 - L_{22}^1 \partial_2 L_{22}^2) \right. \\ &\quad \left. + ((L_{22}^1)^2 + (L_{22}^2)^2) (L_{11}^1 \partial_2 L_{11}^2 - L_{11}^2 \partial_2 L_{11}^1) \right] = 0, \\ B &= \frac{2(L_{11}^1 L_{22}^1 + L_{11}^2 L_{22}^2) (L_{11}^1 L_{22}^2 - L_{11}^2 L_{22}^1)}{((L_{11}^2 L_{22}^2)^2 + (L_{22}^1 L_{11}^2)^2 + (L_{11}^1 L_{22}^2)^2 + (L_{11}^2 L_{22}^1)^2)}. \end{aligned}$$

Отже, потрібно розглянути три випадки:

- 1)  $L_{11}^1 L_{22}^1 + L_{11}^2 L_{22}^2 = 0$ ,
- 2)  $L_{11}^1 L_{22}^2 - L_{11}^2 L_{22}^1 = 0$ ,

$$\begin{aligned}
3) & ((L_{11}^1)^2 + (L_{11}^2)^2)(L_{22}^2 \partial_1 L_{22}^1 - L_{22}^1 \partial_1 L_{22}^2) \\
& + ((L_{22}^1)^2 + (L_{22}^2)^2)(L_{11}^1 \partial_1 L_{11}^2 - L_{11}^2 \partial_1 L_{11}^1) = 0, \\
& ((L_{11}^1)^2 + (L_{11}^2)^2)(L_{22}^2 \partial_2 L_{22}^1 - L_{22}^1 \partial_2 L_{22}^2) \\
& + ((L_{22}^1)^2 + (L_{22}^2)^2)(L_{11}^1 \partial_2 L_{11}^2 - L_{11}^2 \partial_2 L_{11}^1) = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Розглянемо перший випадок:  $L_{11}^1 L_{22}^1 + L_{11}^2 L_{22}^2 = 0$ . З рівняння Гаусса випливає, що  $K = 0$ . Формулу (7) запишемо у вигляді  $\bar{K}(\sigma) = \frac{(L_{11}^2 L_{22}^2 + L_{11}^1 L_{22}^1)^2}{(L_{11}^2 L_{22}^2 + L_{11}^1 L_{22}^1)^2 + (L_{11}^1 L_{22}^2 - L_{11}^2 L_{22}^1)^2}$ . Тоді  $\bar{K} = 0$ , оскільки з невідродженості грассманового образу випливає, що  $L_{11}^1 L_{22}^2 - L_{11}^2 L_{22}^1 \neq 0$ , а ця умова означає, що точкова корозмірність поверхні дорівнює 2. Умова  $K = 0$  означає, що метрика поверхні є плоскою. Можна змінити масштаб на координатних лініях так, щоб у нових координатах  $(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$  (далі позначатимемо їх  $(u^1, u^2)$ , як і старі координати) перша квадратична форма мала вигляд  $ds^2 = -(du^1)^2 + (du^2)^2$ , звідки отримаємо  $\partial_2 g_{11} = 0$ ,  $\partial_1 g_{22} = 0$ . Рівняння Кодаці будуть мати вигляд

$$\partial_2 L_{11}^1 = 0, \quad \partial_2 L_{11}^2 = 0,$$

$$\partial_1 L_{22}^1 = 0, \quad \partial_1 L_{22}^2 = 0.$$

Тоді робимо висновок, що  $L_{11}^1 = L_{11}^1(u^1)$ ,  $L_{11}^2 = L_{11}^2(u^1)$ ,  $L_{22}^1 = L_{22}^1(u^2)$ ,  $L_{22}^2 = L_{22}^2(u^2)$ . Ці функції можна вибрати такими довільними (від відповідних параметрів) класу  $C^n$ ,  $n \geq 1$ , функціями, які б задовольняли умову  $L_{11}^1 L_{22}^1 + L_{11}^2 L_{22}^2 = 0$ , за винятком трьох випадків:  $L_{11}^1 = L_{11}^2 = 0$ ,  $L_{22}^1 = L_{22}^2 = 0$  і  $L_{11}^1 L_{22}^2 - L_{11}^2 L_{22}^1 = 0$ . У цих випадках грассмановий образ вироджений.

До розглянутого класу відноситься часоподібна поверхня  $\bar{r} = \left( a \operatorname{sh} \frac{u^1}{a}, a \operatorname{ch} \frac{u^1}{a}, b \cos \frac{u^2}{b}, b \sin \frac{u^2}{b} \right)$ . Одиницними нормаллями до неї будуть  $\bar{n}_1 = \left( \operatorname{sh} \frac{u^1}{a}, \operatorname{ch} \frac{u^1}{a}, 0, 0 \right)$  та  $\bar{n}_2 = \left( 0, 0, \cos \frac{u^2}{b}, \sin \frac{u^2}{b} \right)$ . Тоді її перша та другі квадратичні форми мають вигляд

$$ds^2 = -(du^1)^2 + (du^2)^2,$$

$$II^1 = \frac{1}{a}(du^1)^2, \quad II^2 = -\frac{1}{b}(du^2)^2.$$

Для цієї поверхні  $K = 0$ ,  $\bar{K} = 0$ . Аналог такої поверхні в евклідовому просторі називається тором Кліффорда. У просторі Мінковського можемо використовувати назву *часоподібний тор Кліффорда*.

Навпаки, якщо часоподібна поверхня точкової корозмірності 2 має нульову внутрішню кривину і невідроджений грассмановий образ, то кривина грассманового образу стала і дорівнює 0.

Розглянемо другий випадок:  $L_{11}^1 L_{22}^2 - L_{11}^2 L_{22}^1 = 0$ . В цьому випадку  $\operatorname{rang} A = 1$  або, інакше, точкова корозмірність поверхні дорівнює одиниці. Ці умови визначають гіперповерхню деякого тривимірного псевдоевклідового підпростору простору Мінковського. Можемо вибрати

базис простору Мінковського так, щоб цей тривимірний простір був координатним. Тоді одна з других квадратичних форм дорівнює нулю. Нехай для визначеності  $L_{11}^1 = L_{22}^1 = 0$ . Кривина грассманового образу за формулою (7)  $\bar{K} = \frac{(L_{11}^2 L_{22}^2)^2}{(L_{11}^1 L_{22}^1)^2} = 1$ , якщо  $L_{11}^2 L_{22}^2 \neq 0$ . У протилежному випадку ця кривина не визначена. При  $L_{11}^2 L_{22}^2 \neq 0$  з рівняння Гаусса випливає, що  $K \neq 0$ .

Навпаки, якщо будь-яка часоподібна гіперповерхня тривимірного підпростору простору Мінковського має внутрішню кривину  $K \neq 0$  і не вироджений грассмановий образ, то кривина грассманового образу стала і дорівнює 1.

**Приклад.** Для часоподібної гіперповерхні  $\bar{r} = (\text{sh } u^1 \cos u^2, \text{ch } u^1 \cos u^2, \sin u^2, 0)$  перша та другі квадратичні форми, що відповідають нормалям  $\bar{n}_1 = (\text{sh } u^1 \cos u^2, \text{ch } u^1 \cos u^2, \sin u^2, 0)$ ,  $\bar{n}_2 = (0, 0, 0, 1)$ , мають вигляд

$$ds^2 = -\cos^2 u^2 (du^1)^2 + (du^2)^2,$$

$$II^1 = \cos^2 u^2 (du^1)^2 - (du^2)^2, \quad II^2 \equiv 0.$$

Тоді  $K = 1$ ,  $\bar{K} = 1$ .

Розглянемо третій випадок. Якщо  $L_{11}^1 = L_{22}^1 = 0$  (або  $L_{11}^2 = L_{22}^2 = 0$ ), то матимемо випадок гіперповерхні тривимірного підпростору, який вже розглянуто. При  $L_{11}^1 = L_{22}^1 = 0$  (або  $L_{11}^2 = L_{22}^2 = 0$ ) грассмановий образ поверхні вироджений. Якщо лише один з коефіцієнтів  $L_{11}^2$ ,  $L_{22}^2$ , наприклад  $L_{11}^2$ , дорівнює 0, то з системи (10) отримаємо

$$L_{22}^2 \partial_1 L_{22}^1 - L_{22}^1 \partial_1 L_{22}^2 = 0,$$

$$L_{22}^2 \partial_2 L_{22}^1 - L_{22}^1 \partial_2 L_{22}^2 = 0.$$

Останню систему можна записати у вигляді

$$\partial_1 \left( \frac{L_{22}^1}{L_{22}^2} \right) = 0,$$

$$\partial_2 \left( \frac{L_{22}^1}{L_{22}^2} \right) = 0.$$

Це можливо, коли відношення  $\frac{L_{22}^1}{L_{22}^2}$  є константою. Позначивши її символом  $\varphi$ , одержимо другі квадратичні форми у вигляді  $II^1 = L_{11}^1 (du^1)^2 + \varphi L_{22}^2 (du^2)^2$ ,  $II^2 = L_{22}^2 (du^2)^2$ . Рівняння Гаусса в цьому випадку має вигляд  $Kg = \varphi L_{11}^1 L_{22}^2$ . Розглянемо рівняння Кодацці. Друге рівняння має вигляд  $L_{22}^2 \Gamma_{11}^2 = 0$ , звідки  $g_{11} = g_{11}(u^1)$ . Тоді з першого рівняння отримаємо  $L_{11}^1 = L_{11}^1(u^1)$ . З третього та четвертого рівнянь випливає, що  $\Gamma_{22}^1 = 0$ . Тоді  $g_{22} = g_{22}(u^2)$ . Після масштабування на координатних лініях одержимо метрику вигляду  $ds^2 = -(du^1)^2 + (du^2)^2$ , звідки  $K = 0$ , що неможливо в цьому випадку. Залишилось розглянути випадок  $L_{11}^2 L_{22}^2 \neq 0$  (або  $L_{11}^1 L_{22}^1 \neq 0$ ). Систему (10) перетворимо до еквівалентного вигляду

$$(L_{22}^2)^2((L_{11}^1)^2 + (L_{11}^2)^2)\partial_1\left(\frac{L_{22}^1}{L_{22}^2}\right) = (L_{11}^2)^2((L_{22}^1)^2 + (L_{22}^2)^2)\partial_1\left(\frac{L_{11}^1}{L_{11}^2}\right),$$

$$(L_{22}^2)^2((L_{11}^1)^2 + (L_{11}^2)^2)\partial_2\left(\frac{L_{22}^1}{L_{22}^2}\right) = (L_{11}^2)^2((L_{22}^1)^2 + (L_{22}^2)^2)\partial_2\left(\frac{L_{11}^1}{L_{11}^2}\right).$$

Після ділення обох частин рівнянь на  $(L_{11}^2 L_{22}^2)^2$  матимемо

$$\frac{\partial_1\left(\frac{L_{11}^1}{L_{11}^2}\right)}{1 + \left(\frac{L_{11}^1}{L_{11}^2}\right)^2} = \frac{\partial_1\left(\frac{L_{22}^1}{L_{22}^2}\right)}{1 + \left(\frac{L_{22}^1}{L_{22}^2}\right)^2},$$

$$\frac{\partial_2\left(\frac{L_{11}^1}{L_{11}^2}\right)}{1 + \left(\frac{L_{11}^1}{L_{11}^2}\right)^2} = \frac{\partial_2\left(\frac{L_{22}^1}{L_{22}^2}\right)}{1 + \left(\frac{L_{22}^1}{L_{22}^2}\right)^2}.$$

Отже,

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{L_{11}^1}{L_{11}^2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{L_{22}^1}{L_{22}^2}\right) + \operatorname{arctg}\varphi(u^2),$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{L_{11}^1}{L_{11}^2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{L_{22}^1}{L_{22}^2}\right) + \operatorname{arctg}\psi(u^1).$$

Звідси випливає, що  $\varphi(u^2) = \psi(u^1) = \operatorname{const} \neq 0$ . Якщо ця константа дорівнює нулю, то приходимо до розглянутого вище другого випадку. Позначимо її символом  $\frac{1}{\varphi}$ . Тоді

$$\frac{L_{11}^1}{L_{11}^2} = \frac{\frac{L_{22}^1}{L_{22}^2} + \frac{1}{\varphi}}{1 - \frac{L_{22}^1}{L_{22}^2} \frac{1}{\varphi}} = \frac{\varphi L_{22}^1 + L_{22}^2}{\varphi L_{22}^2 - L_{22}^1}$$

або  $L_{22}^1(L_{11}^1 + \varphi L_{11}^2) = L_{22}^2(\varphi L_{11}^1 - L_{11}^2)$ . Можемо записати пропорцію  $\frac{L_{22}^1}{\varphi L_{11}^1 - L_{11}^2} = \frac{L_{22}^2}{L_{11}^1 + \varphi L_{11}^2} = k(u^1, u^2)$ , де  $k(u^1, u^2)$  – довільна функція параметрів  $u^1, u^2$ . Отже,  $L_{22}^1 = k(u^1, u^2)(\varphi L_{11}^1 - L_{11}^2)$ ,  $L_{22}^2 = k(u^1, u^2)(L_{11}^1 + \varphi L_{11}^2)$ . Легко перекопатись у справедливості рівності  $(L_{22}^1)^2 + (L_{22}^2)^2 = k^2(u^1, u^2)(\varphi^2 + 1)((L_{11}^1)^2 + (L_{11}^2)^2)$ . Виходячи з цієї рівності, можемо шукати  $L_{11}^1, L_{11}^2, L_{22}^1, L_{22}^2$  у вигляді

$$L_{11}^1 = f(u^1, u^2) \cos \theta(u^1, u^2), \quad L_{11}^2 = f(u^1, u^2) \sin \theta(u^1, u^2),$$

$$L_{22}^1 = k(u^1, u^2) f(u^1, u^2) \sqrt{\varphi^2 + 1} \cos \xi(u^1, u^2),$$

$$L_{22}^2 = k(u^1, u^2)f(u^1, u^2)\sqrt{\varphi^2 + 1} \sin \xi(u^1, u^2).$$

Для зручності не будемо далі писати, від яких змінних залежать функції. Підставивши ці вирази у рівність  $L_{11}^1 L_{22}^1 + L_{11}^2 L_{22}^2 = \varphi(L_{11}^1 L_{22}^2 - L_{11}^2 L_{22}^1)$ , отримаємо

$$\cos(\xi - \theta) = \varphi \sin(\xi - \theta). \quad (11)$$

Значення кривини грассманового образу для таких коефіцієнтів других квадратичних форм  $\overline{K} = \cos^2(\xi - \theta)$ , а умови сталості цієї кривини набувають вигляду  $\cos(\xi - \theta) = 0$ , або  $\sin(\xi - \theta) = 0$ , або  $\xi - \theta = \text{const}$ .

Перші два випадки суперечать рівності (11), тоді в третьому випадку потрібно розглядати константу, відмінну від 0 та  $\frac{\pi}{2}$ . Це означає, що ми не одержимо інших поверхонь з  $\overline{K} = 0$  або  $\overline{K} = 1$ , крім тих, які вже отримано вище. Отже, розглядатимемо випадок, коли різниця  $\xi - \theta$  є відмінною від 0 та  $\frac{\pi}{2}$  константою. Позначимо  $\xi - \theta = c$ . Тоді

$$\begin{aligned} L_{11}^1 &= f \cos \theta, & L_{11}^2 &= f \sin \theta, \\ L_{22}^1 &= kf\sqrt{\varphi^2 + 1} \cos(\theta + c), & L_{22}^2 &= kf\sqrt{\varphi^2 + 1} \sin(\theta + c). \end{aligned}$$

Рівність (11) набуває вигляду

$$\cos c = \varphi \sin c. \quad (12)$$

Розглянемо перші два рівняння Кодаці:

$$\partial_2(f \cos \theta) = \Gamma_{12}^1 f \cos \theta - \Gamma_{11}^2 kf\sqrt{1 + \varphi^2} \cos(\theta + c),$$

$$\partial_2(f \sin \theta) = \Gamma_{12}^1 f \sin \theta - \Gamma_{11}^2 kf\sqrt{1 + \varphi^2} \sin(\theta + c).$$

Віднявши від першого рівняння, помноженого на  $\sin(\theta + c)$ , друге рівняння, помножене на  $\cos(\theta + c)$ , отримаємо

$$\sin c \partial_2 f - f \cos c \partial_2 \theta = f \sin c \Gamma_{12}^1.$$

Врахувавши (12), матимемо

$$\frac{\partial_2 f}{f} - \varphi \partial_2 \theta = \frac{\partial_2 g_{11}}{2g_{11}}.$$

Зінтегрувавши це рівняння, одержимо  $g_{11} = -f^2 e^{-2\varphi\theta} \alpha(u^1)$ ,  $\alpha(u^1) > 0$ .

Будемо шукати будь-який частинний розв'язок системи (9), тому можна вважати, що  $\alpha(u^1) = 1$ . Аналогічно з третього та четвертого рівнянь Кодаці знайдемо  $g_{22} = f^2 k^2 e^{2\varphi\theta} \beta(u^2)$ ,  $\beta(u^2) > 0$ . Так само розглянемо  $\beta(u^2) = 1$ . Можемо знайти вигляд символів Крістоффеля

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{\partial_2 f - \varphi f \partial_2 \theta}{fk^2} e^{-4\varphi\theta}, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{\partial_2 f - \varphi f \partial_2 \theta}{f}.$$

Тепер можемо все знайдене підставити в перше рівняння Кодаці й отримаємо

$$\frac{\partial_2 f}{f} = (\varphi - ke^{4\varphi\theta})\partial_2\theta.$$

Оскільки нас цікавить будь-який частинний розв'язок системи (9), покладемо  $k(u^1, u^2) = \text{const}$ . Зінтегрувавши останнє рівняння, одержимо  $f = e^{\varphi\theta - \frac{ke^{4\varphi\theta}}{4\varphi}}$ .

Будемо шукати розв'язок системи (9), в якому  $\theta$  є функцією від  $u^2$ . Зауважимо, що при цьому грассмановий образ поверхні залишається невідродженим. Умова  $\theta = \theta(u^2)$  забезпечує тотожне виконання третього та четвертого рівнянь Кодацці.

Нарешті розглянемо рівняння Гаусса. Оскільки ми маємо явні вирази для коефіцієнтів метрики, то гауссову кривину шуканої поверхні можемо обчислити за формулою  $K = \frac{R_{1212}}{g}$ . Тоді рівняння Гаусса має вигляд  $R_{1212} = kf^2\varphi$ , і в цьому випадку

$$R_{1212} = -\frac{1}{2}(\partial_{22}g_{11} + \partial_{11}g_{22}) + g_{11}((\Gamma_{12}^1)^2 - \Gamma_{11}^1\Gamma_{22}^1) + g_{22}((\Gamma_{12}^2)^2 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2). \quad (13)$$

Попередніми обчисленнями знаходимо

$$g_{11} = -e^{-\frac{ke^{4\varphi\theta}}{2\varphi}}, \quad g_{22} = k^2e^{4\varphi\theta - \frac{ke^{4\varphi\theta}}{2\varphi}},$$

$$\Gamma_{12}^1 = -ke^{4\varphi\theta}\partial_2\theta, \quad \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = 0, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{k}\partial_2\theta, \quad \Gamma_{22}^2 = (2\varphi - ke^{4\varphi\theta})\partial_2\theta.$$

Отже, рівняння Гаусса набирає вигляду

$$\frac{1}{\varphi}e^{2\varphi\theta}\partial_{22}\theta + 2e^{2\varphi\theta}(\partial_2\theta)^2 + 1 = 0,$$

є звичайним диференціальним рівнянням і має розв'язок

$$e^{2\varphi\theta} = 2\varphi\left(-\frac{\varphi}{2}(u^2)^2 + C_1u^2 + C_2\right).$$

Ми показали, що система (9) сумісна, і знайшли один з її розв'язків. З цього випливає висновок про існування двовимірної часоподібної поверхні  $V^2$  класу  $C^n$ ,  $n \geq 3$ , з плоскою нормальною зв'язністю у просторі Мінковського з невідродженим грассмановим образом сталої кривини, причому  $\bar{K} = \cos^2 c$ ,  $\bar{K} \in (0, 1)$ . Наприклад, при  $c = \frac{\pi}{4}$  отримаємо  $\bar{K} = \frac{1}{2}$ .

**б)** Система рівнянь Гаусса – Кодацці – Річчі двовимірної просторовоподібної поверхні має вигляд

$$R_{1212} = -L_{11}^1L_{22}^1 + (L_{12}^1)^2 + L_{11}^2L_{22}^2 - (L_{12}^2)^2,$$

$$L_{ij,k}^\rho - L_{ik,j}^\rho = L_{ij}^\sigma\mu_{\sigma\rho/k} - L_{ik}^\sigma\mu_{\sigma\rho/j},$$

$$\mu_{1\sigma/i,k} - \mu_{1\sigma/k,i} + \Sigma(\mu_{\sigma\alpha/i}\mu_{\alpha 1/k} - \mu_{\sigma\alpha/k}\mu_{\alpha 1/i}) + (L_{kl}^\sigma L_{ji}^1 - L_{il}^\sigma L_{jk}^1)g^{lj} = 0,$$

$$\mu_{2\sigma/i,k} - \mu_{2\sigma/k,i} + \Sigma(\mu_{\sigma\alpha/i}\mu_{\alpha 2/k} - \mu_{\sigma\alpha/k}\mu_{\alpha 2/i}) + (-L_{kl}^\sigma L_{ji}^2 + L_{il}^\sigma L_{jk}^2)g^{lj} = 0.$$

Якщо за координатні лінії вибрати лінії кривини просторовоподібної поверхні з плоскою нормальною зв'язністю, а базисом нормалей вибрати такий, який паралельно переноситься в нормальному розшаруванні, то рівняння Гаусса буде мати вигляд  $Kg = -L_{11}^1 L_{22}^1 + L_{11}^2 L_{22}^2$ , рівняння Кодацці збігатимуться з такими ж для часоподібної поверхні, а кривина грассманового образу обчислюватиметься за формулою (8).

Умови сталості кривини грассманового образу набирають вигляду

$$\begin{aligned} \partial_1 \bar{K} &= B \left[ ((L_{11}^1)^2 - (L_{11}^2)^2) (L_{22}^2 \partial_1 L_{22}^1 - L_{22}^1 \partial_1 L_{22}^2) \right. \\ &\quad \left. + ((L_{22}^1)^2 - (L_{22}^2)^2) (L_{11}^1 \partial_1 L_{11}^2 - L_{11}^2 \partial_1 L_{11}^1) \right] = 0, \\ \partial_2 \bar{K} &= B \left[ ((L_{11}^1)^2 - (L_{11}^2)^2) (L_{22}^2 \partial_2 L_{22}^1 - L_{22}^1 \partial_2 L_{22}^2) \right. \\ &\quad \left. + ((L_{22}^1)^2 - (L_{22}^2)^2) (L_{11}^1 \partial_2 L_{11}^2 - L_{11}^2 \partial_2 L_{11}^1) \right] = 0, \\ B &= \frac{-2(-L_{11}^1 L_{22}^1 + L_{11}^2 L_{22}^2) (L_{11}^1 L_{22}^2 - L_{11}^2 L_{22}^1)}{((L_{11}^2 L_{22}^2)^2 - (L_{22}^2 L_{11}^2)^2 - (L_{11}^1 L_{22}^2)^2 + (L_{11}^2 L_{22}^1)^2)}. \end{aligned}$$

Наслідком цієї системи є три випадки:

- 1)  $-L_{11}^1 L_{22}^1 + L_{11}^2 L_{22}^2 = 0$ ,
  - 2)  $L_{11}^1 L_{22}^2 - L_{11}^2 L_{22}^1 = 0$ ,
  - 3)  $((L_{11}^1)^2 - (L_{11}^2)^2) (L_{22}^2 \partial_1 L_{22}^1 - L_{22}^1 \partial_1 L_{22}^2) + ((L_{22}^1)^2 - (L_{22}^2)^2) (L_{11}^1 \partial_1 L_{11}^2 - L_{11}^2 \partial_1 L_{11}^1) = 0$ ,
- $$\begin{aligned} &((L_{11}^1)^2 - (L_{11}^2)^2) (L_{22}^2 \partial_2 L_{22}^1 - L_{22}^1 \partial_2 L_{22}^2) \\ &+ ((L_{22}^1)^2 - (L_{22}^2)^2) (L_{11}^1 \partial_2 L_{11}^2 - L_{11}^2 \partial_2 L_{11}^1) = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

У першому випадку з  $-L_{11}^1 L_{22}^1 + L_{11}^2 L_{22}^2 = 0$  випливає, що  $K = 0$ , звідки метрика поверхні  $ds^2 = (du^1)^2 + (du^2)^2$ . Формулу (8) запишемо у вигляді

$$\bar{K}(\sigma) = -\frac{(L_{11}^2 L_{22}^2 - L_{11}^1 L_{22}^1)^2}{(L_{11}^2 L_{22}^2 - L_{11}^1 L_{22}^1)^2 - (L_{11}^1 L_{22}^2 - L_{11}^2 L_{22}^1)^2}.$$

Тоді  $\bar{K} = 0$ , оскільки ми розглядаємо поверхні з не виродженим грассмановим образом і, отже,  $L_{11}^1 L_{22}^2 - L_{11}^2 L_{22}^1 \neq 0$ , тобто точкова корозмірність поверхні дорівнює 2. Далі міркування такі ж самі, як і у випадку часоподібної поверхні. Обмеження на вибір функцій  $L_{11}^1 = L_{11}^1(u^1)$ ,  $L_{11}^2 = L_{11}^2(u^1)$ ,  $L_{22}^1 = L_{22}^1(u^2)$ ,  $L_{22}^2 = L_{22}^2(u^2)$  в цьому випадку повинні задовольняти умову  $-L_{11}^1 L_{22}^1 + L_{11}^2 L_{22}^2 = 0$ , за винятком трьох випадків:  $L_{11}^1 = \pm L_{11}^2$ ,  $L_{22}^1 = \pm L_{22}^2$  і  $L_{11}^1 L_{22}^2 - L_{11}^2 L_{22}^1 = 0$ . У цих випадках грассмановий образ вироджений.

Прикладом просторовоподібної поверхні цього класу є поверхня  $\bar{r} = \left( a \operatorname{ch} \frac{u^1}{a}, a \operatorname{sh} \frac{u^1}{a}, b \cos \frac{u^2}{b}, b \sin \frac{u^2}{b} \right)$ . Одиниичними нормальними до неї будуть вектори

$$\bar{n}_1 = \left( \operatorname{ch} \frac{u^1}{a}, \operatorname{sh} \frac{u^1}{a}, 0, 0 \right) \quad \text{та} \quad \bar{n}_2 = \left( 0, 0, \cos \frac{u^2}{b}, \sin \frac{u^2}{b} \right).$$

Перша та другі квадратичні форми цієї поверхні мають вигляд

$$ds^2 = (du^1)^2 + (du^2)^2,$$

$$II^1 = -\frac{1}{a}(du^1)^2, \quad II^2 = -\frac{1}{b}(du^2)^2.$$

Гауссова та секційна кривини цієї поверхні дорівнюють нулю. Природно її називати *просторовоподібним тором Кліффорда*.

У другому випадку з  $L_{11}^1 L_{22}^2 - L_{11}^2 L_{22}^1 = 0$  випливає, що  $\operatorname{rang} A = 1$ , або, інакше, точкова корозмірність поверхні дорівнює одиниці. Маємо випадок гіперповерхні деякого тривимірного евклідового (або псевдоевклідового) підпростору простору Мінковського. Будемо вважати цей тривимірний підпростір координатним. Тоді одна з других квадратичних форм дорівнює нулю.

Нехай для визначеності  $L_{11}^1 = L_{22}^1 = 0$ , тоді за формулою (8)  $\bar{K} = -\frac{(L_{11}^2 L_{22}^2)^2}{(L_{11}^2 L_{22}^2)^2} = -1$ , якщо  $L_{11}^2 L_{22}^2 \neq 0$ . У протилежному випадку ця кривина не визначена. При  $L_{11}^2 L_{22}^2 \neq 0$  з рівняння Гаусса випливає, що  $K \neq 0$ .

Навпаки, якщо будь-яка просторовоподібна гіперповерхня тривимірного підпростору простору Мінковського має внутрішню кривину  $K \neq 0$  і невиводжений грассмановий образ, то кривина грассманового образу стала і дорівнює  $-1$ .

**Приклад.** Для просторовоподібної гіперповерхні  $\bar{r} = (0, u^1 \cos u^2, u^1 \sin u^2, \ln u^1)$  перша квадратична форма має вигляд

$$ds^2 = \left(1 + \frac{1}{(u^1)^2}\right)(du^1)^2 + (u^1)^2(du^2)^2,$$

а другі квадратичні форми щодо нормалей  $\bar{n}_1 = (1, 0, 0, 0)$ ,  $\bar{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + (u^1)^2}}(0, \cos u^2, \sin u^2, -u^1)$  такі:

$$II^1 \equiv 0, \quad II^2 = \frac{1}{\sqrt{1 + (u^1)^2}} \left( \frac{1}{u^1}(du^1)^2 - u^1(du^2)^2 \right),$$

$$K = -\frac{1}{(1 + (u^1)^2)^2}, \quad \bar{K} = -1.$$

Розглянемо третій випадок. Якщо  $L_{11}^1 = \pm L_{11}^2$  або  $L_{22}^1 = \pm L_{22}^2$ , то грассмановий образ поверхні вироджений. Умова  $L_{11}^1 L_{22}^2 - L_{11}^2 L_{22}^1 = 0$  приводить до другого випадку. Як і у випадку часоподібної поверхні, доводиться суперечливість умови рівності нулю лише одного

з коефіцієнтів  $L_{11}^2, L_{22}^2$  (або  $L_{11}^1, L_{22}^1$ ). Зупинимось на загальному випадку, коли  $L_{11}^2 L_{22}^2 \neq 0$  (або  $L_{11}^1 L_{22}^1 \neq 0$ ). Систему (14) перетворимо до еквівалентного вигляду

$$\frac{\partial_1 \left( \frac{L_{11}^1}{L_{11}^2} \right)}{\left( \frac{L_{11}^1}{L_{11}^2} \right)^2 - 1} = \frac{\partial_1 \left( \frac{L_{22}^1}{L_{22}^2} \right)}{\left( \frac{L_{22}^1}{L_{22}^2} \right)^2 - 1}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial_2 \left( \frac{L_{11}^1}{L_{11}^2} \right)}{\left( \frac{L_{11}^1}{L_{11}^2} \right)^2 - 1} = \frac{\partial_2 \left( \frac{L_{22}^1}{L_{22}^2} \right)}{\left( \frac{L_{22}^1}{L_{22}^2} \right)^2 - 1},$$

звідки випливає

$$\ln \left( \varphi \left| \frac{L_{11}^1 - L_{11}^2}{L_{11}^1 + L_{11}^2} \right| \right) = \ln \left| \frac{L_{22}^1 - L_{22}^2}{L_{22}^1 + L_{22}^2} \right|,$$

де  $\varphi$  — довільна додатна константа, що не дорівнює 1. Якщо  $\varphi = 1$ , то приходимо до другого випадку. Якщо грассмановий образ є просторовоподібною поверхнею, то згідно з зауваженням до твердження 1  $((L_{11}^1)^2 - (L_{11}^2)^2)((L_{22}^1)^2 - (L_{22}^2)^2) > 0$ . Тоді  $\frac{L_{22}^1 - L_{22}^2}{L_{22}^1 + L_{22}^2} = \frac{\varphi(L_{11}^1 - L_{11}^2)}{L_{11}^1 + L_{11}^2}$ . Запишемо цю пропорцію в іншому вигляді та введемо коефіцієнт пропорційності — функцію  $k(u^1, u^2)$ :

$$\frac{L_{22}^1 - L_{22}^2}{\varphi(L_{11}^1 - L_{11}^2)} = \frac{L_{22}^1 + L_{22}^2}{L_{11}^1 + L_{11}^2} = k(u^1, u^2). \quad (16)$$

Звідси випливає співвідношення  $(L_{22}^1)^2 - (L_{22}^2)^2 = k^2(u^1, u^2)\varphi((L_{11}^1)^2 - (L_{11}^2)^2)$ . Виходячи з цієї рівності, можемо шукати  $L_{11}^1, L_{11}^2, L_{22}^1, L_{22}^2$  у вигляді

$$L_{11}^1 = f(u^1, u^2) \operatorname{ch} \theta(u^1, u^2), \quad L_{11}^2 = f(u^1, u^2) \operatorname{sh} \theta(u^1, u^2),$$

$$L_{22}^1 = k(u^1, u^2) f(u^1, u^2) \sqrt{\varphi} \operatorname{ch} \xi(u^1, u^2), \quad L_{22}^2 = k(u^1, u^2) f(u^1, u^2) \sqrt{\varphi} \operatorname{sh} \xi(u^1, u^2).$$

Наслідком (16) є також рівність  $L_{11}^1 L_{22}^1 - L_{11}^2 L_{22}^2 = \frac{1+\varphi}{1-\varphi} (L_{11}^1 L_{22}^2 - L_{11}^2 L_{22}^1)$ . Умовою її виконання є вимога

$$\operatorname{ch}(\xi - \theta) = \frac{1+\varphi}{1-\varphi} \operatorname{sh}(\xi - \theta). \quad (17)$$

Значення кривини грассманового образу для таких коефіцієнтів других квадратичних форм  $\bar{K} = -\operatorname{ch}^2(\xi - \theta)$ , а умови сталості цієї кривини набирають вигляду  $\operatorname{ch}(\xi - \theta) = 0$ , або  $\operatorname{sh}(\xi - \theta) = 0$ , або  $\xi - \theta = \operatorname{const}$ . Оскільки перший випадок неможливий, а другий випадок суперечить рівності (17), то у третьому випадку потрібно розглядати константу, відмінну від нуля. Це означає, що ми не одержимо інших поверхонь з  $\bar{K} = -1$ , крім тих, які вже отримано вище. Отже, розглядатимемо випадок, коли різниця  $\xi - \theta$  є відмінною від нуля константою. Позначимо  $\xi - \theta = c$ . Тоді

$$L_{11}^1 = f \operatorname{ch} \theta, \quad L_{11}^2 = f \operatorname{sh} \theta,$$

$$L_{22}^1 = kf\sqrt{\varphi} \operatorname{ch}(\theta + c), \quad L_{22}^2 = kf\sqrt{\varphi} \operatorname{sh}(\theta + c).$$

Рівність (17) набирає вигляду

$$\operatorname{ch} c = \frac{1 + \varphi}{1 - \varphi} \operatorname{sh} c. \quad (18)$$

З першого та другого рівнянь Кодацці з урахуванням (18) отримуємо  $g_{11} = f^2 e^{-2\frac{1+\varphi}{1-\varphi}\theta} \alpha(u^1)$ ,  $\alpha(u^1) > 0$ . Аналогічно з третього та четвертого рівнянь Кодацці знаходимо  $g_{22} = f^2 k^2 e^{2\frac{1+\varphi}{1-\varphi}\theta} \beta(u^2)$ ,  $\beta(u^2) > 0$ . Нехай  $\alpha(u^1) = 1$ ,  $\beta(u^2) = 1$ .

Можемо знайти вигляд символів Крістоффеля

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{\partial_2 f - \frac{1+\varphi}{1-\varphi} f \partial_2 \theta}{fk^2} e^{-4\frac{1+\varphi}{1-\varphi}\theta}, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{\partial_2 f - \frac{1+\varphi}{1-\varphi} f \partial_2 \theta}{f}.$$

Тепер все знайдене підставимо в перше рівняння Кодацці й отримаємо

$$\frac{\partial_2 f}{f} = \left( \frac{1+\varphi}{1-\varphi} + \frac{2k}{1-\varphi} e^{4\frac{1+\varphi}{1-\varphi}\theta} \right) \partial_2 \theta.$$

Оскільки нас цікавить будь-який частинний розв'язок системи Гаусса–Кодацці–Річчі просторовоподібної поверхні, можна покласти  $k(u^1, u^2) = \operatorname{const}$ . Розв'язок останнього рівняння має вигляд  $f = e^{\frac{1+\varphi}{1-\varphi}\theta + \frac{k}{2(1+\varphi)} e^{4\frac{1+\varphi}{1-\varphi}\theta}}$ . Знайдемо розв'язок системи Гаусса–Кодацці–Річчі як функцію  $\theta$ , що залежить від змінної  $u^2$ . При цьому грассмановий образ поверхні буде невідродженим. За такої умови третє та четверте рівняння Кодацці виконуються тотожно. Рівняння Гаусса набирає вигляду  $R_{1212} = kf^2 \frac{1+\varphi}{2}$ , де  $R_{1212}$  має вигляд (13),

$$g_{11} = e^{\frac{k}{1+\varphi} e^{4\frac{1+\varphi}{1-\varphi}\theta}}, \quad g_{22} = k^2 e^{\frac{k}{1+\varphi} e^{4\frac{1+\varphi}{1-\varphi}\theta} + 4\frac{1+\varphi}{1-\varphi}\theta}, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{2k}{1-\varphi} e^{4\frac{1+\varphi}{1-\varphi}\theta} \partial_2 \theta,$$

$$\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = 0, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{(1-\varphi)k} \partial_2 \theta, \quad \Gamma_{22}^2 = \left( 2\frac{1+\varphi}{1-\varphi} + \frac{2k}{1-\varphi} e^{4\frac{1+\varphi}{1-\varphi}\theta} \right) \partial_2 \theta.$$

Остаточний вигляд рівняння Гаусса є таким:

$$\frac{4}{1-\varphi^2} e^{2\frac{1+\varphi}{1-\varphi}\theta} \partial_{22} \theta + \frac{8}{(1-\varphi)^2} e^{2\frac{1+\varphi}{1-\varphi}\theta} (\partial_2 \theta)^2 + 1 = 0,$$

а його розв'язок має вигляд  $e^{2\frac{1+\varphi}{1-\varphi}\theta} = \frac{4}{(1-\varphi)^2} \left( C_1 - \frac{(1-\varphi^2)^2}{16} (u^2 + C_2)^2 \right)$ .

Таким чином, система рівнянь Гаусса–Кодацці–Річчі для просторовоподібної поверхні сумісна, звідки випливає існування двовимірної просторовоподібної поверхні  $V^2$  класу  $C^n$ ,  $n \geq 3$ , з плоскою нормальною зв'язністю у просторі Мінковського з невідродженим просторовоподібним грассмановим образом сталої кривини. Ця кривина дорівнює  $\bar{K} = -\operatorname{ch}^2 c$ ,  $\bar{K} \in (-\infty, -1)$ . Наприклад, при  $c = 1$  отримуємо  $\bar{K} \approx -1,54$ .

Якщо ж грассмановий образ є часоподібною поверхнею, то згідно з зауваженням до твердження 1  $((L_{11}^1)^2 - (L_{11}^2)^2)((L_{22}^1)^2 - (L_{22}^2)^2) < 0$ . Тоді з системи (15) випливає  $\frac{L_{22}^1 - L_{22}^2}{L_{22}^1 + L_{22}^2} = -\frac{\varphi(L_{11}^1 - L_{11}^2)}{L_{11}^1 + L_{11}^2}$ . Запишемо цю пропорцію в іншому вигляді та введемо коефіцієнт пропорційності – функцію  $k(u^1, u^2)$ :

$$-\frac{L_{22}^1 - L_{22}^2}{\varphi(L_{11}^1 - L_{11}^2)} = \frac{L_{22}^1 + L_{22}^2}{L_{11}^1 + L_{11}^2} = k(u^1, u^2). \quad (19)$$

Звідси випливає співвідношення  $(L_{22}^1)^2 - (L_{22}^2)^2 = -k^2(u^1, u^2)\varphi((L_{11}^1)^2 - (L_{11}^2)^2)$ . Виходячи з цієї рівності, можемо шукати  $L_{11}^1, L_{11}^2, L_{22}^1, L_{22}^2$  у вигляді

$$\begin{aligned} L_{11}^1 &= f(u^1, u^2) \operatorname{sh} \theta(u^1, u^2), & L_{11}^2 &= f(u^1, u^2) \operatorname{ch} \theta(u^1, u^2), \\ L_{22}^1 &= k(u^1, u^2) f(u^1, u^2) \sqrt{\varphi} \operatorname{ch} \xi(u^1, u^2), & L_{22}^2 &= k(u^1, u^2) f(u^1, u^2) \sqrt{\varphi} \operatorname{sh} \xi(u^1, u^2). \end{aligned}$$

Наслідком (19) є також рівність  $L_{11}^2 L_{22}^1 - L_{11}^1 L_{22}^2 = \frac{1+\varphi}{1-\varphi} (L_{11}^2 L_{22}^2 - L_{11}^1 L_{22}^1)$ . Умовою її виконання є вимога

$$\operatorname{ch}(\xi - \theta) = \frac{1+\varphi}{1-\varphi} \operatorname{sh}(\xi - \theta).$$

Значення кривини грассманового образу для таких коефіцієнтів других квадратичних форм  $\bar{K} = \operatorname{sh}^2(\xi - \theta)$ .

Обчислення, аналогічні тим, які були проведені вище для просторовоподібної поверхні з просторовоподібним грассмановим образом, приводять до рівняння Гаусса для просторовоподібної поверхні з часоподібним грассмановим образом у вигляді

$$\frac{4}{1-\varphi^2} e^{2\frac{1-\varphi}{1+\varphi}\theta} \partial_{22}\theta + \frac{8}{(1+\varphi)^2} e^{2\frac{1-\varphi}{1+\varphi}\theta} (\partial_2\theta)^2 + 1 = 0.$$

Отже, існує двовимірна просторовоподібна поверхня  $V^2$  класу  $C^n$ ,  $n \geq 3$ , з плоскою нормальною зв'язністю у просторі Мінковського з неvierродженим часоподібним грассмановим образом сталої кривини. Ця кривина  $\bar{K} = \operatorname{sh}^2 c$ ,  $\bar{K} \in (0, \infty)$ .

Теорему доведено.

З доведення випливають такі висновки:

1) неізотропними поверхнями з плоскою нормальною зв'язністю, неvierроджений грассмановий образ яких має сталу кривину  $\bar{K} = 0$ , можуть бути лише поверхні зі сталою нульовою гауссовою кривиною та точковою корозмірністю 2;

2) часоподібними (просторовоподібними) поверхнями з плоскою нормальною зв'язністю, неvierроджений грассмановий образ яких має сталу кривину  $\bar{K} = 1$  ( $\bar{K} = -1$ ), можуть бути лише гіперповерхні тривимірних підпросторів з ненульовою внутрішньою кривиною.

**Конфлікт інтересів.** Автори заявляють, що вони не мають потенційного конфлікту інтересів щодо дослідження у цій статті.

**Фінансування.** Автори заявляють, що під час підготовки цього рукопису не було отримано коштів, грантів чи іншої підтримки.

**Авторські внески.** Усі автори внесли рівний внесок у роботу.

### Література

1. Ю. А. Аминов, *Геометрия подмногообразий*, Наук. думка, Киев (2002).
2. Ю. А. Аминов, *О погружении евклидовой плоскости в  $E^4$  с нулевым гауссовым кручением*, *Мат. физика, анализ, геометрия*, **1**, № 3/4, 380–391 (1994).
3. А. А. Борисенко, *Внутренняя и внешняя геометрия многомерных подмногообразий*, Экзамен, Москва (2003).
4. А. А. Борисенко, Ю. А. Николаевский, *О поверхностях с максимальной кривизной грассманаова образа*, *Мат. заметки*, **48**, № 3, 12–19 (1990).
5. М. А. Гречнева, П. Г. Стеганцева, *О поверхностях со стационарными значениями секционной кривизны грассманаова образа*, *Proc. Int. Geom. Centre*, **9**, № 2, 42–48 (2016).
6. В. Т. Лисица, *Многомерные поверхности с плоской нормальной связностью с постоянной кривизной грассманаова образа*, *Изв. вузов. Математика*, **5**, 47–51 (2004).
7. Ю. Г. Лумисте, А. В. Чекмазян, *Нормальная связность и подмногообразия с параллельными нормальными полями в пространстве постоянной кривизны*, *Итоги науки и техники. Сер. Пробл. геом.*, № 12, 3–30 (1981).
8. И. Маазикас, *К римановой геометрии грассмановых многообразий неизотропных подпространств псевдоевклидова пространства*, *Уч. зап. Тартус. ун-та*, **342**, 76–82 (1974).
9. П. Г. Стеганцева, М. А. Гречнева, *Грассманов образ неизотропной поверхности псевдоевклидова пространства*, *Изв. вузов. Математика*, № 2, 65–75 (2017).
10. В. Т. Фоменко, *Двумерные поверхности с плоской нормальной связностью в пространстве постоянной кривизны, несущие геодезические постоянной кривизны*, *Мат. заметки*, **68**, № 4, 579–586 (2000).
11. Y. Muto, *The Gauss map of submanifolds in a Euclidean space*, *J. Math. Soc. Japan*, **30**, № 1, 85–100 (1978).
12. Y. C. Wong, *Sectional curvatures of Grassmann manifolds*, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **60**, № 1, 75–79 (1968).

Одержано 13.05.21